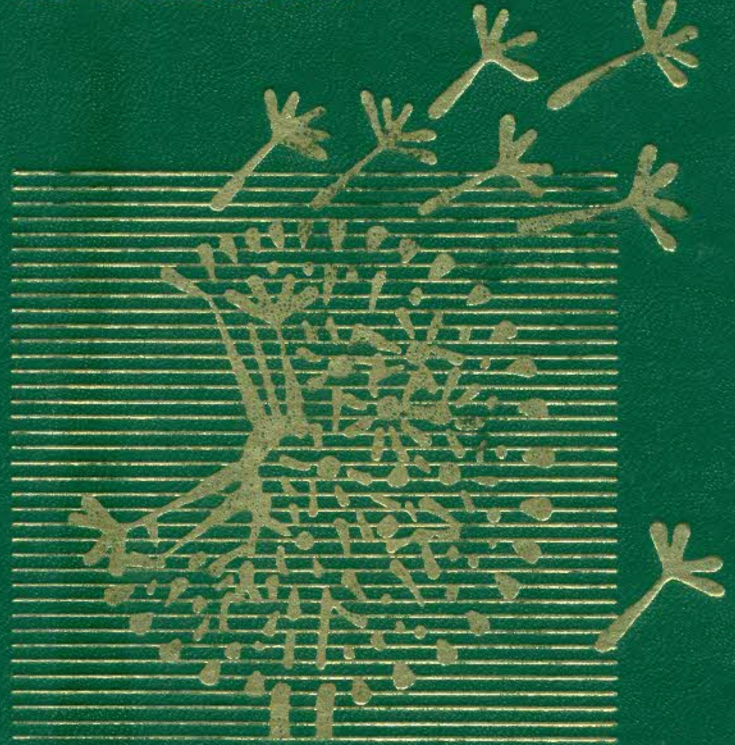
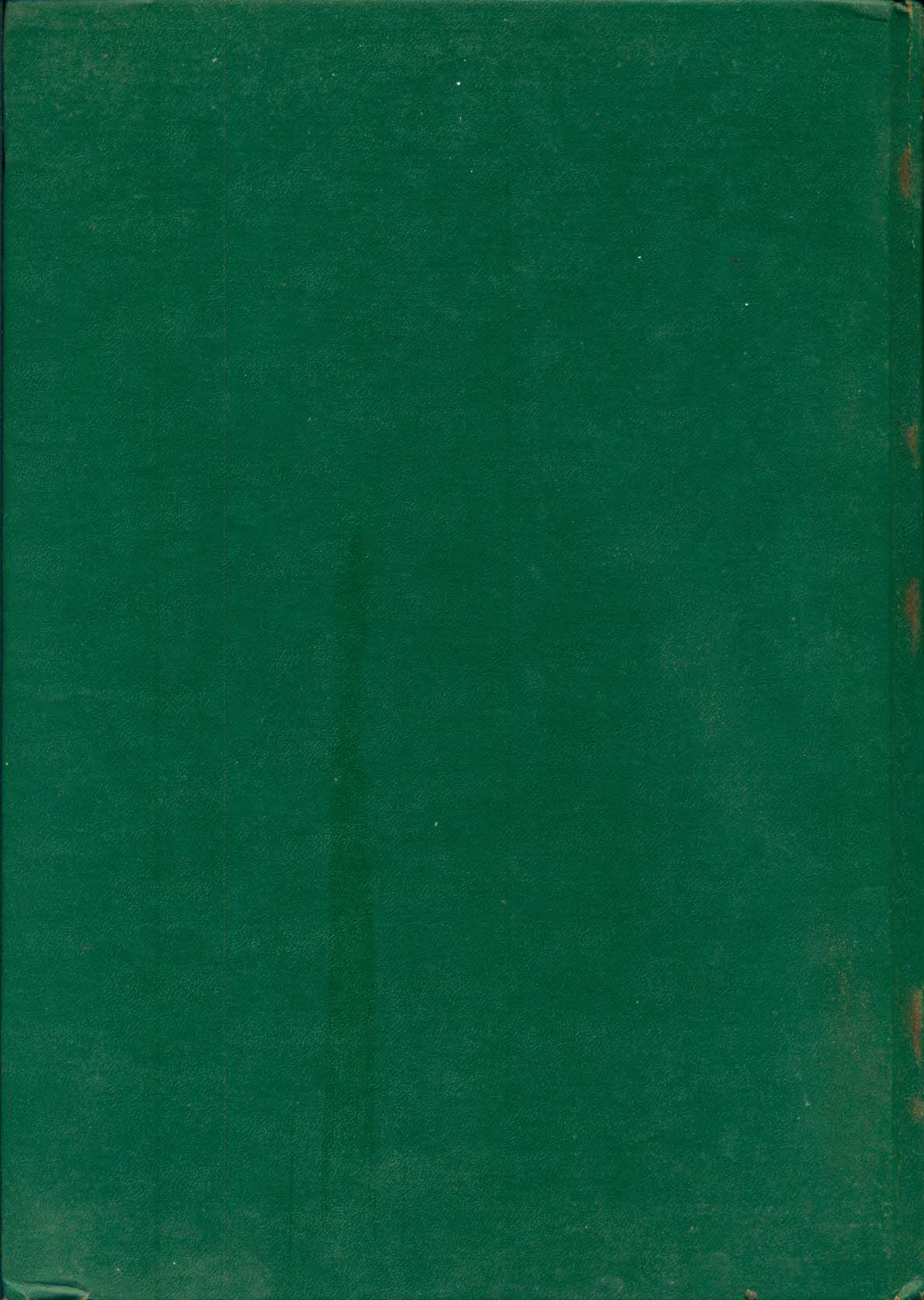
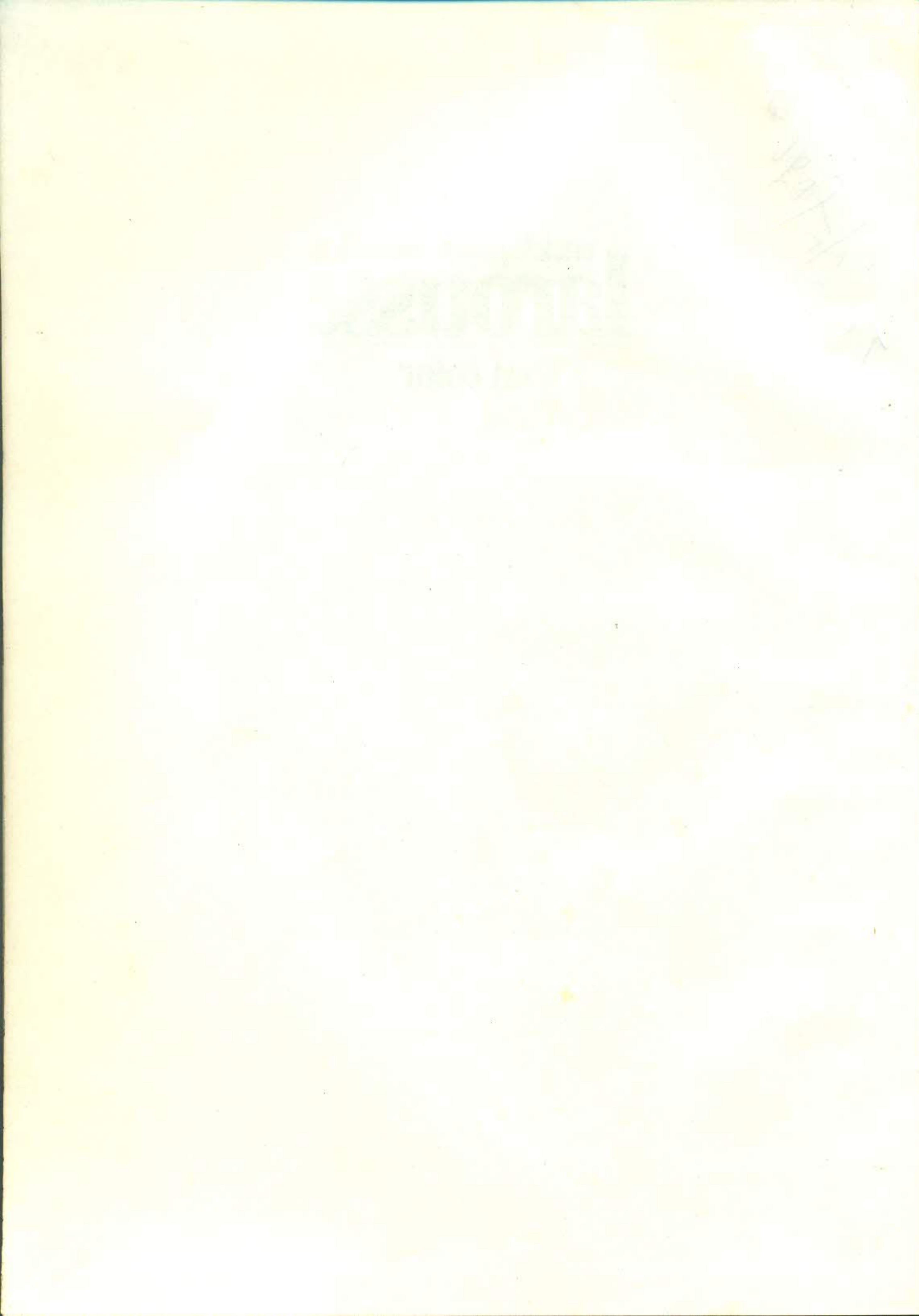
Larousse
enciclopedia científica
EN COLOR







enciclopedia científica larousse en color 1

por
RAMÓN GARCÍA-PELAYO Y GROSS

Profesor de la Universidad de París (Sorbona)
Miembro c. de la Academia Argentina de Letras,
de la Academia de San Dionisio de Ciencias, Artes y Letras,
de la Academia Boliviana de la Historia
y de la Real Academia de Bellas Artes de San Telmo.



EDICIONES LAROUSSE
Marsella 53, C. P. 06600 México, D. F.
17, rue du Montparnasse — 75006 París
Valentín Gómez 3530 Buenos Aires R 13

HAN COLABORADO EN ESTA OBRA

redacción

FERNANDO GARCÍA-PELAYO Y GROSS
MICHELINE DURAND

JULIA ÁLVAREZ TAIBO (Química)
MIGUEL F. LAHOZ LEÓN (Matemáticas)
PEDRO MARÍN GARCÍA (Física)
JESÚS PÉREZ GALLEGO (Ciencias Naturales)

confección

MANUEL TARAZONA

corrección

FERNANDO GÓMEZ PELÁEZ

Revisión, agosto 1982

PRIMERA EDICIÓN—Séptima reimpresión

ISBN 2-03-450103-9 (Librairie Larousse, Edición completa)
ISBN 968-6042-70-9 (Ediciones Larousse, Edición completa))
ISBN 968-6042-71-7 (Ediciones Larousse, Tomo 1)

Impreso en México — Printed in Mexico

INDICE DE MATERIAS

TOMO I

INDICE DE MATERIAS

TOMO II

INDICE DE MATERIAS

TOMO III

CIENCIAS NATURALES

Matemáticas

Matemáticas

Reseña histórica

De la Antigüedad a la Edad Media : Primeras nociones. Mesopotamia. Egipto. Grecia. *De Pitágoras a Eudoxio de Cnido. Euclides, Arquímedes y sus sucesores.* China. India. Mundo árabe. Europa y América. — **Edades Moderna y Contemporánea :** Nueva época de oro. Análisis. Geometría.

De la Antigüedad a la Edad Media

Primeras nociones. — La noción de *número natural* es muy antigua. Intuitivamente, el hombre ha tenido necesidad de él, desde los albores de la humanidad. El poder determinar cuántas piezas se han cazado o cuántos hombres hay en una tribu había de conducir, necesariamente, al uso del número natural, aunque no se tienen pruebas concretas de ello. Posteriormente, en civilizaciones históricas como las de las cuencas del Tigris y Éufrates o del Nilo, el hombre utiliza calendarios muy parecidos a los actuales, hace investigaciones astronómicas y complicadas mediciones en agrimensura, arquitectura e ingeniería; actividades todas ellas que implican obligatoriamente un cálculo matemático. No cabe ninguna duda acerca de las causas que impulsan al hombre a desarrollar esta tarea investigadora. Algunas de éstas son el conocimiento del número de elementos de un conjunto, las transacciones comerciales y monetarias, la observación de fenómenos astronómicos y la predicción de los mismos.

Los cuatro móviles enunciados, que por otra parte no son los únicos, van indisolublemente unidos al estudio del número natural y de las operaciones más frecuentes con él. Los avances realizados en la numeración, cálculo y geometría son verdaderamente sorprendentes para aquellas épocas y civilizaciones. Se hará a continuación, siguiendo un orden cronológico no desmasiado estricto, una breve reseña histórica de los avances y logros de cada una de las civilizaciones, hasta llegar al estado actual de las Matemáticas.

Fot. Larousse

Mesopotamia. — Las cuencas de los ríos Tigris y Éufrates son, desde el cuarto milenio a. de J. C., los primeros lugares donde las Matemáticas son objeto de estudio. Hasta la llegada de los griegos a estas regiones, los matemáticos de Babilonia guardan celosamente los conocimientos adquiridos durante miles de años. Toda la ciencia acumulada por aquellos pueblos nos es hoy conocida a través de los testimonios en escritura cuneiforme por una parte y, por otra, gracias a los hallazgos arqueológicos de los siglos XIX y XX.

Los babilonios utilizaban la numeración de posición desde el segundo milenio a. de J. C. Una de las dos tablas babilónicas encontradas en 1845 en los alrededores de Senkerch contenía los cuadrados de los primeros números hasta 8^2, escritos en numeración decimal y, desde ahí en adelante, en sexagesimal (base 60). Lo cual parece indicar que durante cierto tiempo coexistieron ambos sistemas, aunque posteriormente se impuso el uso del sexagesimal. Esta característica de numeración no es sólo una reliquia de aquellos pueblos, ya que aún continúa utilizándose en las medidas horaria y angular. En la otra tabla figuraban observaciones astronómicas en sistema sexagesimal.

Como prueban testimonios fehacientes, podemos decir que los matemáticos caldeos conocían la relación llamada *Teorema de Pitágoras,* la extracción de raíces cuadradas con gran aproximación, el cálculo de las potencias enteras de números naturales, la numeración de posición, una especie de regla de tres, resolución práctica de ecuaciones de primero y segundo grado, etc.

Como dato de su práctica del cálculo, diremos que la aproximación del número π, establecida por ellos, fue de $3 + 1/8$. Sin embargo, los estudios actuales muestran que los babilonios no llegaron a ciertos descubrimientos importantes, entre ellos la introducción del número natural *cero* en la notación y la abstracción como método de sistematización e investigación en Matemáticas. Los caldeos trataron problemas concretos, y puede decirse que ambos pueblos aplicaron conocimientos muy profundos, pero no sistematizaron los métodos en ningún tratado.

Egipto. — Mientras que en Mesopotamia la existencia de una sociedad menos rígida, más abierta, permite un desarrollo mayor de la ciencia y de sus múltiples aplicaciones a la técnica, la sociedad egipcia mantiene las ciencias y sus aplicaciones en manos de un grupo social (sacerdote-rey-noble), que las utiliza como instrumento de explotación y opresión de la mayoría del pueblo.

Problemas de aritmética y geometría planteados en un papiro egipcio que se remonta al año 1850 a. de J. C.

Alegoría de la Aritmética que representa a Pitágoras y a Boecio, filósofo y teólogo del s. VI, a quien se atribuyó erróneamente la realización de un tratado de Geometría.



Fot. Lauros-Giraudon

La Astronomía es la ciencia que más desarrollan los sacerdotes egipcios. A ellos les es especialmente útil, pues logran merced a su estudio la creación de un calendario de 365 días que les previene de las periódicas crecidas del Nilo, fundamento de la economía del país. Dichas crecidas, con su aportación de millones de toneladas de riquísimo limo, desdibujan cada vez que se producen las lindes de los campos, cuando no las hacen desaparecer por completo. El trazado de nuevas fronteras y lindes hace que la Geometría y el consiguiente cálculo de áreas se desarrollen y alcancen cierto auge.

Los egipcios han dejado grabados en jeroglíficos todos sus conocimientos matemáticos, aunque sea a través de aplicaciones a problemas concretos. De igual manera que los habitantes de Mesopotamia, carecen de la abstracción necesaria para elevar a una categoría superior los conocimientos que tienen en Matemáticas. Como consecuciones más importantes de los egipcios en el campo de esta ciencia, podemos citar el uso del sistema decimal, las fracciones, la regla de tres, el cálculo de áreas de las figuras elementales, la aproximación de π en $3 + 1/6$ y la resolución de ecuaciones de primer grado. En un papiro perteneciente a la colección Rhind, del Museo Británico (Londres), un sacerdote de nombre AHMÉS deja plasmados, a través de la resolución de problemas concretos de Aritmética y Geometría, muchos de los conocimientos acumulados por los matemáticos, entre otros el cálculo del término general, o razón, y la suma de los términos de una progresión aritmética.

Grecia. — Las aportaciones de babilonios y egipcios van a ser recogidas por el pueblo griego, que no sólo utilizará estos conocimientos, sino que los sistematizará y dará a las Matemáticas categoría de ciencia. Los matemáticos egipcios y babilonios, limitados a la solución de problemas concretos y al mero empirismo, soslayan o ignoran la demostración de los teoremas; éstos se convierten así en afirmaciones no gratuitas, pero sí faltas del rigor necesario para poder acometer, mediante una lógica deductiva, un desarrollo independiente como ciencia. Los matemáticos griegos, por el contrario, convierten el empirismo caldeo en racionalidad.

De Pitágoras a Eudoxio de Cnido. — La Escuela Pitagórica fue realmente la fundadora de la Aritmética tal y como se ha concebido hasta nuestros días. Los pitagóricos conocían y utilizaban los números enteros, atribuyéndolos un significado filosófico-religioso : cada número entero representaba un ente del universo conocido. Esta escuela conocía las progresiones aritméticas y geométricas, las proporciones, el cuadrado de una suma y de una resta y, finalmente, se debe a PITÁGORAS (s. VI a. de J.C.) el descubrimiento del número irracional.

La Escuela Jónica, que tanta influencia tuvo en el desarrollo de la cultura helénica, cuenta con insignes matemáticos que no sólo hacen progresar esta ciencia, sino que transforman la Filosofía y establecen una nueva concepción del mundo. Lumbreras de esta escuela fueron **Tales** DE MILETO (¿640?-¿547? a. de J. C.), **Anaxágoras** (¿500?-428 a. de J. C.) y **Anaxímenes** (¿550?-480 a. de J. C.).

Más tarde es **Platón** (428-¿347? a. de J. C.) quien, utilizando la Geometría, pretende probar su filosofía, y trata así de explicar cuanto no se justifica por el estado de cosas existente. Fundamentalmente, desarrolla la Geometría y hace de ella una ciencia «pura».

El más importante de los matemáticos de esta época es **Eudoxio** DE CNIDO (¿406?-¿355? a. de J.C.), a quien se debe una teoría sobre las magnitudes y el método de «exhaustividad» para hallar volúmenes, considerado como el antecedente del cálculo integral.

Euclides, Arquímedes y sus sucesores. — Más tarde, en el mismo mundo helénico, esta vez en Alejandría, hacia el siglo III a. de J. C., **Euclides** escribe sus célebres *Elementos*, libro que representa la suma global de los conocimientos geométricos adquiridos hasta esa época. Éste ha sido durante muchos siglos el eje del


Fot. Larousse

Euclides de Megara, según un grabado del siglo XVI.

Fot. Larousse



Muerte de Arquímedes por un soldado romano, durante el largo asedio de Siracusa, cuando el sabio griego estaba, según la tradición, dibujando figuras de Geometría. (Grabado hecho a partir de un dibujo de S. Bordon.)

estudio de las Matemáticas. Euclides parte de axiomas, es decir, de verdades intuitivas que debemos aceptar. A partir de ellos, y mediante razonamientos lógicos que no hagan contradecir un axioma con otro, construye toda una teoría.

Arquímedes DE SIRACUSA (s. III a. de J. C.) une a una investigación rigurosa de las Matemáticas un espíritu práctico desconocido en aquella época; no sólo utiliza los resultados matemáticos en la Física, sino que hace aportaciones que pueden considerarse, con las de Eudoxio, como los fundamentos de los cálculos diferencial e integral. Con posterioridad a Arquímedes, **Apolonio** DE PERGA (262-180 a. de J. C.) continúa con el estudio de la Geometría, y a él debemos las nociones y nombres de las cónicas; **Hiparco** (s. II a. de J. C.) funda la Trigonometría; **Ptolomeo** (s. II) da impulso a la Astronomía; y **Diofanto** (¿325?-¿410?) estudia el Álgebra, a la que da un nuevo impulso (recuérdense las ecuaciones *diofánticas*). Sin embargo, la época de esplendor no volverá hasta los siglos XV-XVI, pues la nueva religión, el Cristianismo, es hostil a esta ciencia, que se debía hasta entonces exclusivamente al trabajo de paganos. Muestra de ello fue la lapidación de la matemática **Hypatia** (415).

China. — El pueblo chino y su antiquísima civilización, aislada más que ninguna otra de los pueblos coetáneos, conocen también las Matemáticas, aunque no las aplican a la práctica común de la vida cotidiana. Podemos decir que hacia finales del milenio II a. de J.C., los hombres de ciencia chinos conocían cálculos astronómicos, fracciones, una forma parecida al teorema de Pitágoras y otros muchos procedimientos que ellos aplicaban a la resolución de problemas. Usaban la numeración decimal y, en la resolución de ecuaciones y sistemas, aceptaban como soluciones los números negativos. De manera no explicada en su consecución, el número π se valoró con gran precisión en los primeros siglos de nuestra era (hacia el 470) por **Tsu Tch'ong Tche** quien lo acotó entre 3,141 592 6 y 3,141 592 7.

Posteriormente, durante la dinastía Sing, las Matemáticas alcanzan un esplendor que desaparecerá después de la conquista manchú. En esta época se conoce el triángulo luego llamado de Pascal, se encuentran soluciones de ecuaciones de grado superior y se establecen nuevas teorías en Geometría.

India. — No tenemos pruebas que atestigüen la existencia de conocimientos científicos en Matemáticas antes del siglo II d. de J. C. Es entonces cuando se escriben los *Siddhantas* (tratados de Astronomía), donde ya se utiliza la numeración decimal casi como hoy existe. Posteriormente conocemos tratados de dos matemáticos insignes : **Aryabhata** y **Bramagupta.** El primero, autor de *La Aryabhatiya*, sintetiza las ideas conocidas por entonces y que agrupan conocimientos de Astronomía y Matemáticas, mientras que el segundo trabaja de forma poco rigurosa. Ambos aportan nuevos resultados a la Trigonometría, incluso a la esférica, y estudian las ecuaciones de segundo grado. Finalmente Bramagupta resuelve en forma general la ecuación diofántica $ax + by = 0$.

Los matemáticos indios, aunque heredan de los griegos, con los que tienen frecuentes y profundas relaciones, el rigor científico y el método deductivo, parecen no hacer caso de sus maestros; esto no quiere decir que no aporten nada nuevo al acervo mundial de las Matemáticas, pues a ellos les debemos nuestro actual sistema de numeración de posición y el uso del número *cero*, no sólo como notación, sino también como un número más.

Mundo árabe. — El Islam, religión joven, que recoge y hereda las tradiciones de los pueblos orientales, alienta e incluso favorece al investigador científico. Las traducciones de los escritos hindúes y la posterior expansión del Islamismo por África del Norte, con la posesión de la gran Biblioteca de Alejandría, deposita en el pueblo árabe todos los conocimientos desarrollados y enriquecidos por los griegos, de los que fueron celosos guardianes. Sin embargo, puede afirmarse que no aportaron ninguna nueva teoría fundamental.

El algebrista **Alkarismi,** en el siglo IX, fue quien explicó en el tratado *Al-gebr we l'mukabala* (de donde se deriva el actual nombre de *álgebra*) el concepto de esta rama matemática, en árabe «restablecimiento». Este mismo tratado fue el introductor en Occidente de conceptos como operaciones, números racionales y numeración decimal de posición. A este científico se le debe además el término *algoritmo*, que procede de la latinización de su nombre. Desgraciadamente, el hecho de refutar, como tantos otros en la Antigüedad, las raíces negativas de ecuaciones, impide un desarrollo más profundo del Álgebra. Matemáticos posteriores a Alkarismi son **Al-Biruni** y **Omar Khayyam,** a los cuales se les deben, entre otras innovaciones, la introducción de los actuales signos para las cifras desde *0* hasta *9* y un estudio detallado de las ecuaciones de tercer grado. **Al-Kashi,** en el siglo XV, hace descubrimientos de cálculo que no serán conocidos en Occidente hasta dos siglos más tarde.

La aportación fundamental del pueblo árabe a las Matemáticas proviene del hecho de haberlas introducido en Occidente. Las universidades islámicas en España, donde estudian hombres preclaros de la Europa cristiana,



Monolito de basalto de la Piedra del Sol, conocido generalmente con el nombre de «Calendario Azteca». Éste constaba de diez y ocho meses de veinte días cada uno, más cinco días como nefastos.

son focos que irradian las grandes culturas orientales, hasta entonces desconocidas. Renuevan también esta ciencia, especialmente el Álgebra y la Trigonometría, y crean las funciones circulares *seno* y *tangente*.

Europa y América. — En toda la Edad Media no se hace en Europa ningún descubrimiento fundamental en Matemáticas. La única labor positiva parece haber sido la traducción del árabe y del griego al latín y al castellano de lo entonces conocido. Estas traducciones, realizadas casi siempre en Toledo, pasan a Italia, donde tienen mayor difusión y acogida que en la Península Ibérica.

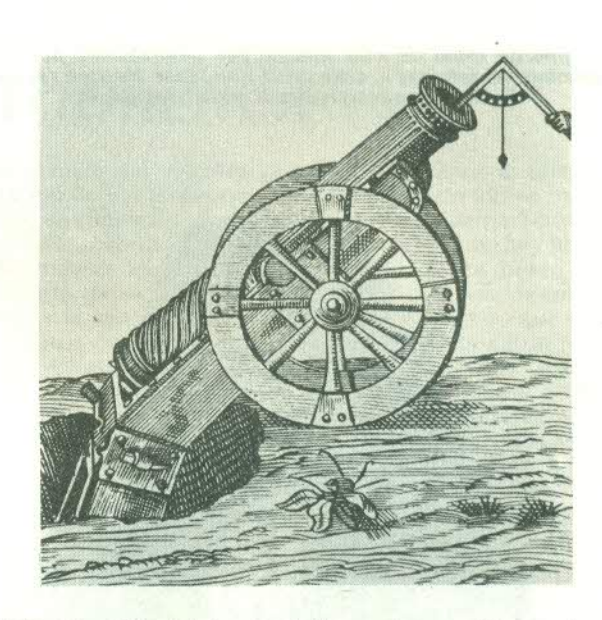
En América, el cultivo de las Matemáticas alcanzó gran desarrollo entre los mayas, pueblo precolombino asentado en México y parte de Centroamérica. Según los manuscritos y monumentos que se han podido descifrar, cultivaron particularmente la Astronomía y llegaron a una gran precisión en la confección de un calendario de 365 días. Conocieron incluso la diferencia entre el año solar y el año civil. Para llevar a cabo estos cálculos se sirvieron de una numeración con base veinte, aunque parece ser que desconocieron la cifra *cero*, al igual que muchas otras civilizaciones antiguas.

Edades Moderna y Contemporánea

Nueva época de oro. — En Italia, como consecuencia de la inquietud existente durante los siglos XV y XVI (Renacimiento), se conoce una nueva época de oro para el Álgebra. El matemático, al igual que el artista, es hombre al que se le acoge, se le ayuda y se le rinden honores de científico. Son innumerables las aportaciones y los hombres que se distinguieron, entre los que pueden citarse **Tartaglia** (¿1499?-1557), **Cardano** (1501-1576), Leonardo de **Vinci** (1452-1519), **Galileo** (1564-1642), **Torricelli** (1608-1647). En esta época, se conoce muy bien la resolución de ecuaciones, así como el Álgebra Combinatoria.

El francés François **Viète** (1540-1603), en *Isagoge in Artem analyticam,* recopiló los resultados algebraicos descubiertos en los dos últimos siglos e introdujo el lenguaje simbólico en el estudio. Al portugués Pedro NUNEZ, llamado **Nonio** (1492-1577) se deben la idea de rebajar el grado de una ecuación mediante la división y la teoría del máximo común divisor de polinomios.

La era comenzada por Scipione del **Ferro,** hacia 1500, es ya una serie ininterrumpida de avances cada vez más importantes. En el siglo XVII, los franceses René **Descartes** (1596-1650) y Pierre de **Fermat** (1601-1665), rompiendo con el hieratismo en que los griegos habían colocado a la Geometría, ponen ésta al nivel de las demás ramas de las Matemáticas. Los resultados del Álgebra y del Análisis son introducidos en el estudio de la Geometría, que enriquece así su patrimonio. En este mismo siglo, y de manera desligada, aunque no independiente, se registra un progreso gigantesco en todas las ciencias conocidas, gracias al descubrimiento, por Isaac **Newton** (1642-1727) y Gottfried Wilhelm **Leibniz** (1646-1716), del cálculo dife-



Determinación del ángulo de fuego de un cañón, según un grabado existente en el tratado de balística de Tartaglia, célebre matemático italiano del siglo XVI.



Retrato de Leonardo de Vinci, genio del arte y eminente científico italiano que vivió en pleno Renacimiento.

Fot. Lauros



Página de título de «De analysi per aequationes numero terminorum infinitas», obra en la que Isaac Newton recoge los estudios matemáticos realizados por él.

Fot. Lauros-Giraudon



Leibniz, sabio y filósofo alemán a quien se deben interesantes estudios del cálculo diferencial e integral.

rencial e integral. Desde entonces, el desarrollo de otras ciencias, como la Física, caminará junto a las Matemáticas hasta nuestros días.

Las nociones de función, serie, continuidad, derivación y, finalmente, de límite, aparecen en los siglos XVIII y principios del XIX, gracias a hombres como los suizos Leonhard **Euler** (1707-1783) y los hermanos **Bernoulli** (JACQUES, 1654-1705, y JEAN, 1667-1748); los franceses Pierre Simon de **Laplace** (1749-1827), Louis **Lagrange** (1736-1813), Adrien Marie **Le Gendre** (1752-1833) y Augustin **Cauchy** (1789-1857), así como el alemán Gustav **Lejeune-Dirichlet** (1805-1859). Todo el Análisis Álgebra, fundamentos de la moderna Estadística, Geometría Diferencial y Esférica, Astronomía y Física se ven revolucionados por la obra del genial matemático alemán Carl F. **Gauss** (1777-1855), *Princeps Mathematicorum*. El siglo XIX es muy fructífero para poder sintetizar de manera indiscriminada todos los trabajos realizados. Veamos brevemente los avances conseguidos en Análisis y en Geometría.

Análisis. — Los trabajos sobre funciones prosiguen, desarrollándose la *Teoría de Funciones de variable compleja* por los alemanes Gauss y Karl **Weierstrass** (1815-1897), así como por el francés Joseph **Liouville** (1809-1882). Las teorías de *continuidad* y *derivabilidad* son expuestas por los franceses Charles **Hermite** (1822-1901) y Henri **Poincaré** (1854-1912), mientras que el alemán Bernhard **Riemann** (1826-1866) lleva a cabo un profundo y documentado estudio acerca de las *funciones de varias variables*.

El *cálculo integral* se sistematiza y, con independencia de resultados inmediatos (áreas, volúmenes y aplicaciones físicas), intentan obtener los primeros conceptos rigurosos de *integral* matemáticos como Cauchy y Riemann, ya citados, **Stieljes, Darboux** (1842-1917) y, más recientemente, **Lebesgue** (1875-1941).

En el campo del Análisis son también notables las aportaciones del alemán Richard **Dedekind** (1831-1916) en el estudio de los números reales, y las de series de números reales de Dirichlet, Riemann y Weierstrass. Se podrían citar también los descubrimientos topológicos del checo Bernhard **Bolzano** (1781-1848) y del francés Emile **Borel** (1871-1956), lo mismo que Weierstrass y Lebesgue, que amplian la noción de función entre conjuntos cualesquiera.

Geometría. — Durante el siglo XIX, la Geometría progresa gracias a los trabajos de Gauss y Riemann, continuados por las investigaciones del francés Michel **Chasles** (1793-1880), del húngaro Janos **Bolyai** (1802-1860) y del ruso Nikolai **Lobacheski** (1792-1856). La aparición de *geometrías no euclidianas* y *geometrías riemannianas* parecen contradecir el patrimonio legado por Euclides, hasta entonces intocable, y merced a una axiomática nueva, preparan el camino de un esplendoroso porvenir que llegará a desarrollarse plenamente en el transcurso del siglo XX.

Para acabar, hemos de resaltar el avance revolucionario que, comenzado por el francés Evariste **Galois** (1811-1833) y por el noruego Niels Henrik **Abel** (1802-1829), termina con la noción ya perfectamente definida entonces de *grupo* y *ecuaciones abelianas*. Los frutos de los iniciales trabajos de Galois son hoy aún de gran actualidad, habiendo invadido todos los campos de las ciencias conocidas.

La *Teoría de conjuntos*, iniciada por el alemán Georg **Cantor** (1845-1918), trata de dar a las Matemáticas una nueva base y de unir en un solo cuerpo lo que hasta entonces parecían cosas dispares, intención muy debatida durante algún tiempo, pero aceptada plenamente en la actualidad.

El siglo XX representa también grandes progresos en el campo de las Matemáticas, aunque no es nuestra intención ahora juzgar la labor que en estos momentos realizan una pléyade de grandes hombres. En lo que respecta a los matemáticos españoles, merecen ser citados José **Echegaray** (1832-1916), Eduardo **Torroja** (1847-1918), Julio **Rey Pastor** (1888-1962) y **Rey Heredia.** Como maestros insignes, debemos también gratitud a Ricardo San Juan, Pi Calleja, Calderón, Barinaga, Alonso Trejo, Durañona, Balanzat, Babini, y tantos otros que en Iberoamérica y España han impartido o imparten sus enseñanzas.


Fot. Larousse

Tapiz, bordado en el siglo XVI, que representa la ciencia de la Aritmética (Museo de Cluny).

Álgebra y Aritmética

Introducción. — Bajo el nombre de *Álgebra* se conoce hoy una parte considerable de las Matemáticas, zona amplia pero no precisa, pues invade todo el campo del Análisis, la Topología, Geometría, etc. Especialmente la Geometría, como parte independiente de las Matemáticas ha desdibujado sus fronteras y ya hoy no puede hablarse con precisión científica de Geometría Analítica, Geometría Proyectiva o Geometría Algebraica, sino de variedades analíticas proyectivas o algebraicas. En el presente trabajo vamos exclusivamente a tratar de *Álgebra Lineal*, disciplina que puede considerarse como una de las estructuras fundamentales de las Matemáticas Modernas.

La importancia del Álgebra Lineal en el estudio elemental y superior de todas las ciencias ha adquirido en los últimos años un auge extraordinario. La Física Teórica, la Biología y la Economía utilizan la riqueza de síntesis y contenido del Álgebra como un arma para la interpretación de los fenómenos naturales que, en última instancia, es el objetivo de toda ciencia. La moderna Teoría de Grupos, expuesta por Galois en el siglo XIX, es hoy uno de los pilares básicos de las Matemáticas en orden a la agrupación de conceptos que estaban divorciados entre sí hasta la aparición de dicha teoría. Esperamos que estas páginas, concebidas casi en su totalidad desde un punto de vista moderno, sirvan de ayuda a los actuales estudiantes y estudiosos. No se pretende hacer un análisis riguroso y exhaustivo, sino simplemente abrir la mente del hombre curioso e inquieto por las nuevas formas con que el científico moderno explica la realidad que le rodea.

Finalmente, queremos advertir que la disciplina conocida como *Aritmética*, probablemente la más antigua de las ciencias investigadas y usadas por el hombre, queda completamente inmersa en el Álgebra.

1. — Elementos de la teoría de conjuntos

Noción de conjunto. Representación de conjuntos. Relación de pertenencia. Propiedad característica de un conjunto. Definición de conjunto. Subconjuntos. Identidad de conjuntos. Conjuntos complementarios. Operaciones con conjuntos. Propiedades de la unión de conjuntos. Propiedades de la intersección de conjuntos. Producto cartesiano de dos conjuntos. Propiedades del producto cartesiano de conjuntos. Partición de un conjunto. Conjunto de las partes de un conjunto. — **Complemento a la teoría de conjuntos :** Álgebra de conjuntos. Principio de dualidad. Generalización de los conceptos de unión e intersección de conjuntos.

Noción de conjunto. — En una teoría « simple » de las Matemáticas, la noción de *conjunto* es una noción primitiva, admitida sin definición. Palabras como montón, serie, colección, pila, familia o conjunto significan lo mismo. A los constituyentes de ese montón o colección se les denomina *elementos* de ese conjunto. Unos ejemplos fáciles nos aclararán en seguida la definición :

1. Sea el conjunto A, formado por todas las provincias andaluzas, que representaremos por A = {Almería, Granada, Jaén, Málaga, Sevilla, Huelva, Cádiz, Córdoba}.

Los elementos de A son todas y cada una de las provincias anteriores. Para indicar que un elemento del conjunto anterior pertenece a A, escribiremos : Granada $\in$ A.

2. Llamemos P al conjunto formado por todos los polígonos rectilíneos. P = {triángulo, cuadrilátero, pentágono, hexágono, ...}.

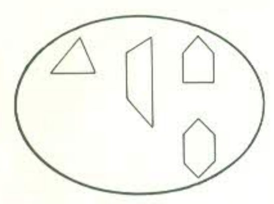
Como anteriormente, podemos escribir : triángulo $\in$ P, pentágono $\in$ P, etc. También podemos escribir : P $\ni$ triángulo, P $\ni$ pentágono, etc.

Como norma general, a los conjuntos los vamos a representar por letras mayúsculas, y a sus elementos por letras minúsculas.

* **Representación de conjuntos.** — Existen, en principio, varias maneras de representar un conjunto, que nosotros vamos a clasificar en dos generales : *gráfica* y *simbólica*.

*Véase la **Tabla de notaciones y símbolos matemáticos** al final de las Matemáticas.

Supongamos el conjunto B, formado por cuatro de los primeros polígonos : triángulo, cuadrilátero, pentágono y hexágono; una manera *gráfica* de representar dicho conjunto sería :



que denominaremos *diagrama de Euler-Venn*.

Una manera *simbólica* de representarlo, sería como hicimos anteriormente :

B = { ⬡, ⬠, ▱, ▽ } o sea

encerrarlo entre llaves.

Relación de pertenencia. — Volvamos a nuestro primer ejemplo de las provincias andaluzas. Como vemos claramente, la provincia de Madrid no pertenece a dicho conjunto A, o lo que es lo mismo, Madrid no es un elemento de A. Esta aseveración la representaremos matemáticamente por Madrid $\notin$ A.

Igualmente, podemos afirmar que un decágono (polígono de diez lados) $\notin$ B.

Propiedad característica de un conjunto. — Sea el conjunto V, formado por las cinco letras siguientes : $V = \{a, e, i, o, u\}$; podemos preguntarnos al observar V, ¿cómo son todas las letras de V?, ¿hay algún elemento de V que no sea una vocal? O, lo que es lo mismo, ¿son todos los elementos de V vocales? Y, ¿todas las vocales son elementos de V? De la respuesta afirmativa de estas dos últimas preguntas, podemos concluir que el ser vocal es una *propiedad característica* del conjunto V.

Propiedad característica de un conjunto es aquella propiedad que tienen todos y cada uno de sus elementos y ninguno más.

Otro ejemplo : sea H el conjunto formado por todos los seres humanos. Una propiedad característica de H es, por ejemplo, la racionalidad.

Definición de conjunto. — Continuando con el ejemplo de las vocales, podemos escribir : $V = \{a, e, i, o, u\}$ o también V = {vocales}; en ambos casos no existe ambigüedad alguna respecto al conocimiento de V.

A la primera manera de definir V, enumerando cada uno de sus elementos, la llamaremos definición *por extensión*. A la segunda manera, V = {vocales} o, lo que es lo mismo, dando una propiedad característica de V, a saber, que todos sus elementos son vocales, la llamaremos definición *por comprensión*.

CONJUNTO VACÍO. — Admitiremos la existencia de un ente abstracto que llamaremos *conjunto vacío*, representado por $\varnothing$, que no contiene ningún elemento.

Subconjuntos. — Sea el conjunto A = {Europa} y el conjunto B = {Francia, España}; como podemos observar, todos los elementos de B son también elementos de A. Pues bien, diremos que B es un subconjunto de A y escribiremos $B \subset A$, que leeremos : B está incluido en A. Al mismo tiempo, observaremos que no todos los elementos de A pertenecen a B; ejemplo : Suecia $\notin$ B. Entonces diremos que A no está incluido en B y escribiremos $A \not\subset B$. Más generalmente, dados dos conjuntos cualesquiera E y F, diremos que $E \subset F$ (E está incluido en F), si todos los elementos de E son al mismo tiempo elementos de F.

Existen, dado un conjunto cualquiera A, dos subconjuntos llamados *propios* de A, de particular importancia, a saber : el mismo A y el vacío, $\varnothing$, puesto que $A \subset A$ y $\varnothing \subset A$.

Identidad de conjuntos. — Dados dos conjuntos cualesquiera E y F, diremos que son idénticos si se verifican las siguientes condiciones : $E \subset F$ y además $F \subset E$ (que podemos escribir : $E \subset F \wedge F \subset E$).

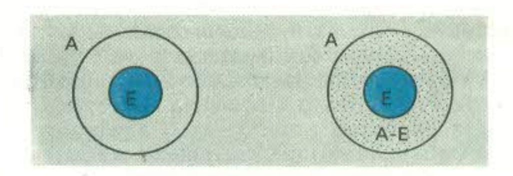
Ejemplo : dado el conjunto E = {Andalucía} y F = {Almería, Granada, Jaén, Sevilla, Huelva, Cádiz, Córdoba, Málaga} sabemos que $E \subset F$, $F \subset E$, o sea, E es idéntico a F.

Conjuntos complementarios. — Sea A = {Andalucía} y E = {Granada, Málaga, Jaén, Almería}. Llamaremos conjunto complementario de E respecto de A y escribiremos $\complement_A E$ o A-E al conjunto {Sevilla, Huelva, Cádiz, Córdoba}.

Más generalmente, dado un conjunto A y un subconjunto E de A, A-E estará formado por todos los elementos de A que no pertenecen a E.

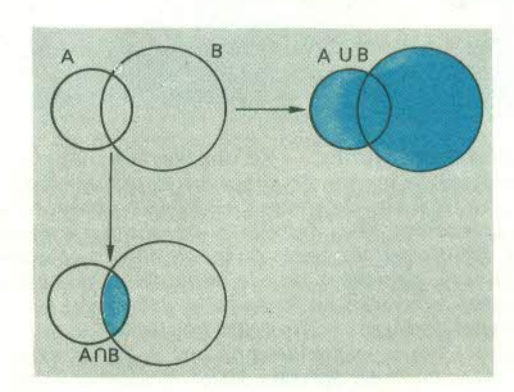
De lo anterior se deduce que $\complement_A A = \varnothing$, $\complement_A \varnothing = A$.

La noción de conjuntos complementarios viene representada en diagramas de Euler-Venn de la manera siguiente :



Operaciones con conjuntos. — Consideremos los conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $B = \{4, 5, 6, 7, 19\}$. Definiremos a partir de ellos un nuevo conjunto que se denomina *reunión* de A y B, o *unión* de A y B, a *un conjunto, que escribiremos* $A \cup B$ *(se lee* A *unión* B*), formado por todos los elementos que pertenecen o bien a* A *o bien a* B. O sea, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 19\}$. Por otra parte, definiremos la *intersección* de A y B como *un nuevo conjunto que escribiremos* $A \cap B$, *formado por todos los elementos que pertenecen a la vez a* A *y a* B : $A \cap B = \{4, 5\}$. Observemos que $A \cup \varnothing = A$ y que $A \cap \varnothing = \varnothing$.

Una representación gráfica muy demostrativa de lo anterior viene dada por diagramas de Euler-Venn.



Un par de conjuntos se llaman *disjuntos* si su intersección es el vacío.

Ejemplo : $A = \{1, 2\}$ $B = \{4, 5, 6\}$ $A \cap B = \{\varnothing\}$.

Propiedades de la unión de conjuntos. — Existen tres propiedades de la unión de conjuntos :

1. *Conmutativa.* Sean los conjuntos $A=\{1,2,3\}$ $B=\{2,3,4,5,6\}$ $C=\{1,2,7,8,9\}$ y observemos : $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6\}$ $B \cup A = \{2,3,4,5,6,1\}$, o sea, $A \cup B = B \cup A$. Igual ocurre para cualquier pareja de conjuntos A y B, según se desprende de la propia definición de reunión.

2. *Asociativa.* $(A \cup B) \cup C = \{1,2,3,4,5,6\} \cup \{1,2,7,8,9\} = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.
Por otra parte, $A \cup (B \cup C) = \{1,2,3\} \cup \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\} = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.
O, lo que es lo mismo, dada una terna cualquiera de conjuntos se verifica que : $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

3. *Idempotente.* $A \cup A = \{1,2,3\} \cup \{1,2,3\} = \{1,2,3\}$, o sea, $A \cup A = A$.

Propiedades de la intersección de conjuntos. — Tenemos las propiedades siguientes :

1. *Conmutativa.* Sean los conjuntos $A=\{a,b,c,d\}$ $B=\{c,d,e,f,g\}$ $C=\{d,f,g,h,i,m\}$.
Observemos que

$$A \cap B = \{c,d\} \quad B \cap A = \{c,d\}$$
$$A \cap C = \{d\} \quad C \cap A = \{d\}$$

lo que implica que $A \cap B = B \cap A$ y $A \cap C = C \cap A$.
Esta propiedad, que se verifica para cualquier par de conjuntos A y B, se llama conmutativa : $A \cap B = B \cap A$.

2. *Asociativa.*

$$(A \cap B) \cap C = \{c,d\} \cap \{d,f,g,h,i,m\} = \{d\}.$$
$$A \cap (B \cap C) = \{a,b,c,d\} \cap \{d,f\} = \{d\}.$$

O, lo que es lo mismo, para cualesquiera A, B, C, se verifica : $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

3. *Idempotente.* $A \cap A = A$, $B \cap B = B$, lo que se verifica para cualquier conjunto M.

Producto cartesiano de dos conjuntos. — Consideremos los conjuntos $A=\{1,2,3\}$ $B=\{a,b\}$ y formemos a partir de estos conjuntos un nuevo conjunto que representaremos por $A \times B$, y *cuyos elementos van a ser los distintos pares (parejas) que se puedan formar tomando todos y cada uno de los elementos de* A, *con todos y cada uno de los elementos de* B. Representemos, para mayor sencillez, todo lo expuesto en un diagrama cartesiano :

	1	2	3	
a	(1a)	(2a)	(3a)	
b	(1b)	(2b)	(3b)	

$A \times B = \{(1a), (2a), (3a), (1b), (2b), (3b)\}$.
De igual manera formaríamos el producto de $C \times D$; donde $C=\{1,2,3,4\}$ $D=\{m,n,p\}$.
$C \times D = \{(1m), (1n), (1p), (2m), (2n), (2p), (3m), (3n), (3p), (4m), (4n), (4p)\}$.
Este diagrama es, por otra parte, equivalente a la notación.

Propiedades del producto cartesiano de conjuntos. — El producto así definido posee las siguientes propiedades :

1. *Asociativa.* $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$, donde A, B y C son conjuntos cualesquiera. En efecto, supongamos, por ejemplo, que $A=\{1,2,3\}$ $B=\{a\}$ $C=\{b,4\}$.

Como recordaremos, para establecer la identidad entre los dos conjuntos $A \times (B \times C)$ y $(A \times B) \times C$, hemos de comprobar que

$$\begin{Bmatrix}(A \times B) \times C \subset A \times (B \times C) \\ A \times (B \times C) \subset (A \times B) \times C\end{Bmatrix}. \quad [1]$$

Veamos quién es $(A \times B) \times C$; $A \times B = \{(1a), (2a), (3a)\}$ $(A \times B) \times C = \{(1ab), (1a4), (2ab), (2a4), (3ab), (3a4)\}$ $B \times C = \{(ab), (a4)\}$; $A \times (B \times C) = \{(1ab), (1a4), (2ab), (2a4), (3ab), (3a4)\}$. Relación que podemos comprobar es igual a la $(A \times B) \times C$. O, lo que es lo mismo, se verifican las relaciones [1].

2. *Distributiva* respecto de la intersección :

$$A \times (B \cap C) = A \times B \cap A \times C.$$

Como anteriormente, hemos de comprobar que

$$A \times (B \cap C) \subset A \times B \cap A \times C \wedge A \times B \cap A \times C \subset A \times (B \cap C).$$

Sean para ello los tres conjuntos siguientes :

$A=\{1,2\}$ $B=\{a,b\}$ $C=\{a,b,c\}$. $B \cap C = \{a,b\}$. $A \times (B \cap C) = \{(1a), (1b), (2a), (2b)\}$. $A \times B = \{(1a), (1b), (2a), (2b)\}$. $A \times C = \{(1a), (1b), (1c), (2a), (2b), (2c)\}$. $A \times B \cap A \times C = \{(1a), (1b), (2a), (2b)\}$. Como vemos, cada uno de los elementos de $A \times B \cap A \times C$ pertenecen a $A \times (B \cap C)$ y recíprocamente, como queríamos demostrar.

3. *Distributiva* respecto de la unión :
$A \times (B \cup C) = A \times B \cup A \times C$. Utilicemos los mismos conjuntos A, B y C de la propiedad anterior.
$B \cup C = \{a,b,c\}$ $A \times (B \cup C) = \{(1a), (1b), (2a), (2b), (2c)\}$.

$$A \times B = \{(1a), (1b), (2a), (2b)\}$$
$$A \times C = \{(1a), (1b), (1c), (2a), (2b), (2c)\}.$$

$A \times B \cup A \times C = \{(1a), (1b), (1c), (2a), (2b), (2c)\}$.
Inmediatamente se comprueba que

$$A \times (B \cup C) \subset A \times B \cup A \times C \wedge A \times B \cup A \times C \cup A \times (B \cup C).$$

4. El producto cartesiano de conjuntos no posee la propiedad conmutativa. En efecto, dados los conjuntos A y B anteriores, notamos que $A \times B = \{(1a), (1b), (2a), (2b)\}$ y que $B \times A = \{(a\,1), (b\,1), (a\,2), (b\,2)\}$, teniendo en cuenta que $(1a) \neq (a\,1)$, $(1b) \neq (b\,1)$, $(a\,2) \neq (2a)$, $(b\,2) \neq (2b)$, ... La conclusión es de este modo muy fácil de deducir.

Partición de un conjunto. — Dado un conjunto A cualquiera, se llama *partición de* A a un nuevo conjunto formado por subconjuntos de A, $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n \ldots$ no vacíos, tales que

a) todo elemento de A pertenece al menos a uno de los subconjuntos A_1, A_2, ...

b) la intersección de cualesquiera dos subconjuntos de la partición A_j y A_i es el conjunto $\varnothing$, o sea $A_i \cap A_j = \varnothing$.

En lenguaje simbólico, podemos escribir :

a) $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = A$

b) $A_i \cap A_j = \varnothing$.

Ejemplo : dado el conjunto $A=\{1,2,a,b\}$, una partición de A, sería : $\left\{\{1\}, \{2\}, \{a\}, \{b\}\right\}$;

otra partición sería : $\left\{\{12a\}, \{b\}\right\}$, otra $\left\{\{12\}, \{ab\}\right\}$ etc.

Conjunto de las partes de un conjunto. — Dado un conjunto cualquiera E, *se llama conjunto de las partes de* E, *y se describe* P(E), *al conjunto formado por todos los*

subconjuntos de E, *incluidos* ∅ *y* E. Ejemplo : sea $E = \{1, 2, a, b\}$, entonces,

$$P(E) = \Big\{\varnothing, E, \{1\}, \{a\}, \{2\}, \{b\}, \{1a\}, \{12\}, \{1b\}, \{2a\}, \{2b\}, \{ab\}, \{12a\}, \{12b\}, \{1ab\}, \{2ab\}\Big\}.$$

Observemos que si E es un conjunto con un número finito de elementos n, el número de elementos de P(E) es, precisamente, 2^n.

Así, en el ejemplo anterior, $2^4 = 16$ [número de elementos de P(E)].

Complemento a la teoría de conjuntos

Álgebra de conjuntos. — A continuación vamos a sistematizar el anterior estudio de los conjuntos y las operaciones definidas entre ellos. Esta sistematización nos va a permitir comparar el estudio de la Teoría de Conjuntos con unas estructuras más amplias que llamaremos *Álgebras de Boole*. Esta denominación procede del nombre del célebre matemático inglés George BOOLE (1815-1864), creador de esta teoría.

Leyes del Álgebra de Conjuntos

$A \cup A = A$	$A \cap A = A$	Idempotencia
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	Asociativas
$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$	Conmutativas
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	Distributivas
$A \cup \varnothing = A$ $A \cup E = E$	$A \cap \varnothing = \varnothing$ $A \cap E = A$	Identidad
$A \cup \complement A = E$ $\complement(\complement A) = A$	$A \cap \complement A = \varnothing$ $\complement\varnothing = E, \complement E = \varnothing$	Complementarias
$\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B$ $A \cup \complement(B \cup C) = (A \cap \complement B) \cap (A \cap \complement C)$	$\complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B$ $A \cup \complement(B \cap C) = (A \cup \complement B) \cup (A \cup \complement C)$	De Morgan

NOTA. — E representa el conjunto universal y A, B, C, conjuntos cualesquiera $\subset E$.

Principio de dualidad. — El *dual* de una expresión o relación entre conjuntos es otra expresión matemática en la que se intercambian las operaciones $\cup$ y $\cap$ entre sí, así como los conjuntos E y ∅. Con esta definición, el principio de dualidad nos dice : *la expresión dual de un teorema es otro teorema.*

Generalización de los conceptos de unión e intersección de conjuntos. — Es lógico pensar en ampliar los conceptos que ya conocemos de unión e intersección a un número finito o infinito de conjuntos. La ampliación a un número finito de conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ es inmediata, pues la propiedad asociativa nos permite agruparlos de dos en dos; el resultado obtenido agruparlo nuevamente de dos en dos, y así sucesivamente.

Ejemplo : $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6 = (A_1 \cup A_2) \cup (A_3 \cup A_4) \cup (A_5 \cup A_6)$. Si llamamos a $A_1 \cup A_2 = A_{12}$; $A_3 \cup A_4 = A_{34}$; $A_5 \cup A_6 = A_{56}$, tenemos que $A_{12} \cup A_{34} \cup A_{56} = (A_{12} \cup A_{34}) \cup A_{56}$, si hacemos $A_{12} \cup A_{34} = B_1 \Longrightarrow$ que la operación de unión entre los seis conjuntos iniciales ha quedado reducida a la unión entre dos conjuntos $B_1 \cup A_{56}$.

El problema de ampliar las operaciones a un número infinito de conjuntos nos lleva a la definición de conjunto numerable.

DEFINICIÓN. — *Diremos que un conjunto* A *es numerable, si se puede establecer una biyección entre* A *y el conjunto* N *de los números naturales (o cualquier subconjunto suyo finito o infinito). En caso contrario,* A *es no numerable.*

Ejemplos :

1) todo conjunto con un número finito de elementos es numerable; 2) el conjunto de los números enteros es numerable; 3) el conjunto de los números complejos no es numerable; 4) el conjunto de los números naturales es numerable.

DEFINICIÓN. — Sea la colección de conjuntos $F = \{A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots\} = \{A_i\}_{i \in I}$, I finito o infinito. *Llamaremos unión de todos los conjuntos, y la representaremos por* $\bigcup_{A_i \in F} A_i$, *a un conjunto formado por todos los elementos que pertenecen por lo menos a uno de los conjuntos de* F. Esta definición la podríamos hacer simbólicamente así :

$$\bigcup_{A_i \in F} A_i = \{x / \exists\, i \in I / x \in A_i\}$$

o bien,

$$\bigcup_{A_i \in F} A_i = \{x / \exists\, A_i \in F, x \in A_i\}$$

DEFINICIÓN. — Sea F una colección numerable de conjuntos $\{A_i\}_{i \in I}$ I finito o infinito; llamaremos *intersección* de todos los conjuntos de F, y la representaremos por $\bigcap_{A_i \in F} A_i$, a *un conjunto formado por todos los elementos comunes a todos los conjuntos* A_i.

Simbólicamente escribiríamos :

$$\bigcap A_i = \{x / x \in A_i \ \forall i \in I\} \quad \text{ó} \quad \bigcap A_i = \{x / x \in A_i \ \forall A_i \in F\}.$$

2. — Correspondencia entre conjuntos. Números naturales

Noción de correspondencia. Conjuntos. *Inicial y final. Original e imagen.* Correspondencias. *« Sobre » y « en ». Unívocas y multívocas. Inversa. Biunívoca.* — **Aplicaciones entre conjuntos :** Noción de aplicación. Aplicaciones : *Inyectivas. Suryectivas o suryecciones. Biyectiva o biyección.* Producto de aplicaciones. Potencia de un conjunto. — **Relaciones :** Clases de relaciones. *Reflexiva. Antirreflexiva. Simétrica. Antisimétrica. Transitiva.* Relación de equivalencia. Clasificación. Conjunto cociente. Relaciones de orden. *De orden estricto. De orden. De orden parcial. De orden total.* Elementos máximo y mínimo en una relación de orden. — **Números naturales :** Postulados de Peano. Principio de inducción. Adición en N. Producto en N. Ordenación en N.

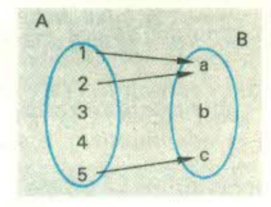
Noción de correspondencia. — Sean dos conjuntos cualesquiera A y B; llamaremos correspondencia entre dichos conjuntos a *cualquier subconjunto del producto cartesiano de* $A \times B$. Aclaremos esta definición :

Sean $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $B = \{a, b, c\}$. Podemos establecer una correspondencia entre A y B, asignando (haciendo corresponder) elementos de A a los elementos de B.

Ejemplo :

A		B	que podemos escribir :		
1	$\longrightarrow$	a	$a = f(1)$		$(1\,a)$
2	$\longrightarrow$	a	$a = f(2)$	ó	$(2\,a)$
5	$\longrightarrow$	c	$c = f(5)$		$(5\,c)$

Todo esto resulta posible representarlo también por medio de diagramas de Euler-Venn :



A la correspondencia anterior le llamaremos correspondencia f, y escribiremos :

$$f : A \longrightarrow B \quad o \quad A \xrightarrow{f} B.$$

Otra correspondencia g será : $\{(1\,a), (2\,b), (4\,c), (3\,b)\}$ que podemos escribir también :

$$a = g(1)$$
$$b = g(2)$$
$$b = g(3) \quad g : A \longrightarrow B$$
$$c = g(4).$$

Conjuntos. — *Inicial y final.* — A los conjuntos A y B, entre los cuales se establece la correspondencia f, se les llama *conjunto inicial* y *conjunto final*, respectivamente, de dicha correspondencia.

Original e imagen. — Supongamos las correspondencias f y g, definidas anteriormente, y observemos cuáles de los elementos de A (conjunto inicial) poseen correspondientes en B (conjunto final); en la correspondencia f, son $\{1, 2, 5\}$ y en g, son $\{1, 2, 3, 4\}$. A dichos subconjuntos $\{1, 2, 5\}$, $\{1, 2, 3, 4\}$ se les llama *conjuntos originales* de las correspondencias f y g, respectivamente.

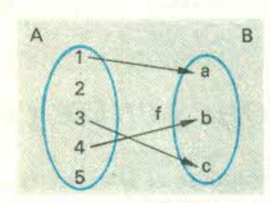
De la misma manera, veamos cuáles son los elementos de B que son correspondientes de algún elemento de A, por medio de las correspondencias f y g : para f, son $\{a, b\}$; para g, son $\{a, b, c\}$. A los subconjuntos $\{a, b\}$ y $\{a, b, c\}$ de B, se les llaman *conjuntos imágenes* de las correspondencias f y g, respectivamente.

Sintetizando, llamaremos conjunto original de una correspondencia h a *un subconjunto del conjunto inicial formado por todos los elementos que tienen algún correspondiente en el conjunto final.*

Conjunto imagen de h *es un subconjunto del conjunto final, formado por todos los elementos que son imagen de los elementos del conjunto original.*

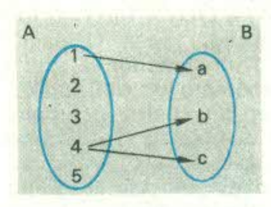
Correspondencias. — *« Sobre » y « en ».* — Dada una correspondencia f entre dos conjuntos A y B, se llama *sobre*, si el conjunto final de f coincide con la imagen de f, o sea, si $B = f(A)$. En caso contrario, se llama *en*.

Unívocas y multívocas. — Supongamos la correspondencia $f : A \longrightarrow B$.



Como observamos, cada elemento del conjunto original tiene una sola imagen.

Por otra parte, sea la correspondencia $g : A \longrightarrow B$.



En esta correspondencia, existe un elemento, el 4, que tiene dos imágenes : b y c.

Con estos dos ejemplos podemos definir : correspondencia unívoca es *aquella en la que cada elemento del conjunto original tiene una sola imagen* : la f.

Correspondencia multívoca *es aquella en la que al menos un elemento del conjunto original tiene más de una imagen en el conjunto imagen :* la g.

Inversa. — Sean A y B dos conjuntos cualesquiera; por ejemplo $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{a, b, c\}$ y f la correspondencia $\{(1a), (2b), (5b)\}$ $f : A \longrightarrow B$.

Llamaremos correspondencia inversa de la f, y escribiremos f^{-1}, a una nueva correspondencia de $B \longrightarrow A$, definida así $\{(a\,1), (b\,2), (b\,5)\}$ o sea, si para f se verificaba que

$$a = f(1)$$
$$b = f(2)$$
$$b = f(5)$$

para f^{-1} se verifica que

$$1 = f^{-1}(a)$$
$$2 = f^{-1}(b)$$
$$5 = f^{-1}(b).$$

Más generalmente, podemos definir como correspondencia inversa de una cierta correspondencia f a otra correspondencia f^{-1} caracterizada por :

el conjunto inicial de f es el final de f^{-1},
el conjunto final de f es el inicial de f^{-1},
el conjunto original de f es la imagen de f^{-1},
el conjunto imagen de f es el original de f^{-1}.

NOTA. — Observemos que el hecho de que f sea unívoca no implica que f^{-1} lo sea, como ocurre en el ejercicio anterior.

Biunívoca. — Una correspondencia f unívoca se dice que es *biunívoca, si su correspondencia inversa f^{-1} es también unívoca.*

Ejemplo :
sean $A = \{1, 2, 3\}$ $B = \{a, b\}$ y $f : A \longrightarrow B$,
$f : \{(1a), (3b)\}$, unívoca. Entonces f^{-1} de $B \longrightarrow A$,
$f^{-1} : \{(a\,1), (b\,3)\}$, es también unívoca, lo que implica que f es biunívoca.

Es claro que, dada una correspondencia f y su inversa f^{-1}, también existe la correspondencia inversa de f^{-1}, a saber, la correspondencia $(f^{-1})^{-1}$, que es idéntica a la f. O sea, $f = (f^{-1})^{-1}$.

Aplicaciones entre conjuntos

Noción de aplicación. — Dados dos conjuntos cualesquiera A y B y una correspondencia f entre ellos, diremos que dicha correspondencia es una *aplicación* si se verifican las dos condiciones siguientes :

1. f es unívoca;
2. el conjunto original de f coincide con el inicial de f.

De aquí en adelante, a efectos de notación, escribiremos : $\mathrm{In}(f)$, $\mathrm{Fin}(f)$, $\mathrm{Or}(f)$, $\mathrm{Im}(f)$ ó $f(A)$, para designar los conjuntos Inicial, Final, Original e Imagen de f respectivamente. Actualmente se utiliza el concepto de función como sinónimo de aplicación, a diferencia de pasadas épocas en las cuales los conceptos de función, correspondencia o relación significaban lo mismo. Más adelante, cuando estudiemos las curvas, veremos perfectamente cómo distinguir en el plano cartesiano una función de una correspondencia.

Aplicaciones. — *Inyectivas.* — Una aplicación de A en B se llama *inyectiva* o *inyección si a dos elementos distintos* a *y* a' *de* A *le corresponden dos elementos distintos* b *y* b' *de* B, lo que en otro lenguaje expondremos así :

$$f \text{ es inyección} \iff \forall a, a' \in A,\ a \neq a' \implies f(a) \neq f(a').$$

Suryectivas o suryecciones. — Dada una aplicación f de A en B, decimos que f es una *suryección* si se verifica que $f(A) = B$ o, lo que es lo mismo, $\forall b \in B \exists a \in A / b = f(a)$.

Biyectiva o biyección. — $f : A \longrightarrow B$ es una *biyección* si es inyectiva y suryectiva al mismo tiempo.

Ejemplos : sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$ $B = \{a, b, c\}$,
$f = \{(1a), (2b)\}$ es una inyección.
$g : \{(1a), (2b), (4c)\}$ es una suryección.
Dados $A = \{1, 2, 3, 4\}$ $B = \{a, b, c, d\}$.
$h : \{(1a), (2c), (3b), (4d)\}$ es una biyección.

Producto de aplicaciones. — Sean A, B, C tres conjuntos y f, g dos aplicaciones.

$$f : A \longrightarrow B$$
$$g : B \longrightarrow C$$

Se define el producto $g \cdot f$, función compuesta $g \cdot f$ o función de función $g \cdot f$, a una aplicación $h : A \longrightarrow C$, determinada como sigue :

$\forall a \in A;\ h(a) = g[f(a)]$, si llamamos $f(a) = b$, $b \in B$, también escribiremos $h(a) = g(b)$.

Ejemplo : sean $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $B = \{a, b, c\}$,
$C = \{m, n, 7, 8\}$ y $f : \{(1a), (2a), (3b), (4c), (5a)\}$.
$g : \{(am), (bn), (c\,8)\}$; entonces, el producto $g \cdot f$, sería :

$\{(1m), (2m), (3n), (48), (5m)\}$ o sea, $m = g \cdot f$ **[1]**
$m = g \cdot f.$ **[2]**

Observemos que, si f es una aplicación biyectiva, entonces f^{-1} también lo es y que, además, $f^{-1} \cdot f = i$ y $f \cdot f^{-1} = j$, donde i es la aplicación identidad de A, y j, la aplicación identidad en B.

Se llama aplicación *identidad i* en un conjunto A, *una aplicación de* $A \longrightarrow A$, *que hace corresponder un elemento a sí mismo* : $a = f(a) \forall a \in A$.

PROPIEDADES DEL PRODUCTO DE APLICACIONES. —
1. *Asociativa,* o sea $f \cdot (g \cdot h) = (f \cdot g) \cdot h$.
2. En general *no es conmutativo,* o sea, $f \cdot g \neq g \cdot f$.

Potencia de un conjunto. — Dados dos conjuntos A y B, diremos que ambos conjuntos son equipotentes si podemos establecer una biyección entre ellos, y escribimos $p(A) = p(b)$ o $card\ (A) = card\ (B)$, ya que a la potencia también se le llama número *cardinal.*

Se puede demostrar que todo conjunto admite un número cardinal.

Relaciones

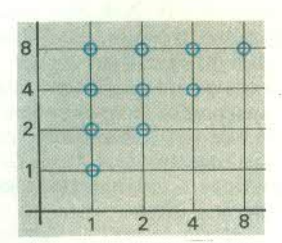
Consideremos un conjunto cualquiera A y formemos el conjunto $A \times A$ (producto cartesiano de A por sí mismo). A cualquier subconjunto de $A \times A$ le llamaremos relación.

Ejemplo : sea el conjunto $M = \{1, 2, 4, 8\}$ y formemos $M \times M = \{(11), (12), (14), (18), (21), (22), (24), (28), (41), (42), (44), (48), (81), (82), (84), (88)\}$. Un subconjunto de $M \times M$, por ejemplo el $B \subset M \times M$, $B = \{(11), (12), (14), (18), (22), (24), (28), (44), (88)\}$, establece una relación en el conjunto $M \times M$. Esta relación la podemos llamar relación de divisibilidad, ya que todos los pares de B tienen la particularidad de que el primer elemento divide al segundo; así vemos que :

1 divide a 1, ya que $1 : 1 = 1$,
1 divide a 2, ya que $2 : 1 = 2$,
4 divide a 8, ya que $8 : 4 = 2$.

Además, resulta que todas las relaciones posibles de divisibilidad en el conjunto A están dadas por la relación

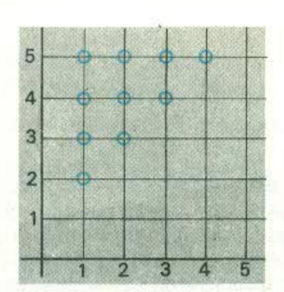
B (o subconjunto B). En un diagrama cartesiano, podemos representar la anterior relación; para ello hagamos una representación de M por puntos de una recta. Como vemos, la relación B de divisibilidad queda representada por los diez puntos del plano señalados en la figura siguiente :



NOTA : Las nociones de *relación* y *correspondencia* son idénticas para la mayoría de los autores contemporáneos; sin embargo, en esta obra hemos considerado conveniente reservar el nombre de relación para un tipo especial de correspondencias : aquellas en las que el conjunto inicial y final es el mismo.

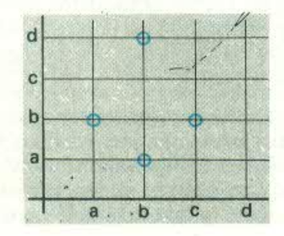
Clases de relaciones. — *Reflexiva.* — Supongamos la relación definida en el párrafo anterior e investiguemos sus características. En primer lugar, observamos que todos los elementos de M están relacionados con ellos mismos (en la figura, esto quiere decir que la diagonal principal forma parte de la relación). Simbólicamente escribiremos : $\forall a \in M$ se verifica que $a B a$.

Antirreflexiva. — Sea el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y establezcamos la relación R « menor que ». R está definido por el subconjunto {(12), (13), (14), (15), (23), (24), (25), (34), (35), (45)}, o gráficamente :



Como observamos, ningún elemento está relacionado consigo mismo, o, lo que es lo mismo, ningún elemento de la diagonal principal $\in R$. Esta relación así definida, se denomina *antirreflexiva*.

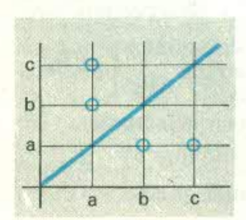
Una relación puede, al mismo tiempo, no ser ni reflexiva ni antirreflexiva. Por ejemplo la definida por el siguiente diagrama :



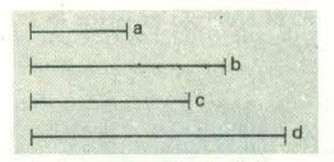
Simétrica. — Sea una relación $R \subset A \times A$. Diremos que es simétrica si se verifica : $\forall a, \ b \in A \times A / a R b \implies b R a$, o, lo que es lo mismo, si se verifica que $a Rb$, entonces $b Ra$.

Gráficamente, esta propiedad significa que los elementos de la relación son simétricos respecto de la diagonal principal. Ejemplo : supongamos el conjunto H formado por todos los habitantes de España, y establezcamos en él la relación siguiente : dos hombres están relacionados si pertenecen a la misma provincia. Es claro que esta relación es simétrica, puesto que, si un hombre pertenece a la misma provincia que otro, este último pertenece a la misma provincia que el primero. Otra relación simétrica definida en el conjunto H podría ser la que encierra la idea de « ser hermano de ».

Un diagrama cartesiano de esta relación sería, por ejemplo :

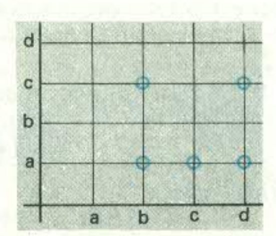


Antisimétrica. — Consideremos el conjunto A formado por varios segmentos a, b, c, d y establezcamos en él la relación « ser de más longitud que ».



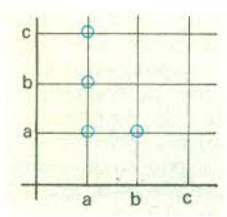
La relación $R \subset A \times A$ es {(***da***), (***db***), (***dc***), (***ba***), (***bc***), (***ca***)}, en la que vemos que, dado un par cualquiera que pertenezca a la relación, no pertenece el formado por los mismos elementos al cambiarlos de orden; así tenemos que si $(da) \in R \implies (ad) \notin R$, y así sucesivamente.

Simbólicamente esta propiedad la expresaríamos así : si $m R n, \wedge \ n R m \implies m = n$. Gráficamente una relación antisimétrica queda perfectamente definida porque no existe ningún elemento de la relación que sea simétrico con otro respecto de la diagonal principal; así en el ejemplo anteriormente mencionado de los segmentos ***a***, ***b***, ***c***, ***d***, se tendría :



Igual que notábamos al hablar de las relaciones reflexiva y antirreflexiva, ocurre con las relaciones simétrica y antisimétrica, es decir que estos conceptos no son

exclusivistas. Una relación puede ser al mismo tiempo no simétrica y no antisimétrica. La gráfica adjunta nos muestra una relación de tal tipo.



Esta relación no es antisimétrica ya que existe un elemento, el ***b***, simétrico con respecto a la diagonal.

Transitiva. — Supongamos el mismo ejemplo anterior de los segmentos y observemos que

$$\left.\begin{array}{r} d\,\mathrm{R}\,b \\ b\,\mathrm{R}\,c \end{array}\right\} d\,\mathrm{R}\,c$$

lo que viene a decir exactamente :

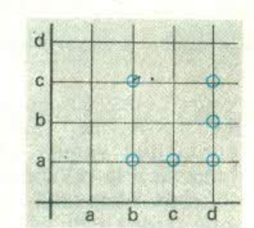
$$\left.\begin{array}{l} d \text{ es de más longitud que } b \\ b \text{ es de más longitud que } c \end{array}\right\} \begin{array}{l} d \text{ es de más longitud} \\ \text{que } c. \end{array}$$

Igualmente ocurre con

$$\left.\begin{array}{r} d\,\mathrm{R}\,b \\ b\,\mathrm{R}\,a \end{array}\right\} d\,\mathrm{R}\,a \qquad \left.\begin{array}{r} d\,\mathrm{R}\,c \\ c\,\mathrm{R}\,a \end{array}\right\} d\,\mathrm{R}\,a \qquad \left.\begin{array}{r} b\,\mathrm{R}\,c \\ c\,\mathrm{R}\,a \end{array}\right\} b\,\mathrm{R}\,a.$$

En general, dado un conjunto M y una relación R en él, diremos que R es transitiva si se verifica que $\forall a, b, c \in M / a\,\mathrm{R}b \wedge b\,\mathrm{R}c \implies a\,\mathrm{R}c$.

Gráficamente, el ejemplo anterior lo representaríamos mediante :



Relación de equivalencia. — Dado un conjunto E cualquiera y una relación R definida en E, *diremos que* R *es de equivalencia, si se verifican las tres propiedades siguientes :* 1) reflexiva; 2) simétrica; y 3) transitiva.

Ejemplo 1.° Sea N el conjunto de todos los números naturales 0, 1, 2, 3, ... y la relación en él definida así : dos números naturales están relacionados si son de la misma paridad. Veamos si es de equivalencia; para ello deberán cumplirse 1, 2, 3.

1. *Reflexiva :* $\forall a \in \mathbb{N}$, $a\mathrm{R}a$, pues todo número pertenece a la misma paridad que sí mismo.
2. *Simétrica :* si $a\mathrm{R}b \implies b\mathrm{R}a$, $\forall a, b \in \mathbb{N}$, pues si un número a es de la misma paridad que b, entonces b es de la misma paridad que a.
3. *Transitiva :* Si $a\mathrm{R}b \wedge b\mathrm{R}c \implies a\mathrm{R}c$. Si un número a es de una misma paridad que otro b, y b de la misma paridad que c, entonces a y c son de la misma paridad.

Ejemplo 2.° Dado el conjunto de las rectas del plano y la relación de perpendicularidad definida entre ellas, veamos que dicha relación no es de equivalencia. No es reflexiva, pues ninguna recta es perpendicular a sí misma. Al no cumplir una de las propiedades, no es de equivalencia.

Clasificación. — En el ejemplo primero del párrafo anterior, veíamos que con la relación R definida estaban relacionados los números 0, 2, 4, 6, ..., $2n$, ... entre sí y, por otra parte, estaban relacionados los

$$1, 3, 5, 7, \ldots, 2n-1, \ldots$$

Con lo cual resulta que, a partir del conjunto N de los naturales, han aparecido dos nuevos subconjuntos, mediante la relación de equivalencia R, a saber : el de los pares **P** y el de los impares **I**.

Como características fundamentales de estos nuevos subconjuntos, podemos citar :

1. Ninguno es idéntico al vacío $\varnothing$.
2. $\mathbf{P} \cap \mathbf{I} = \varnothing$.
3. $\mathbf{P} \cup \mathbf{I} = \mathrm{N}$.

Cada uno de los subconjuntos aparecidos como consecuencia de la definición de la relación R, se llama *clase de equivalencia.* (En nuestro caso, habrá dos clases de equivalencias : **P** e **I**). Se dice que en el conjunto inicial de partida N se ha establecido una *clasificación.*

Conjunto cociente. — En el ejemplo anterior, podemos definir un nuevo conjunto a partir del inicial. Para ello vamos a considerar a cada una de las clases de equivalencia como elementos de este nuevo conjunto : {P, I}. Este conjunto se llama *conjunto cociente*, N/R, del conjunto N respecto de la relación R.

Ejemplo : sea el conjunto F, formado por todos los polígonos del plano, y establezcamos la siguiente relación i entre los elementos de F : « dos polígonos están relacionados si tienen el mismo número de lados » : $aib \iff a$ y b tienen el mismo número de lados.

Esta relación es de equivalencia, como fácilmente podemos comprobar; las clases de equivalencia están formadas por todos los polígonos del mismo número de lados :

C_3 = {Todos los polígonos de tres lados (triángulos)}.
C_4 = {Todos los polígonos de cuatro lados}.

El conjunto cociente F/i, estará formado por :
$F/i = \{C_3, C_4, C_5, \ldots, C_n, \ldots\}$.

Relaciones de orden. — A veces interesa en Matemáticas, dado un conjunto de entes, decir cual de ellos ha de ocupar un lugar determinado, o lo que es lo mismo, establecer un orden en dicho conjunto. Ejemplo : los números naturales, todos sabemos que están ordenados con un criterio determinado. Es precisamente de los criterios de ordenación de los que se va a tratar en el epígrafe siguiente.

De orden estricto. — Dado un conjunto M y un subconjunto $R \subset M \times M$, diremos que R es una *relación de orden estricto*, si se verifican las siguientes propiedades :

1. *Antisimétrica :* si $a\mathrm{R}b \wedge b\mathrm{R}a \implies a = b$.
2. *Transitiva :* si $a\mathrm{R}b \wedge b\mathrm{R}c \implies a\mathrm{R}c$.

Un ejemplo de este orden viene definido por la relación « ser menor que » en el conjunto de los números naturales. Para indicar, por ejemplo, que la pareja $(23) \in R$, escribiremos : $2 < 3$, que ha de leerse de la siguiente manera : « dos es anterior a tres ».

De orden. — Una relación se denomina *de orden* (sin ningún adjetivo) si esta relación verifica las propiedades siguientes : 1) reflexiva; 2) antisimétrica; y 3) transitiva.

Ejemplo : en el conjunto N de los números naturales, la relación « ser menor o igual que » es de orden. Para indicar

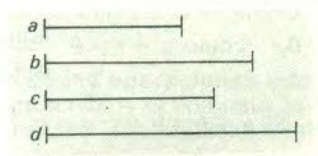
que las parejas $(22) \in R$, y la $(23) \in R$, escribiremos : $2 \leqslant 2$, $2 \leqslant 3$ y se leerá : «dos, anterior o igual a dos, dos anterior o igual a tres», respectivamente.

De orden parcial. — Sea el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, y la relación de divisibilidad $R = \{(11), (12), (13), (14), (15), (22), (24), (33), (44), (55)\}$.

Como podemos observar, existen elementos que no sabemos cuál de ellos es anterior a otro, por ejemplo el 2 y el 3, puesto que no hay ningún par (23) ó (32); igual ocurre con el (25), (35), (34), (45), lo único que sabemos es que el 1 es anterior a todos y que el 2 es anterior a 4. A este tipo de relaciones de orden, en las cuales existen parejas de elementos que no están relacionados entre sí, se les llama de *orden parcial*.

De orden total. — Por el contrario, cuando en un conjunto cualquiera, con una relación de orden, podemos siempre relacionar dos elementos del conjunto, cualesquiera que estos elementos sean, diremos que la relación así definida es de orden total.

Elementos máximo y mínimo en una relación de orden. — Consideremos el conjunto $S = \{a, b, c, d\}$, y en él la relación **1** «ser de más longitud que».



Como observamos,

$a < d$
$b < d$ Luego d es el 1.^{er} élemento del conjunto, llamado
$c < d$ *mínimo*.

Por otra parte, se verifica :

$$a < d$$
$$a < b$$
$$a < c.$$

A a le llamaremos elemento *máximo* del conjunto S, para la relación **1**.

Generalizando, diremos que un elemento m es el mínimo de un conjunto A, para una relación de orden R cualquiera, si se verifica que $\forall x \in A$, $x \leqslant m$. De la misma forma, diremos que M es el máximo de A si se verifica que $\forall x \in A$, $M \leqslant x$.

Números naturales

Postulados de Peano. — Los números naturales, como entes matemáticos utilizados no sólo en el desarrollo de las Matemáticas, sino como elementos de uso en la vida cotidiana del hombre, datan de los primeros tiempos históricos. Pero fue tan sólo en el siglo XIX cuando se abordó de una manera sistemática el estudio o estructura de ese conjunto. Dirichlet, Dedekind, Cantor y Peano, de manera independiente, estudiaron el conjunto. N. Peano, en 1899, enunció cinco postulados basados en las propiedades más sencillas y conocidas del conjunto de los naturales. Nosotros hemos escogido esa manera de introducir su estudio, conscientes de que el lector puede recurrir a otras formas de introducción basadas en la moderna Teoría de Conjuntos.

Supongamos un conjunto no vacío N, tal que se cumplan los siguientes postulados :

POSTULADO I : Existe un elemento llamado $1 \in N$.

POSTULADO II : Para cada elemento $a \in N$, existe un único elemento llamado siguiente de $a : a^* \in N$.

POSTULADO III : Para cada $a \in N$, se verifica que $a^* \neq 1$.

POSTULADO IV : Sean m, $n \in N$ tal que $m^* = n \implies m = n$.

POSTULADO V : Todo subconjunto C de N que verifica las dos propiedades siguientes :

a) $1 \in C$;
b) si $c \in C \implies c^* \in C$, es el mismo N.

Estos postulados (axiomas) están basados en propiedades bien conocidas de N. En efecto : el I y III quieren decir que existe un primer elemento que llamaremos 1. El II nos dice que el conjunto N tiene infinitos elementos. El IV dice que, si dos elementos de N tienen distintos «siguientes», los elementos son distintos. El V establece que partiendo del elemento 1 y aplicando el axioma II podemos alcanzar cualquier otro elemento de N.

Los elementos del conjunto N se llaman números naturales. Las operaciones sobre N se definen de manera que no necesitemos ningún aparato matemático exterior a estos cinco axiomas para conocer todas sus propiedades.

Principio de inducción. — Una proposición cualquiera es cierta para todo número natural superior a uno dado n_0, si se verifica :

1. Esa propiedad es cierta para un número natural concreto (en general el 1).
2. Supongamos que esa propiedad se verifica para un cierto $n \in N$, n cualquiera, y, además esto implica que se verifica para $n + 1$.

El principio de inducción es otra manera de enunciar el axioma V de Peano.

NOTA : La construcción de N, por medio de los axiomas de Peano, excluye el 0 como número natural, aunque otras definiciones lo incluyen como elemento de N. Nosotros, desde aquí en adelante, lo consideraremos como perteneciente a N; esta inclusión no quita generalidad a la estructura de N, sino que la enriquece con nuevas propiedades.

Adición en N. — Definimos la adición por :

1. $a + 1 = a^* \forall a \in N$.
2. $a + b^* = (a + b)^*$, siempre que esté definido $a + b$.

Con esta definición, la adición en N cumple las siguientes propiedades :

a) es una operación interna : $\forall m, n \in N, m + n \in N$;
b) asociatividad. $\forall a, b, c, \in N \implies (a + b) + c = a + (b + c)$;
c) conmutatividad. $\forall m$, $n \in N \implies m + n = n + m$;
d) cancelativa. Si $a + b = c + b \implies a = c$.

Estas cuatro propiedades pueden ser fácilmente demostradas recurriendo a la axiomática; por ejemplo, vamos a demostrar la *a*) y la *b*).

Propiedad *a*) : hemos de ver que $m + n \in N$, $\forall m$, $n \in N$.

Apliquemos el principio de inducción respecto de n :

i) La propiedad es cierta para $n = 1$, pues $m + 1$, $\in N$ por I y 1.

ii) Supongamos se verifica para $n = n_0$, o sea $m + n_0 \in N$. Como sabemos por I y 1., $\forall k \in N$

$\Longrightarrow \quad k^* \in N \quad \Longrightarrow \quad m + n_0 + 1 \in N$, pues $m + n_0 \in N$, como queríamos demostrar.

Propiedad $b)$: hemos de ver que $(a+b)+c = a+(b+c)$, demostración que haremos por recurrencia respecto de c.

$i)$ $(a+b)+1 = a+(b+1)$ pues $(a+b)+1 = (a+b)^*$; $a+(b+1) = a+b^*$, por 2.

$ii)$ Supongamos que $(a+b)+n_0 = a+(b+n_0)$. Entonces $(a+b)+(n_0+1) = (a+b)+n_0^*$, por 2.; $(a+b)+n_0^* = (a+b+n_0)^*$,
por otra parte, $a+(b+n_0)+1 = a+[(b+n_0)+1] = (a+b+n_0)^*$, c.q.d.

Producto en N. — Definimos el producto por :

3. $a \cdot 1 = a \quad \forall a \in N$.

4. $a \cdot b^* = a \cdot b + a$, siempre que $a \cdot b$ esté definido.

Propiedades :

$e)$ es una operación interna, pues $\forall m, n \in N \; m \cdot n \in N$;

$f)$ asociatividad : $\forall a, b, c \in N \Longrightarrow (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$;

$g)$ conmutatividad : $\forall a, b \in N \Longrightarrow a \cdot b = b \cdot a$;

$h)$ cancelativa : si $a \cdot b = c \cdot b \Longrightarrow a = c$.

Ambas operaciones, adición y multiplicación, están relacionadas por leyes distributivas :

$i)$ $\forall a, b, c \in N \Longrightarrow (a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$;

$j)$ $\forall a, b, c, N \Longrightarrow a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Todas las anteriores propiedades pueden ser demostradas con la ayuda de la axiomática de Peano, igual que las cuatro de la adición. Como ejemplo, vamos a demostrar la propiedad $j)$: $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$.

$i)$ Se verifica para $c = 1$, pues $a \cdot (b+1) = a \cdot b^* = a \cdot b + a$ por 4.; por otra parte, $a \cdot b + a \cdot 1 = a \cdot b + a$ por 3.

$ii)$ Supongamos que se verifica para $c = c_0$, y demostremos que se verifica para $c_0 + 1$. En efecto :

$$a \cdot (b + c_0) = a \cdot b + a \cdot c_0;$$

demostremos que :

$$a \cdot [b + (c_0 + 1)] = a \cdot b + a \cdot (c_0 + 1).$$

$a \cdot [b + (c_0 + 1)] = a \cdot [b + c_0^*]$, por 2., $a \cdot [b + c_0^*] = a \cdot [b + c_0^*] = a \cdot (b + c_0) + a = a \cdot b + a \cdot c_0 + a$.

Por otra parte, $a \cdot b + a \cdot (c_0 + 1) = a \cdot b + a \cdot c_0^* = a \cdot b + a \cdot c_0 + a$. Como vemos, ambas expresiones son idénticas, c.q.d.

Ordenación en N. — Supongamos el conjunto N ampliado con el número natural 0, que definimos de la siguiente manera : $a + 0 = a \; \forall a \in N$, y establezcamos en este nuevo conjunto ya ampliado la siguiente relación de orden :

$a \leq b \iff \exists r \in N / a + r = b$. Esta relación es de orden, pues cumple las tres propiedades :

1. *Reflexiva.* $a \leq a$, puesto que $\exists \, 0 \in N / a + 0 = a$.

2. *Antisimétrica.* Si $a \leq b \wedge b \leq a \Longrightarrow a = b$; en efecto :

$$\left.\begin{array}{l} a \leq b \Longrightarrow a + r = b \\ b \leq a \Longrightarrow b + p = a \end{array}\right\} b + p + r = b \Longrightarrow p + r = 0$$

$p = 0$ ó $r = 0$, como $a + r = b \Longrightarrow a + 0 = b \quad a = b$.

3. *Transitiva.* Si $a \leq b \wedge b \leq c \; a \leq c$.

$$\left.\begin{array}{l} a \leq b \Longrightarrow a = b + r \\ b \leq c \Longrightarrow b = c + q \end{array}\right\} a = c + q + r = c + (q + r) = c + m, \quad \text{donde} \quad m = q + r.$$

Ahora bien, si $a = c + m \iff a \leq c$, c.q.d.

En el conjunto N, podemos definir la relación « menor que » o « mayor que », a partir de la relación de orden definida anteriormente $\leq$.

Diremos que $a \leq b$ (a es menor o igual que b) $\iff a \leq b$.

3. — Estructuras algebraicas

Definición de operación interna. Propiedades de las operaciones internas. *Asociativa. Conmutativa. Elemento neutro. Elemento simétrico o inverso.* — **Noción de semigrupo :** Definición. Semigrupo de las longitudes. *Definición de segmento. Relación de equivalencia en* S. *Adición de longitudes.* — Homomorfismo entre semigrupos : Definición de homomorfismo. Epimorfismo, monomorfismo e isomorfismo. — **Grupos y subgrupos :** Concepto de grupo. — Números enteros : Definición de R. Operaciones en Z. *Adición. Propiedad uniforme.* Subgrupos de un grupo. Caracterización de los subgrupos. Grupos finitos y cíclicos. — Homomorfismos entre grupos. — **Permutaciones :** Definición. Producto de permutaciones. Notaciones. Transposiciones. Grupo de permutaciones. Clases laterales según un subgrupo. Primer teorema de isomorfía. Subgrupos de un grupo abeliano. Grupos cíclicos. — **Anillos :** Definición. Demostración. Subanillos. Homomorfismos entre anillos. Anillo cociente de un anillo por un ideal. Anillo Z de los enteros. *Isomorfismo entre* M *y* Z. *Sustracción. División.* — **Números congruentes y clases residuales :** Definición. Criterio fundamental de congruencia. Clases residuales módulo m o $Z/(m)$. Estructura algebraica de $Z/(m)$. *Divisores de cero en* $Z/(m)$. — **Restos potenciales :** Criterio general de divisibilidad. Otros criterios de divisibilidad. Relación de orden en el conjunto Z. Máximo común divisor de dos números. Mínimo común múltiplo de dos números. Determinación del M.C.D. de los números. Determinación del M.C.D. de varios números. Divisores simples y compuestos de un número. Suma de los divisores de un número. Producto de los divisores de un número. — **Ecuaciones diofánticas :** Ecuación general de la forma $Ax \pm By = C$. — **Cuerpos :** Subcuerpos. Ideales de un cuerpo. Homomorfismo entre cuerpos. Construcción algebraica de un cuerpo C a partir de un anillo conmutativo. Suma en $Ax(A - \{0\})/R$. Producto en $Ax(A - \{0\})/R$. El cuerpo Q de los racionales es ordenado. Inmersión de Z en Q. Fracciones irreducibles.

Definición de operación interna. — *Dado un conjunto* M *cualquiera y una aplicación de* $M \times M \xrightarrow{T} M$, *a dicha aplicación* T *se le llama operación interna en* M.

Ejemplo : sea N el conjunto de los números naturales y la definición de suma que todos conocemos; veamos si es una operación interna.

$$\begin{aligned} N \times N &\longrightarrow N \\ (a,b) &\longrightarrow a+b. \end{aligned}$$

Dicha correspondencia es una aplicación : *a*) pues el conjunto inicial coincide con el original, ya que se pueden sumar dos números cualesquiera; y *b*) la imagen de un elemento de N × N es única, pues la suma de los números es un número único perfectamente determinado.

Lo que nosotros conocemos como resta o diferencia de naturales no es una operación interna en N, puesto que, dados dos elementos cualesquiera de N, no siempre tienen imagen. Lo cual quiere decir que el conjunto inicial no coincide con el original o, lo que es lo mismo, la correspondencia resta no es una aplicación.

$$\begin{aligned} N \times N &\xrightarrow{(-)} N \\ (2,3) & \end{aligned}$$

Al (2, 3) le correspondería el elemento 2-3, que no es un número natural.

Propiedades de las operaciones internas. — *Asociativa.* — Consideremos el conjunto $M = \{a, b, c\}$ y la operación interna en él definida mediante la tabla siguiente :

*	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

Para operar *a* con *b*, buscamos *a* en las filas horizontales y después *b* en las columnas, trazando una línea horizontal y otra vertical hasta que se encuentren : lo hacen en la casilla que contiene una *b*, lo cual quiere decir que $a \star b = b$, igualmente obtendremos $c \star c = b$, $b \star b = c$, etc.

Veamos cuál es el resultado de operar $(a \star b) \star c = b \star c = a$. Por otra parte, $a \star (b \star c) = a \star a = a$. El resultado de componer estos tres elementos, de una manera u otra, ha sido el mismo. Para cualesquiera tres elementos que operásemos, siempre obtendríamos el mismo resultado : $(a \star a) \star b = a \star (a \star b)$, etc.

Generalizando : dado un conjunto A y una operación interna en él definida, diremos que esta operación es asociativa si se verifica : $\forall a, b, c \in A$, $(a \mathrm{T} b) \mathrm{T} c = a \mathrm{T} (b \mathrm{T} c)$.

Conmutativa. — Observando nuevamente la tabla anterior veremos que se verifica : $a \star b = b \star a$, $c \star b = b \star c$, etc.

Generalizando : dado un conjunto A y una operación interna en él definida, diremos que esta operación es conmutativa si se verifica : $\forall a, b \in A$, $a \cdot b = b \cdot a$.

Elemento neutro. — Fijémonos nuevamente en la tabla de los párrafos anteriores y observemos que cualquier elemento del conjunto M, operado con elemento *a*, nos da ese mismo elemento $a \star a = a$, $b \star a = b$, $c \star a = c$; este elemento *a*, que verifica la propiedad que operado con cualquier otro nos da este último, se llama elemento neutro para esta operación.

Elemento simétrico o inverso. — Recurriendo a la misma tabla, escojamos el elemento *a* y veamos cuál de los elementos de M operado con *a* nos da el elemento neutro (en este caso, el elemento neutro es el mismo elemento *a*). Veremos que $a \star a = a$. Diremos que *a* es el elemento inverso de sí mismo.

Para *b* el elemento inverso es el *c*, ya que $b \star c = a$.

Para *c* el elemento inverso es el *b*, ya que $c \star b = a$.

Generalizando : dado un conjunto A, con una operación interna respecto de la cual existe un elemento neutro *e*, diremos que el elemento inverso de uno dado cualquiera *m* es otro elemento de A, que representaremos por ahora como m^{-1} o $(-m)$, tal que se verifica $m \cdot m^{-1} = e$. La existencia de elemento simétrico, como vemos, se halla ligada a la de elemento neutro.

Noción de semigrupo

Definición. — El par formado por un conjunto S y una operación interna en él $\star$, $(S \star)$, tiene estructura de semigrupo si dicha operación es asociativa.

Ejemplo : los números naturales N con la operación ya definida (N +) tienen estructura de semigrupo conmutativo con elemento neutro. En efecto :

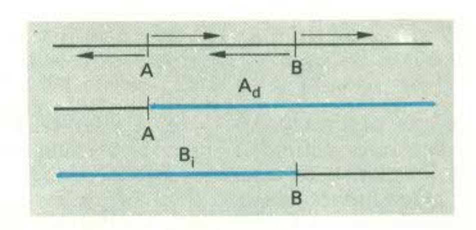
1. + es una *operación interna*.

2. Es *asociativa* puesto que $\forall a, b, c \in N$, se verifica que $(a+b)+c = a+(b+c)$.

3. Es *conmutativa* puesto que $\forall a, b \in N \implies a+b = b+a$.

4. *Elemento neutro,* que es el cero, puesto que $a + 0 = a$.

Semigrupo de las longitudes. — *Definición de segmento.* — Supongamos dada una recta *r* y dos puntos A, B, en ella, A y B cualesquiera A ≠ B. Cada uno de estos puntos determina dos semirrectas de sentidos contrarios y orígenes respectivos A y B. Consideremos de estas semirrectas aquellas que tienen origen en B y dirección hacia la izquierda, y la que tiene su origen en A y dirección hacia la derecha, que representaremos por B_i et A_d, respectivamente.



A la intersección $B_i \cap A_d$, le llamaremos por definición, segmento de extremos A y B. También lo podríamos definir como el conjunto de los puntos de la recta *r*, comprendidos entre el A y el B, ambos incluidos.

***Relación de equivalencia en* S.** — Sea S el conjunto de los segmentos obtenidos en el párrafo anterior, y establezcamos en S la siguiente relación :

Dos segmentos *a* y *b* están relacionados cuando, al transportar uno sobre el otro, coinciden.

Esta relación así definida es de equivalencia, pues cumple las tres propiedades reflexiva, simétrica y transitiva.

Reflexiva : todo segmento se puede transportar sobre sí mismo, coincidiendo.

Simétrica : si ***a*** se puede transportar sobre ***b***, ***b*** se puede transportar sobre ***a***.

Transitiva : si ***a*** se transporta sobre ***b*** y coinciden, y ***b*** se transporta sobre ***c*** y coinciden, entonces ***a*** y ***c*** pueden transportarse el uno sobre el otro, coincidiendo del mismo modo.

Esta relación R así definida, que es de equivalencia, crea un conjunto cociente S/R, formado por clases de equivalencia. ¿Qué serán cada una de estas clases de equivalencia? Según sabemos, una clase de equivalencia estará formada por un segmento ***a*** y todos los infinitos segmentos que transportados sobre ***a*** coincidan con él.

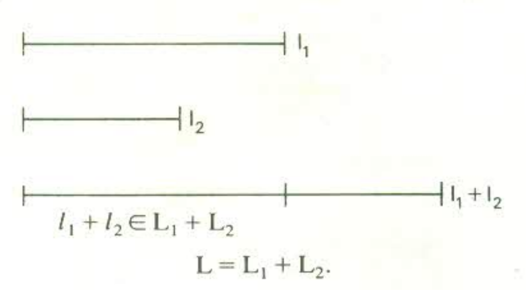
A cada una de estas clases de equivalencia la vamos a llamar *segmento general,* y al conjunto cociente S/R, *conjunto de los segmentos generales.*

Observemos que un segmento general es un ente matemático abstracto formado por todos los infinitos segmentos relacionados (equivalentes) a uno dado. Si queremos materializar uno de estos segmentos generales, lo que hacemos en la práctica es escoger uno de los infinitos componentes que llamaremos un *representante* de la clase en cuestión.

DEFINICIÓN. — *Llamaremos longitud a cada una de las clases de equivalencia antes definidas, y al conjunto* S/R, *semigrupo de las longitudes.*

Adición de longitudes. — Sean S/R y dos longitudes cualesquiera $L_1, L_2 \in S/R$. Para hallar la suma de L_1 y L_2, escojamos primeramente dos representantes l_1 y l_2 de L_1 y L_2, respectivamente. Ambos representantes l_1 y l_2 son dos segmentos, que podemos unir en sus extremos, uno a continuación del otro, obteniendo el segmento $l_1 + l_2$.

El nuevo segmento $l_1 + l_2$ es un elemento de S, por lo tanto formará parte con otros infinitos segmentos a él equivalentes de una cierta clase de equivalencia que llamaremos L. Esta L es, precisamente, la suma de L_1 y L_2 :



$l_1 + l_2 \in L_1 + L_2$

$$L = L_1 + L_2.$$

PROPIEDADES DE LA ADICIÓN. — 1. *Uniforme.* La suma de longitudes antes definida la hemos obtenido mediante el recurso de acudir a un representante de cada longitud y sumarlos. ¿Qué hubiera pasado si en vez de escoger esos dos representantes l_1 y l_2 hubiésemos escogido otros, por ejemplo p_1 y p_2 (por supuesto que $l_1, p_1 \in L_1$, $l_2, p_2 \in L_2$).

La propiedad uniforme nos dice que el resultado es el mismo, o sea, que la operación no depende de los representantes elegidos.

2. *Asociativa.* También se verifica inmediatamente que, dadas tres longitudes cualesquiera L_1, L_2, L_3, $(L_1 + L_2) + L_3 = L_1 + (L_2 + L_3)$.

De las dos propiedades anteriores deducimos que las longitudes S/R, con la operación interna adición, poseen estructura de semigrupo conmutativo.

Homomorfismo entre semigrupos

Definición de homomorfismo. — Un homomorfismo de un semigrupo (S, T) en un semigrupo (G ⋆) es una aplicación $\theta : S \longrightarrow G$ que verifica :

$$\theta(a \mathrm{T} b) = \theta(a) \star \theta(b) \quad \forall a, b \in S.$$

Ejemplo : la aplicación $\theta : N \longrightarrow N$, definida así $\theta(n) = 3n$, $\forall n \in N$, es un homomorfismo, puesto que $\theta(a+b) = \theta(a) + \theta(b)$.

En efecto, $\theta(a+b) = 3(a+b) = 3a + 3b$
$\theta(a) + \theta(b) = 3a + 3b$,
como queríamos demostrar.

Epimorfismo, monomorfismo e isomorfismo. — Vamos a definir tres tipos especiales de homomorfismos entre semigrupos.

Epimorfismo es una aplicación sobreyectiva del semigrupo S en el G.

Monomorfismo es una aplicación inyectiva del semigrupo S en el G.

Isomorfismo es una aplicación biyectiva del semigrupo S en el G.

Grupos y subgrupos

Concepto de grupo. — El par formado por un conjunto G y una operación interna (G ∘) se dice que tiene estructura de grupo si se verifican las siguientes propiedades :

G_1, *asociativa :* $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c) \forall a, b, c \in G$.

G_2, *elemento neutro :* $\exists\, e \in G / a \circ e = a, \forall a \in G$.

G_3, *elemento simétrico :* $\forall a \in G, \exists\, a' \in G / a \cdot a' = e$.

El elemento inverso de a, a', se escribe a^{-1} en notación multiplicativa y $(-a)$ con notación aditiva.

Además, puede verificarse la propiedad :

G_4 *conmutativa :* $\forall a, b \in G \Longrightarrow a + b = b + a$.

En el caso de verificarse G_4, el grupo se denomina *abeliano* o *conmutativo.*

Debido a la extraordinaria importancia que la estructura de grupo ha adquirido en todos los campos de las Matemáticas y la Física, y las aplicaciones en la Biología, Economía, Química, Medicina, etc., nos vamos a detener de forma especial en el estudio de esta estructura.

Ejemplo 1.º : sea el conjunto {1, 2} y la operación + definida mediante la siguiente tabla de composición :

+	1	2
1	1	2
2	2	1

Comprobar que dicho conjunto con la operación definida en él tiene estructura de grupo abeliano.

G_1, *asociatividad :* $(1+1)+1 = 1+(1+1)$, pues $(1+1)+1 = 1+1 = 1$. Por otra parte, $1+(1+1) = 1+1 = 1$. $(1+1)+2 = 1+(1+2)$, pues $(1+1)+2 = 1+2 = 2$
$1+(1+2) = 1+2 = 2$, etc.

G_2, *elemento neutro :* $1+1 = 1$, $2+1 = 2$, luego 1, es el elemento neutro.

G_3, *elemento simétrico :* el 1, tiene como simétrico a sí mismo, pues $1+1 = 1$; el 2, tiene, como simétrico a sí mismo, pues $2+2 = 1$.

G_4, *conmutatividad :* $1+1 = 1+1$, $1+2 = 2+1$, $2+2 = 2+2$.

Ejemplo 2.º : sea $G = \{0, 1, 2, 3\}$ y definamos la siguiente operación interna :

$$m \circ n = m + n \quad \forall m, n / m + n < 4$$
$$m \circ m = s \quad \text{si} \quad m + n = 4 + s,\ 0 \leq s < 4.$$

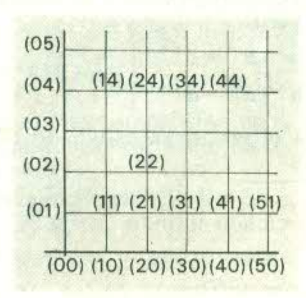
Según esta definición, la tabla de grupo sería :

o	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Es inmediato comprobar en la tabla adjunta las cuatro propiedades características de un grupo abeliano.

Números enteros

Sea el conjunto N de los naturales, $N = \{0, 1, 2, \ldots\}$ y formemos el producto cartesiano $N \times N$, que en un diagrama cartesiano vendría representado de la siguiente manera.



En este nuevo conjunto, vamos a establecer una relación binaria R entre sus elementos.

Definición de R. — $(a, b)\,R\,(c, d) \iff a + d = b + c$, donde + es la suma usual de naturales.

La relación así definida es de equivalencia :

Reflexiva. $(ab)\,R\,(ab)$ puesto que $a + b = b + a$, por la propiedad conmutativa de la adición de N.

Simétrica. Si $(ab)\,R\,(cd) \Longrightarrow (cd)\,R\,(ab)$. En efecto, si $(ab)\,R\,(cd) \Longrightarrow a + d = b + c$. Para que $(cd)\,R\,(ab)$, se necesita que $c + b = d + a$. Pero sabemos que $c + b = b + c$, $d + a = a + d \Longrightarrow b + c = a + d$, resultado antes obtenido, c.q.d.

Transitiva. Si $(ab)\,R\,(cd) \wedge (cd)\,R\,(ef) \Longrightarrow (ab)\,R\,(ef)$.

Hipótesis

$$(ab)\,R\,(cd) \iff a + d = b + c$$
$$(cd)\,R\,(ef) \iff c + f = d + e$$

Tesis

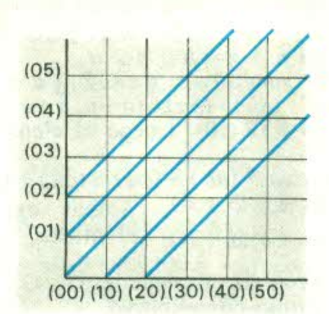
$$(ab)\,R\,(ef) \iff a + f = b + e$$

Sabemos que :

$a + d = b + c$
$c + f = d + e$ Sumando ambas expresiones obtenemos

$$a + d + c + f = b + c + d + f$$
$$\iff a + f + (d + c) = b + e + (c + d)$$
$$\Longrightarrow a + f = b + e.$$

Esta relación nos introduce una clasificación en el conjunto $N \times N$. Cada clase de equivalencia está constituida por los infinitos pares de $N \times N$ que están unidos por cada diagonal en el diagrama adjunto :



En efecto $(00)\,R\,(44)$, pues $0 + 4 = 4 + 0$, $(13)\,R\,(68)$, pues $1 + 8 = 3 + 6$, etc.

Cada clase de equivalencia recibe el nombre de número *entero*, y el conjunto cociente $N \times N/R$ se denomina *conjunto de los números enteros,* que representaremos por Z.

Por comodidad, cada clase la vamos a representar por medio de algunos guarismos fáciles de recordar, así :

La clase $\{(00), (11), (22), \ldots\}$ la representaremos por 0.

La clase $\{(10), (21), (32), \ldots\}$ la representaremos por $+1$.

.
.
.

La clase $\{(n\,0), (n + 1, 1) \ldots (n + p, p) \ldots\}$ la representaremos por $+n$.

Clases que reciben el nombre de números enteros positivos Z^+.

Igualmente a las clases :

$\{(01), (12), (23), \ldots\}$ la representaremos por -1
$\{(02), (13), (24), \ldots\}$ la representaremos por -2.

.
.
.

$\{(0n), (1, n + 1) \ldots (p, n + p) \ldots\}$ la representaremos por $-n$.

Clases que reciben el nombre de números enteros negativos Z^-.

Operaciones en Z. — *Adición*. — Definimos

$$(ab) + (cd) = (a + c,\ b + d).$$

La adición así definida es una verdadera operación, pues no depende de los representantes elegidos.

***Propiedad uniforme*.** — Escojamos otros representantes $(a'b')$, $(c'd')$ tal que $(a'b')\,R\,(ab)$, $(c'd')\,R\,(cd)$, y veamos que el resultado de la suma no depende de esta elección. En efecto : $(a'b') + (c'd') = (a' + c',\ b' + d')$.

Por otra parte, si $(ab)\,R\,(a'b') \Longrightarrow a + b' = b + a'$
$(cd)\,R\,(c'd') \Longrightarrow c + d' = d + c'$.

Sumando ambas igualdades, encontramos :

$$a + b' + c + d' = b + a' + d + c'. \qquad [A]$$

Ahora bien, para que $(a' + c',\ b' + d')\,R\,(a + c,\ b + d)$, es necesario que $a' + c' + b + d = b' + d' + a + c$, cosa que hemos demostrado en la igualdad [A].

G_1, *asociativa :*

$[(ab) + (cd)] + (ef) = (ab) + [(cd) + (ef)]$.

En efecto,

$$[(ab) + (cd)] + (ef) =$$
$$(a + c,\ b + d) + (ef) = (a + c + e,\ b + d + f) \qquad [B]$$

$$(ab) + [(cd) + (ef)] =$$
$$(ab) + (c + e,\ d + f) = (a + c + e,\ b + d + f) \qquad [C]$$

[B] y [C] son idénticas, luego queda demostrada G_1.

G_2, *elemento neutro* : $\exists\, 0 \in Z / a + 0 = a,\ \forall a \in Z$.

En efecto, $(00) + (ab) = (0 + a,\ 0 + b) = (ab)$. En general, $(nn) + (ab) = (a + n,\ b + n)$, pero $(a + n,\ b + n)\ R\,(ab)$ pues $a + n + b = b + n + a$.

G_3, *elemento simétrico* : $\forall a \in Z, \exists\, a' \in Z / a + a' = 0$.

En efecto, $(ab) + (ba) = (a + b,\ b + a) = (a + b,\ a + b)$ pero $(a + b,\ a + b)\ R\,(00)$. Luego el elemento simétrico de (ab) es (ba).

G_4, *conmutativa* : $(ab) + (cd) = (cd) + (ab)$.

$(ab) + (cd) = (a + c,\ b + d)$
$(cd) + (ab) = (c + a,\ d + b)$ Ambas expresiones son idénticas.

El par $(Z +)$ con las propiedades G_1, G_2, G_3 y G_4 tiene estructura de grupo conmutativo.

Más adelante definiremos una nueva operación en Z, el producto, con lo cual la estructura de Z se completa pasando de grupo a *anillo conmutativo* con elemento unidad.

Subgrupos de un grupo. — Sea $(G\,\cdot)$ un grupo cualquiera y G' un subconjunto no vacío de G. Diremos que G' es un subgrupo de G, si (G') posee estructura de grupo, o, lo que es lo mismo, si se verifican :

i) $\forall a, b \in G',\ a \cdot b \in G'$.

G_1 : $\forall a, b, c \in G' \implies (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

G_2 : $\exists\, e \in G' / a \cdot e = a,\ \forall a \in G'$.

G_3 : $\forall a \in G', \exists\, a^{-1} \in G' / a \cdot a^{-1} = e$.

De la definición anterior podemos deducir consecuencias inmediatas como :

a) si G es conmutativo, entonces G' lo es también;

b) el elemento neutro de G y G' es el mismo;

c) el elemento simétrico $\forall a \in G'$ es el mismo en G y G';

d) *e*, considerado como subconjunto, o sea $\{e\}$ es un subgrupo;

e) G, también es un subgrupo de sí mismo;

f) los subgrupos $\{e\}$ y $\{G\}$ se llaman subgrupos *impropios*; todos los demás subgrupos de un grupo distintos de $\{e\}$ y $\{G\}$ se denominan subgrupos *propios*. Ejemplo : sea el conjunto $\{+1, -1, i, -i\}$ con la siguiente tabla de grupo :

•	+1	−1	+i	−i
+1	+1	−1	+i	−i
−1	−1	+1	−i	+i
+i	+i	−i	−1	+1
−i	−i	+i	+1	+1

El subconjunto $G' = \{1, -1\}$, con la operación definida por la tabla, es un grupo y, por lo tanto, un subgrupo de G.

•	+1	−1
+1	+1	−1
−1	−1	+1

Caracterización de los subgrupos. — Sea $G' \subset G$ un subconjunto no vacío de G; decir que G' es un subgrupo de G $\iff \forall a, b \in G',\ a \cdot b^{-1} \in G' \forall a, b \in G'$.

Demostración : veamos que se verifica la implicación en el sentido $\implies$: si $a, b \in G'$, y G' es un subgrupo, $\implies b^{-1} \in G'$, por G_3; ahora bien, por i), $a \cdot b^{-1} \in G'$, como queríamos demostrar.

Implicación en el sentido $\impliedby$: si se verifica que $\forall a, b \in G'$, $a, b^{-1} \in G'$, veamos que G' es un subgrupo.

En efecto, G_1 : asociativa. Se cumple, puesto que al ser $a, b, c \in G'$ elementos de G, se verifica que $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (n \cdot c)$; como la operación es la misma en G que en G' la anterior relación se cumple.

G_2) Si $a, b \in G' \implies a \cdot b^{-1} \in G'$, podemos hacer $b = a \implies a \cdot a^{-1} \in G' \implies e \in G'$.

G_3) Si $a \in G'$, como $e \in G' \implies e \cdot a^{-1} \in G'$, pero $e \cdot a^{-1} = a^{-1} \implies a^{-1} \in G'$.

i) Es una operación interna en G'. En efecto, si $a, b \in G' \implies a^{-1} \in G'$, como $b \cdot (a^{-1})^{-1} \in G' \implies b \cdot a \in G'$.

Grupos finitos y cíclicos. — Un grupo se llama finito si tiene un número finito de elementos. Ejemplo : el conjunto $G = \{1, -1, i, -i\}$, con la operación ya definida.

Se dice que el grupo G es cíclico,

si $\exists\, a \in G / \forall m \in G \implies$

$$m = a^n,\ n \in Z,\ a^n = \overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a}^{n \text{ veces}},$$

donde $\cdot$ es la operación en G.

TEOREMA. — Todo grupo cíclico es abeliano. En efecto, $\forall m, n \in G$, se verifica :

$$\left.\begin{aligned} m \cdot n &= a^t \cdot a^s = a^{t+s} \\ n \cdot m &= a^s \cdot a^t = a^{s+t} \end{aligned}\right\} \text{Pero } a^{t+s} = a^{s+t}.$$

Ejemplo : sea el grupo ya estudiado $(Z +)$: $\forall a \in Z$,

$a = \overbrace{1 + 1 + 1 + \ldots + 1}^{a \text{ veces}} = a \cdot 1$, luego 1 es el elemento generador del grupo cíclico infinito $(Z +)$.

Homomorfismos entre grupos

Dados dos grupos, G y G', y una aplicación f : G $\longrightarrow$ G', se dice que es un homomorfismo si se verifica :

$$f(a \star b) = f(a) \circ f(b), \quad \forall a, b \in G,$$

donde $\star$ y $\circ$ son las operaciones en G y G' respectivamente.

Igual que definíamos para los semigrupos, los homomorfismos entre grupos los podemos clasificar en epimorfismos, monomorfismos e isomorfismos.

Los homomorfismos de un grupo en sí mismo se denominan endomorfismos de G; si son isomorfismos, a los endomorfismos les llamaremos automorfismos de G.

DEFINICIÓN. — Sea $f : (G +) \longrightarrow (G' +)$, llamaremos núcleo de f ó $\mathrm{Ker}(f) = \{x \in G / f(x) = e'\}$, donde e' es el elemento neutro de G' para la operación $+$.

TEOREMA. — Sea f un homomorfismo de G $\longrightarrow$ G'. f es homomorfismo inyectivo $\iff \mathrm{Ker}(f) = 0$.

a) Veamos que, si f es inyectivo, $\implies \mathrm{Ker} f = 0$. En efecto, supongamos $\exists\, x \in G,\ x \neq 0 / f(x) = 0$. Entonces tendríamos que $f(x) = f(0)$ por ser f inyectiva, $x = 0$.

b) Veamos que, si se cumple que $\mathrm{Ker} f = 0 \implies$, f es homomorfismo inyectivo : supongamos que $f(x) = f(x')$, $f(x) - f(x') = 0$, $f(x - x') = 0$. Al ser $\mathrm{Ker} f = 0$, $x - x' = 0$, $x = x'$.

DEFINICIÓN. — Supongamos el homomorfismo f anterior, llamaremos $\mathrm{Im}(f) = \{x' \in G' / x' = f(x),\ x \in G\}$.

TEOREMA. — Dado el homomorfismo $f : (G +) \longrightarrow (G' +)$, sean e y e' los elementos neutros de G y G' respectivamente. Entonces $f(e) = e'$.

DEMOSTRACIÓN. — Por definición, $f(a+e)=f(a)+f(e)$; por otra parte, $a+e=a \Longrightarrow f(a+e)=f(a)$, luego $f(a)+f(e)=f(a) \Longrightarrow f(e)=e'$, c.q.d.

TEOREMA. — $[f(a)]^{-1}=f(a^{-1})$, $\forall a \in G$.
Sabemos que $a \cdot a^{-1}=e \in G \Longrightarrow$ por el teorema anterior que $f(a \cdot a^{-1})=f(e)=e'$, pero $f(a \cdot a^{-1})=f(a) \cdot f(a^{-1})=e' \Longrightarrow f(a^{-1})$ y $f(a)$, son inversos $\Longrightarrow f(a^{-1})=[f(a)]^{-1}$.

TEOREMA. — $\mathrm{Im}(f) \subset G'$ es un subgrupo de G'.
Hemos de ver que $\forall x,\ y \in \mathrm{Im}(f) \Longrightarrow x \cdot y^{-1} \in \mathrm{Im}(f)$.
Si $x \in \mathrm{Im}(f) \Longrightarrow \exists\, a \in G/f(a)=x$. Si $y \in \mathrm{Im}(f) \Longrightarrow \exists\, b \in G/f(b)=y$; pero por el teorema anterior y por $G_2 \Longrightarrow \exists\, b^{-1} \in G/f(b^{-1})=[f(b)]^{-1}=y^{-1}$; ahora bien, como G es un grupo, $\Longrightarrow a \cdot b^{-1} \in G \Longrightarrow f(a \cdot b^{-1}) \in \mathrm{Im} f$, pero $f(a \cdot b^{-1})=f(a) \cdot f(b^{-1})=x \cdot y^{-1} \in \mathrm{Im} f$, como queríamos demostrar.

TEOREMA. — En un grupo cualquiera G, el elemento inverso de e es e mismo, puesto que $e \cdot e=e$.

TEOREMA. — $\mathrm{Ker} f$ es un subgrupo de G.
Hemos de ver que $\forall x\ \ y \in \mathrm{Ker} f \Longrightarrow x \cdot y^{-1} \in \mathrm{Ker} f$; para ello, vamos a ver antes que, dado $a \in \mathrm{Ker} f \Longrightarrow a^{-1} \in \mathrm{Ker} f$. En efecto, $a \in \mathrm{Ker} f \Longrightarrow f(a)=e'$, pero $f(e)=e' \Longrightarrow f(a) \cdot f(a^{-1})=e' \Longrightarrow e' \cdot f(a^{-1})=e' \Longrightarrow f(a^{-1})=e'$.
Para ver que $x \cdot y^{-1} \in \mathrm{Ker} f$, hemos de comprobar que
$f(x \cdot y^{-1})=e'$,
$f(x \cdot y^{-1})=f(x) \cdot f(y^{-1})=e' \cdot e'=e'$.

Ejemplo : sea el homomorfismo de $(Z \cdot) \longrightarrow (Z \cdot)$, donde $\cdot$ es la multiplicación usual en Z :
$a \longrightarrow f(a)=a^2$
$\mathrm{Im} f=\{1^2, (-1)^2, 2^2, (-2)^2 \ldots\}=\{1, 4, 9, 16 \ldots\}$
$\mathrm{Ker} f=\{x \in Z/f(x)=1\}=\{1, -1\}$. Como sabemos, $\{1, -1\}$ constituye un subgrupo propio del grupo abeliano $(Z \cdot)$.

Permutaciones

Definición. — Debido a la riqueza de ejemplos y a su utilización posterior en Teoría de Matrices, vamos a estudiar las *permutaciones* de un conjunto finito cualquiera.

Observemos inicialmente que un conjunto A de un número finito de elementos puede ordenarse perfectamente estableciendo una biyección de $N \longrightarrow A$, asignando a cada $n \in N$ un elemento cualquiera y único de A. De esta manera, podemos escribir A en la forma $A=\{a_1, a_2, \ldots a_n\}$.

Observemos que no quitamos generalidad al estudio del conjunto A si, en vez de denotar los elementos como $a_1 \ldots a_i \ldots a_n$, lo hacemos únicamente con sus subíndices $1, 2, \ldots n$. Estudiemos ahora el conjunto S_n de las $n!$ permutaciones que podemos formar con los elementos $1, 2, \ldots n$.

Una permutación cualquiera α de dicho conjunto S_n la podemos escribir mediante la siguiente notación :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \ldots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

que no es más que la ordenación $\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n$, $\alpha_i \in Z$.

Otra permutación β la denotamos con :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \beta_1 & \beta_2 & \ldots & \beta_n \end{pmatrix},$$

que no es más que la ordenación $\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_n$.

Observemos que tanto α como β las podemos considerar como aplicaciones del conjunto $S=\{1, 2, \ldots n\} \subset N$ en sí mismo o, lo que es igual, de $A \longrightarrow A$, $A=\{a_1 \ldots a_n\}$. La aplicación α antes mencionada es por ejemplo la :

$$\begin{array}{lcl} \alpha : S & \longrightarrow & S \\ 1 & \longrightarrow & \alpha_1 \\ 2 & \longrightarrow & \alpha_2 \\ \vdots & & \\ n & \longrightarrow & \alpha_n. \end{array}$$

Ejemplo : la aplicación $\alpha=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ de $S_4=\{1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\}$ en sí mismo hace corresponder a

$$\begin{array}{lcl} 1 & \longrightarrow & 4 \\ 2 & \longrightarrow & 3 \\ 3 & \longrightarrow & 2 \\ 4 & \longrightarrow & 1. \end{array}$$

Producto de permutaciones. — Vamos a establecer una operación interna $\circ$ en el conjunto S_n de las permutaciones de S. Dadas dos permutaciones cualesquiera $\alpha=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \end{pmatrix}$ y $\beta=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \beta_1 & \beta_2 & \ldots & \beta_n \end{pmatrix}$, definimos el producto $\alpha \circ \beta$ como una nueva permutación obtenida haciendo operar α y β en ese orden.

Ejemplo : sean $\alpha=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $\beta=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

$\alpha \circ \beta=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $\quad \beta \circ \alpha=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Como hemos podido observar en el ejemplo anterior, el producto de permutaciones no es conmutativo, pues $\alpha \circ \beta \neq \beta \circ \alpha$.

Notaciones. — Por comodidad en el trabajo, es muy utilizada otra notación (conjuntamente con la arriba expuesta), que denominaremos notación cíclica. Expliquémosla mediante ejemplos :

sean $\alpha=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $\beta=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$,
que escribiremos en notación cíclica como $\alpha=(1\ \ 2\ \ 3)$, $\beta=(1\ \ 4\ \ 2)$. Que significa para α que el elemento 1 se corresponde con el 2, el 2 con el 3 y finalmente el 3 con el 1. Para β el 1 con el 4, el 4 con el 2 y el 2 con el 1. Los elementos que no aparecen en el ciclo (el 4 en α y el 3 en β) quieren decir que se corresponden consigo mismos.

La permutación $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ que deja invariable $S=\{1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\}$ se llama permutación unidad y se representa por (1).

El producto de cualquier permutación por (1) es dicha permutación, como es inmediato comprobar.

Transposiciones. — Se llama transposición a una permutación que deja invariable todos los elementos de S excepto dos. Ejemplo : la $(1\ \ 2)$ o la $(2\ \ 3)$ que también podemos escribir por $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ respectivamente..

Notemos que la permutación $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ la escribiremos en notación cíclica como $(1\ \ 2) \circ (3\ \ 4)$, que realmente quiere decir que es el producto de las transposiciones $(1\ \ 2) \circ (3\ \ 4)$. Este resultado general nos dice que toda permutación la podemos escribir como producto de transposiciones, aunque dicho producto no es único.

Ejemplo : sea $S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y la permutación $(2\ 3\ 4\ 5)$. Dicha permutación la podemos escribir como $(2\ 3\ 4\ 5)=(2\ 3)\circ(2\ 4)\circ(2\ 5)=$
$(2\ 5)\circ(3\ 4)\circ(3\ 5)$.

Una permutación se llama PAR *si se puede escribir como producto de un número par de transposiciones, e* IMPAR *si se puede escribir como producto de un número impar de transposiciones.*

Grupo de permutaciones. — El conjunto S_n de las $n!$ permutaciones es un grupo respecto de la operación $\circ$ ya definida.

i) Es una operación interna.
G_1) Es asociativa.
G_2) Existe elemento neutro.
G_3) Para cada $\alpha \in S_n$, $\exists\, \alpha^{-1}/\alpha \circ \alpha^{-1}=(1)$.

No tiene la propiedad conmutativa.

Sea la permutación $\gamma \in S_4$, $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, hallemos γ^{-1}; como podemos comprobar fácilmente $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ es tal que $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1)$.

A S_n con la estructura de grupo se le denomina grupo simétrico de n, y a cualquier subgrupo de S_n, grupo de permutaciones de n.

Ejemplo : S_4 consta de las siguientes permutaciones :

$S_4=\{(1), (12), (13), (14), (23), (24), (34), (123), (132), (124), (142), (134), (143), (234), (243), (1234), (13)\circ(24), (1432), (1243), (14)\circ(23), (1324), (1423), (1342), (12)\circ(34)\}$.

Algunos subgrupos de S_4 son por ejemplo :

$\{(1)\}$, $\{S_4\}$, $\{(1)(123)(132)\}$.

Clases laterales según un subgrupo. — Sea G un grupo y $G' \subset G$ un subgrupo de G. Sea $x \in G$, x cualquiera.

Llamaremos *clase a la derecha según* G′ engendrada por x al subconjunto $G'x \subset G$ definido por : $G'x=\{g'\cdot x, \forall g' \in G'\}$. Idénticamente se define la *clase a la izquierda* por : $xG'=\{x\cdot g', \forall x \in G\}$, siendo $\cdot$ la operación en G.

Ejemplo : sea el subgrupo de S_4 : $G'=\{(1), (12)\}$ y fijemos $x=(132)\in S_4$. Hallemos xG' y $G'x$.

$xG'=\{(1)\circ(132), (12)\circ(132)\}=\{(132), (23)\}$
$G'x=\{(132)\circ(1), (132)\circ(12)\}=\{(132), (13)\}$.

Al conjunto de todas las clases laterales de G según G′ se le representa por G/G′, y a las de la izquierda por G′/G.

DEFINICIÓN. — *Un subgrupo* $G' \subset G$, *que posee la propiedad de que* $xG'=G'x$, $\forall x \in G$, *se denomina* subgrupo *normal* o *invariante*.

DEFINICIÓN. — Dado $G' \subset G$, G′ normal, definimos en G/G′ una operación del siguiente modo : $xG'\cdot yG'=(x\cdot y)G'$. De igual manera, si G′ es un subgrupo del grupo aditivo G, definimos la adición de las clases laterales del modo siguiente : $(x+G')+(y+G')=(x+y)+G'$.

PROPOSICIÓN. — El conjunto G/G′, donde G′ es normal, con la operación definida anteriormente $(x+G')+(y+G')=(x+y)+G'$, tiene estructura de grupo.

DEMOSTRACIÓN. — 1. Es inmediato comprobar que la operación así definida es una aplicación o, lo que es lo mismo, que la adición es uniforme, ya que se trata de un conjunto de clases. En efecto, hemos de ver que si $(x+G')+(y+G')=(x+y)+G'$, escogiendo otros representantes de la misma clase $x'+G'$, $y'+G'$, se verifica que $(x'+y')+G'$ es la misma clase que $(x+y)+G'$.

Si $x+G'=x'+G' \iff x-x'\in G'$, sea $h\in G'/x-x'=h \implies x=h+x'$. Si $y+G'=y'+G' \iff y-y'\in G'$, sea $h'\in G'$ tal que $y-y'=h' \implies y=h'+y'$. Sustituyendo estos valores encontrados para x e y, en la expresión $(x+G')+(y+G')=(x+y)+G'$, encontramos :

$$h+x'+h'+y'+G'=x'+y'+h'+h+G'$$
$$=x'+y'+(h+h'+G')=x'+y'+G',$$

con lo cual hemos visto que $(x+y)+G'=(x'+y')+G'$.

2. *Asociativa*. $[(x+G')+(y+G')]+(z+G')$
$=(x+G')[(y+G')+(z+G')]$.

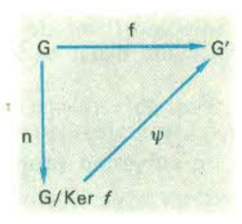
3. *Elemento neutro*. Es la clase $0+G'=G'$. En efecto, $x+G'+(0+G')=(x+0)+G'=x+G'$.

4. *Elemento simétrico*. El elemento simétrico de la clase $x+G'$ es la clase $-x+G'$, donde $-x$ es el elemento inverso de x (en notación aditiva), pues $x+G'(-x+G')=[x+(-x)]+G'=0+G'=G'$.

Primer teorema de isomorfía. — Consideremos un grupo G y un homomorfismo $f: G \longrightarrow G'$.

Para este homomorfismo tenemos definido Ker$f$, y sabemos que Ker$f$ es un subgrupo normal de G, por tanto existe G/Ker$f$ cuyos elementos son las clases adjuntas.

TEOREMA. — Entre G/Ker$f$ y G′, existe una aplicación ψ que es inyectiva; además se cumple que, si f es sobre, ψ también es sobre, y, si f no lo es, tampoco lo es ψ.



Definamos la aplicación ψ : sea $x+\text{Ker}f \in G/\text{Ker}f$, hacemos $\psi(x+\text{Ker}f)=f(x)$. Donde $x+\text{Ker}f=n(x)$, siendo n el epimorfismo canónico.

Veamos que ψ es homomorfismo, o sea que

$$\psi[(x+\text{Ker}f)+(y+\text{Ker}f)]=\psi[(x+\text{Ker}f)] + \psi[(y+\text{Ker}f)].$$

Por definición el primer miembro de la anterior relación es igual a $\psi[(x+\text{Ker}f)+(y+\text{Ker}f)]=f[x+y]$, con lo cual, al ser f homomorfismo, queda : $f(x+y)=f(x)+f(y)$.

El segundo miembro de la relación es $\psi[(x+\text{Ker}f)] + \psi[(y+\text{Ker}f)]=f(x)+f(y)$. Como vemos ambos miembros son iguales, como queríamos demostrar.

Es un homomorfismo inyectivo; una condición necesaria y suficiente para que esto se verifique es que $\text{Ker}\,\psi=0$. Sabemos que

$$\text{Ker}\,\psi=\{x+\text{Ker}f/\psi(x+\text{Ker}f)=0\}.$$

Ahora bien, si $\psi(x+\text{Ker}f)=f(x)=0 \implies f(x)=0 \implies x\in\text{Ker}f \implies x+\text{Ker}f=\text{Ker}f$, pero $\text{Ker}f=0+\text{Ker}f$ que es la clase neutra.

Veamos finalmente que, si f es sobre, también lo es ψ. En efecto, si f es sobre $\implies \forall x'\in G'$, $x'=f(x) \implies \exists\,(x+\text{Ker}f)$ y además $\psi(x+\text{Ker}f)=x'$.

DEFINICIÓN. — Sean G y G′ dos grupos aditivos. Llamaremos Hom(GG′) al conjunto de todos los homomorfismos de G en G′. En este conjunto Hom(GG′), vamos a definir una operación interna (la suma) de la siguiente manera.

Dados $f, g \in \text{Hom}(G, G')$, $f+g$ es tal que $(f+g)(x) = f(x) + g(x) \forall x \in G$.

PROPOSICIÓN. — Hom (GG') tiene estructura de grupo abeliano respecto de dicha operación suma.

1. Si G' es abeliano, $f+g$ es homomorfismo, puesto que : $(f+g)(x+y) = (f+g)(x) + (f+g)(y) = f(x) + g(x) + f(y) + g(y) = (f+g)(x) + (f+g)(y)$.

2. *Asociativa*. Es inmediata.

3. *Elemento neutro*. Es la aplicación 0, que hace corresponder a todo elemento $x \in G$ el elemento $0 \in G'$, $0(x) = 0$.

4. *Elemento simétrico*. Dada la aplicación f, llamaremos elemento simétrico de dicha aplicación a otra $-f$ tal que $\forall x \in G$, $(-f)(x) = -[f(x)]$.

Subgrupos de un grupo abeliano. — Dados dos subgrupos H_1 y H_2 de un grupo abeliano G, llamaremos *intersección* de dichos subgrupos al conjunto $H_1 \cap H_2$, considerada la operación $\cap$ como conjuntista.

TEOREMA. — La intersección $H_1 \cap H_2$, H_1, $H_2 \subset G$, G grupo es un subgrupo $\subset G$.

Hemos de ver para ello que $\forall x, y \in H_1 \cap H_2 \Longrightarrow x - y \in H_1 \cap H_2$. En efecto, si $x, y \in H_1 \cap H_2$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x, y \in H_1 \\ x, y \in H_2 \end{cases} \text{por ser ambos subgrupos}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x - y \in H_1 \\ x - y \in H_2 \end{cases} \Longrightarrow x - y \in H_1 \cap H_2.$$

DEFINICIÓN. — Dados H_1 y H_2 subgrupos del grupo G, llamaremos suma de H_1 y H_2 al conjunto de todos los elementos $x \in G$, que pueden obtenerse como suma de un elemento $h_1 \in H_1$ y de un elemento $h_2 \in H_2 \iff x = h_1 + h_2$.

TEOREMA. — $H_1 + H_2$ es un subgrupo de G.

Hemos de ver que $\forall x, y \in H_1 + H_2 \Longrightarrow x - y \in H_1 + H_2$. En efecto,

$$\left.\begin{array}{l} \text{si } x \in H_1 + H_2 \Longrightarrow x = x_1 + x_2, x_1 \in H_1, x_2 \in H_2 \\ \text{si } y \in H_1 + H_2 \Longrightarrow y = y_1 + y_2, y_1 \in H_1, y_2 \in H_2 \end{array}\right\}$$

$x - y = x_1 + x_2 - y_1 - y_2 = (x_1 - y_1) + (x_2 - y_2)$, pero $(x_1 - y_1) \in H_1$, y $x_2 - y_2 \in H_2$; llamando a $x_1 - y_1 = z_1$, y a $x_2 - y_2 = z_2$, tenemos finalmente $x - y = z_1 - z_2$, $z_1 \in H_1$, $z_2 \in H_2 \Longrightarrow x - y \in H_1 + H_2$.

DEFINICIÓN. — Un grupo G tal que todo elemento $x \in G$ se pueda poner en la forma $x = \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \ldots + \alpha_n g_n$, $\alpha_i \in Z$, $\forall i$, $g_i \in G$, n finito, se llama grupo de tipo finito, y a los elementos $g_1 g_2 g_3 \ldots g_n$, generadores de dicho grupo.

Grupos cíclicos. — Dado un grupo G aditivo o multiplicativo, y un elemento $x \in G$, llamaremos orden de x al menor entero n que verifica $x^n = 0$ ó $x^n = 1$ (en notación aditiva o multiplicativa respectivamente).

En el caso de que no exista n tal que $x^n = 0$, diremos que el orden de x es infinito.

Un grupo G es cíclico si cualquier elemento del mismo x puede obtenerse como potencia de un cierto elemento a del mismo. O sea $x \in G$, $x = a^n$, $a \in G$.

El elemento a se denomina generador del grupo.

EJERCICIOS. — 1. Sea G un grupo abeliano formado por los enteros de $\{1, 2, 3, 4\}$ con la operación de grupo módulo cinco multiplicativa. Demostrar que G es cíclico encontrando su generador y el orden del mismo.

La tabla del grupo es como sabemos (ver anillo Z de los enteros y clases residuales) :

•	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

Analicemos ahora, elemento por elemento, si pueden ser generadores :

$$2^0 = 1 \ldots 2^1 = 2 \ldots 2^2 = 4 \ldots 2^3 = 3 \ldots 2^4 = 1 \ldots$$

Como vemos el 2 es el elemento generador ya que $2^4 = 1$, además su orden es 4.

2. Demostrar que el conjunto (a) de los múltiplos de un entero a es un subgrupo de Z.

Para ello hemos de ver que $\forall x, y \in (a) \Longrightarrow x - y \in (a)$. Si $x \in (a) \Longrightarrow x = k_1 \cdot a$, si $y \in (a) \Longrightarrow y = k_2 \cdot a \Longrightarrow x - y = (k_1 - k_2) \cdot a = k_3 a \in (a)$, como queríamos demostrar.

3. Demostrar con las notaciones del ejercicio anterior que $(a) \cap (b) = (m)$, donde m es el mínimo común múltiplo de a y b. Para demostrar lo anterior, hemos de ver que $(a) \cap (b) \subset (m)$ y que $(m) \subset (a) \cap (b)$.

i) $(a) \cap (b) \subset (m)$. Sea $x \in (a) \cap (b)$ $x = k_1 \cdot a$, $x = k_2 \cdot b$, o sea, x es múltiplo de a y de b, luego es múltiplo del m.c.m. (ab), o sea $x \in (m)$.

ii) Si $x \in (m) \Longrightarrow x = k_1 \cdot m$, luego x es múltiplo de a y de $b \Longrightarrow x \in (a), x \in (b) \Longrightarrow x \in (a) \cap (b)$, como queríamos demostrar.

NOTA. — La nomenclatura $(a) \cap (b)$ representa la intersección de los conjuntos.

Anillos

Definición. — La terna $(A, +, \cdot)$, formada por un conjunto no vacío A y dos operaciones internas en A, +, · (suma y producto), se dice que es un anillo si se verifican las siguientes propiedades :

A_1. $(a + b) + c = a + (b + c)$
A_2. $\exists 0 \in A / a + 0 = a, \quad \forall a \in A$
A_3. $\forall a \in A, \quad \exists (-a) \in A / a + (-a) = 0$
A_4. $a + b = b + a, \quad \forall a, b \in A$
A_5. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c), \quad \forall a, b, c \in A$
A_6. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \quad \forall a, b, c \in A$
A_7. $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a, \quad \forall a, b, c \in A$.

Estas siete propiedades nos dicen que (A +) es un grupo abeliano, que (A ·) es un semigrupo y que la operación · es distributiva a ambos lados respecto de la operación +.

Ejemplo : el conjunto Z, antes definido como $Z = N \times N/R$, donde R venía definida por $(a, b) R (c, d) \iff a + d = b + c$, es un anillo para las operaciones + y ·.

$$(ab) + (cd) = (a + c, b + d)$$

$$(ab) \cdot (cd) = (ac + bd, ad + bc).$$

Demostración. — Al estudiar los grupos ya vimos que (Z +) era un grupo abeliano, nos queda pues por comprobar las propiedades A_5, A_6, y A_7.

Propiedad uniforme para $\cdot$. Es inmediato que se verifica.

A_5. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, $\forall a, b, c \in Z$.

En efecto, sean los representantes $(z_1 z_2)$ $(x_1 x_2)$ $(y_1 y_2)$, de las clases a, b, c, respectivamente; sabemos que

$$(a \cdot b) \cdot c = [(z_1 z_2) \cdot (x_1 x_2)] \cdot y_1 y_2 = (z_1 x_1 + z_2 x_2, z_1 x_2 + z_2 x_1) \cdot y_1 y_2 = (z_1 x_1 y_1 + z_2 x_2 y_1 + z_1 x_2 y_2 + z_2 x_1 y_2, z_1 x_1 y_2 + z_2 x_2 y_2 + z_1 x_2 y_1 + z_2 x_1 y_1) = [M].$$

Por otra parte, $a \cdot (b \cdot c) = (z_1 z_2) \cdot [(x_1 x_2) \cdot (y_1 y_2)] = (z_1 z_2) \cdot (x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2, x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1) =$

$$(z_1 x_1 y_1 + z_1 x_2 y_2 + z_2 x_1 y_2 + z_2 x_2 y_1, z_1 x_1 y_2 + z_1 x_2 y_1 + z_2 x_1 y_1 + z_2 x_2 y_2) = [N].$$

De las igualdades de [M] y [N], nos resulta la certeza de la propiedad.

A_6 y A_7 son inmediatas en su demostración.

Con tales propiedades $(Z, +, \cdot)$ tiene estructura de anillo. Además Z verifica alguna otra propiedad muy importante para nosotros :

a) Existencia del elemento unidad para la multiplicación : $\forall a \in Z$, $\exists\, 1 / 1 \cdot a = a$, donde $1 \in Z$,

$$1 = \{(1\,0), (2\,1), (3\,2) \ldots (n+1, n)\}\cdot$$

En efecto, sea $(x_1 x_2)$ un representante de a : $(x_1 x_2) \cdot (1 0) = (x_1 + 0 \cdot x_2, x_2 + x_1 \cdot 0) = (x_1 x_2)$, c.q.d.

b) La multiplicación es conmutativa $a \cdot b = b \cdot a$, $\forall a, b \in Z$.

Con las propiedades $A_1 A_2 \ldots A_7$, *a*), *b*), diremos que $(Z, +, \cdot)$ es un anillo conmutativo con elemento unidad.

Subanillos. — Sea un anillo A y una parte S no vacía de A. Diremos que éste es un *subanillo* de A si verifica las propiedades $A_1 \ldots A_7$ respecto de las operaciones de A.

Dado que A es un grupo aditivo abeliano, entonces S ha de ser un subgrupo del grupo aditivo de A.

Los subanillos {0} y {A} se llaman *impropios;* otros subanillos de A, si los hubiere, se llaman *propios*.

Ejemplo : consideremos el conjunto $A = \{a, b, c, d\}$ y las tablas de composición siguientes para las operaciones + y $\cdot$

+	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

•	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	b	a	b
c	a	c	a	c
d	a	d	a	d

Los únicos subanillos propios de A son $\{a, b\}$, $\{ac\}$, $\{ad\}$, como podemos comprobar formando las tablas de composición :

+	a	b
a	a	b
b	b	a

•	a	b
a	a	a
b	b	b

Exactamente igual que hicimos para los subgrupos, vamos a dar, aunque sea sin demostración, una condición necesaria y suficiente para conocer si un subconjunto cualquiera S de un anillo A es un subanillo.

TEOREMA. — *Sea* $S \subset A$, *A anillo* $S \neq \emptyset$.
S subanillo $\Longleftrightarrow$ $\forall x, y \in S$ se verifica que $x - y \in S$, $x \cdot y \in S$, $y \cdot x \in S$.

Homomorfismos entre anillos. — Dados dos anillos A y A', y una aplicación $f : A \longrightarrow A'$, diremos que f es un homomorfismo si y sólo si :

1. $f(a + b) = f(a) + f(b)$, $\forall a, b \in A$.
2. $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$.

Ejemplo : la aplicación $f : Z \longrightarrow Z$, definida por $f(a) = 2 \cdot a$, $\forall a \in Z$, no es un homomorfismo, sin embargo, la aplicación identidad $f(a) = a$ sí lo es.

En efecto, se habrá de verificar para la aplicación $f(a) = 2 \cdot a$ que $f(a + b) = f(a) + f(b)$; $f(a + b) = 2 \cdot (a + b)$; $f(a) + f(b) = 2 \cdot a + 2 \cdot b$. Ambas expresiones son iguales; por otra parte $f(a \cdot b) = 2 \cdot a \cdot b$ y $f(a) \cdot f(b) = 2 \cdot a \cdot 2 \cdot b = 4 \cdot a \cdot b$.

Como podemos comprobar, no se verifica la condición de que $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$; luego concluimos que f no es un homomorfismo.

Sin embargo, la aplicación $f(a) = a$ sí que verifica dos condiciones, 1) y 2). $f(a + b) = a + b$ y $f(a) + f(b) = a + b$ y $f(a \cdot b) = a \cdot b$; $f(a) \cdot f(b) = a \cdot b$.

DEFINICIONES. — Llamaremos imagen del homomorfismo $f : A \longrightarrow A'$ y lo representaremos por $\mathrm{Im}(f) = \{x' \in A' / x' = f(x), x \in A\}$. Llamaremos núcleo del homomorfismo f y lo representaremos por $\mathrm{Ker} f = \{x \in A / f(x) = 0\}\cdot$

TEOREMA. — Si f es un homomorfismo, imagen de f es un subanillo de A'.

En efecto, si $x', y' \in A'$, $x' = f(x)$, $y' = f(y)$; $x' - y' = f(x) - f(y) = f(x - y) \in \mathrm{Im}(f)$. Por otra parte, $\forall x', y' \in A'$, $x' \cdot y' = f(x) \cdot f(y) = f(x \cdot y) \in \mathrm{Im}(f)$, luego $\mathrm{Im}(f)$ es un subanillo.

DEFINICIÓN. — Se llama *ideal bilátero* de un anillo a todo subconjunto $I \subset A$ tal que se verifican las condiciones siguientes :

1. $\forall x, y \in I \Longrightarrow x - y \in I$.
2. $\forall x \in I$, $\forall a \in A \Longrightarrow x \cdot a \in I$, $a \cdot x \in I$.

TEOREMA. — Sea $f : A \longrightarrow A'$, f homomorfismo $\Longrightarrow$ $\mathrm{Ker} f$ es un ideal de A.

En efecto, hemos de ver que $\forall x, y \in \mathrm{Ker} f \Longrightarrow x - y \in \mathrm{Ker} f$ y $x \cdot a \in \mathrm{Ker} f$, $a \cdot x \in \mathrm{Ker} f$.

Si $x, y \in \mathrm{Ker} f \Longrightarrow f(x) = f(y) = 0$, $f(x - y) = f(x) - f(y) = 0 - 0 = 0 \Longrightarrow x - y \in \mathrm{Ker} f$.

Si $x \in \mathrm{Ker} f$, $a \in A \Longrightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} f(a \cdot x) = f(a) \cdot f(x) = \\ f(a) \cdot 0 = 0 \\ f(x \cdot a) = f(x) \cdot f(a) = \\ 0 \cdot f(a) = 0. \end{array}\right\} \text{c.q.d.}$$

DEFINICIÓN. — Sea A un anillo cualquiera y $a \in A$; diremos que a es divisor de 0 cuando se verifique :

1. $a \neq 0$.
2. $\exists$ otro elemento $b \neq 0$, $b \in A / a \cdot b = b \cdot a = 0$.

DEFINICIÓN. — Un elemento $a \in A$ se llama nilpotente, si existe un $n \in N$ tal que $a^n = 0$.

DEFINICIÓN. — Un elemento $a \in A$ se llama idempotente, si se verifica que $a^2 = a$.

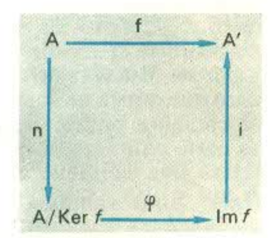
Ejemplo : en el anillo de restos correspondiente al módulo 6, $3^2 = 3$.

Anillo cociente de un anillo por un ideal. — Sea un anillo cualquiera A e I un ideal, $I \subset A$.

Definamos en A la relación $x R y \Longleftrightarrow x - y \in I$; esta relación así definida es de equivalencia. El conjunto cociente que representaremos por A/I es un anillo, si definimos en él las siguientes operaciones internas :

1. Suma : $(x + I) + (y + I) = x + y + I$.
2. Producto : $(x + I) \cdot (y + I) = x \cdot y + I$.

TEOREMA DE ISOMORFÍA. — Un homomorfismo $f : A \longrightarrow A'$ puede descomponerse del siguiente modo :



donde n es el epimorfismo natural : $n(x) = x + \text{Ker} f$; φ una biyección : $\varphi(x + \text{Ker} f) = f(x)$; y finalmente i es una inyección, $i(x') = x'$, $\forall x' \in \text{Im}(f)$.

Dejamos sin demostrar el teorema por ser análoga su demostración a la ya hecha para grupos.

DEFINICIÓN. — Un anillo A es *entero, cuando no posee divisores de* 0.

DEFINICIÓN. — Un ideal $I \subset A$ *se llama primo cuando* A/I *es entero.*

DEFINICIÓN. — Dados dos ideales I e $I' \subset A$, donde A es un anillo conmutativo, llamamos $I + I' = \{x + y, x \in I, y \in I'\}$.

La suma así definida es una operación interna para los ideales, o sea, la suma de los ideales de A es un ideal de A. Sean en efecto m y $n \in I + I'$, sabemos que

$$m = x + x', \; x \in I, \; x' \in I', \; n = y + y', \; y \in I, \; y' \in I', \; m - n = (x + x') - (y + y') = x + x' - y - y' = (x - y) + (x' - y'),$$

dado que $x - y \in I$, $x' - y' \in I' \Longrightarrow m - n \in I + I'$.

Por otra parte, $m \cdot n = (x + x') \cdot n = x \cdot n + x' \cdot n$, como $x \in I$, $n \in A \Longrightarrow x \cdot n \in I$, igualmente $x' \cdot n \in I' \Longrightarrow x \cdot n + x' \cdot n \in I + I'$.

MÁXIMO COMÚN DIVISOR. — Sean (m) y (n) dos ideales de Z. El conjunto $(m) + (n)$ es otro ideal de Z. Al número entero D que verifica que $(m) + (n) = (D)$ se le llama máximo común divisor de m y n.

MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO. — Dados dos ideales I e I', llamaremos intersección $I \cap I'$ a la operación conjuntista entre ellos.

Esta operación así definida es una operación interna en el conjunto de los ideales de un anillo o, lo que es lo mismo, *la intersección de dos ideales es otro ideal.*

Dados dos ideales de Z, (m) y (n), el ideal $(m) \cap (n) = (M)$ de Z es engendrado por el número M, que llamaremos mínimo común múltiplo de m y n.

Anillo Z de los enteros. — *Isomorfismo entre* N y Z^+. — Entre los conjuntos N y Z^+ podemos establecer una correspondencia biunívoca de la manera siguiente :

$$N \xrightarrow{\varphi} Z^+$$
$$p \longrightarrow \varphi(p) = +p.$$

Como podemos de inmediato comprobar, φ es aplicación y además es un homomorfismo, puesto que $\varphi(p_1 + p_2) = +(p_1 + p_2) = +p_1 + p_2$. Y $\varphi(p_1) + \varphi(p_2) = +p_1 + (p_2) \Longrightarrow \varphi(p_1 + p_2) = \varphi(p_1) + \varphi(p_2)$.

$$\left.\begin{array}{l} \varphi(p_1 \cdot p_2) = +(p_1 \cdot p_2) \\ \varphi(p_1) \cdot \varphi(p_2) = (+p_1) \cdot (+p_2) = +(p_1 \cdot p_2) \end{array}\right\} \varphi(p_1 \cdot p_2) = \varphi(p_1) \cdot \varphi(p_2).$$

El isomorfismo φ nos autoriza a identificar el conjunto N con Z^+. Esto que hacemos no es nuevo en Matemáticas, y recurriremos varias veces, a lo largo de la obra, a considerar como idénticos a conjuntos que sean isomorfos.

Sustracción. — En el conjunto N de los naturales no nos era posible resolver ecuaciones de la forma $a + x = b$, $b < a$, puesto que no tiene sentido escribir $b - a$ cuando $b < a$. En Z, sí es posible resolver esta operación. En efecto, sea la ecuación $+3 + x = +1$, que es idéntica a través del isomorfismo φ ya definido a la ecuación $3 + x = 1$.

No olvidemos que $+3$ es una clase de equivalencia, igual que $+1$ y que x.

$$+3 = \{(3\ 0), (4\ 1), (5\ 2), \ldots\}$$
$$+1 = \{(1\ 0), (2\ 1), (3\ 2), \ldots\}.$$

La ecuación es la : $3 + x = 1$. Dado que Z es un grupo aditivo $\exists -3/3 + (-3) = 0$. Sumando -3 a los dos miembros de la ecuación tenemos : $+3 + x + (-3) = 1 + (-3)$; $(+3) + (-3) + x = 1 + (-3) \cdot \Longrightarrow x = 1 + (-3)$.

Sumemos $1 + (-3)$:

$(1\ 0) + (0\ 3) = (1\ 3) \Longrightarrow \{(1\ 3), \quad (2\ 4), \quad \ldots\} = -2 \Longrightarrow x = -2$.

En este ejemplo hemos hecho la operación $1 + (-3)$, que es una suma. Usualmente se acostumbra a escribir $+1 - 3 = 2$ y entonces consideramos la sustracción de $a - b \iff a + (-b)$.

División. — La ecuación en N : $a \cdot x = b$, vimos que, en general, no tenía solución en N, y que sólo era posible conocer x cuando b era múltiplo de a.

Tampoco esta ecuación tiene solución en Z, aunque, al igual que en N, definiremos una división entera a través de la igualdad $a = b \cdot c + r \cdot$, $r < b$.

La ventaja de la división en Z sobre la división en N es que podemos introducir dividendos y divisores negativos. Además, podemos enunciar las propiedades siguientes de dicha operación : 1) todo número n primo no tiene más divisores que $+n$, $-n$, $+1$ y -1; 2) multiplicando el dividendo y el divisor de una división por un mismo número $k \in Z$, el cociente no varía, aunque el resto queda multiplicado por dicho número. Esta segunda propiedad es inmediata si operamos en la expresión $D = d \cdot c + r$; $D \cdot k = (d \cdot k) \cdot c + r \cdot k$.

Números congruentes y clases residuales

Definición. — Dados dos números $a, b \in Z$, se llaman congruentes respecto de un módulo m cuando, al dividirlos por él, dan el mismo resto. Es decir :

$$\begin{array}{cccc} a & \underline{|m} & b & \underline{|m} \\ r_1 & c_1 & r_1 & c_2 \end{array}$$
$$0 \leq r_1 < m.$$

Simbólicamente, esta relación la expresamos : $a \equiv b$ (mód. m).

La relación así definida *(congruencia)* es de equivalencia, pues : 1. $a \equiv a$ (mód. m); 2. si $a \equiv b \Longrightarrow b \equiv a$ (mód. m); y 3. si $a \equiv b$ y $b \equiv c \Longrightarrow a \equiv c$ (mód. m).

De esta manera, el conjunto Z queda clasificado, estando formada cada clase de equivalencia por todos los enteros que al dividirlos por m dan el mismo resto.

Ejemplo : hallemos Z/(mód. 4).

Haciendo divisiones sucesivas para investigar cuáles números son congruentes respecto al módulo 4, encontramos :

Clase 0 = {0, 4, 8, 12, ...}.	Clase 2 = {2, 6, 10, 14, ...}.
Clase 1 = {1, 5, 9, 13, ...}.	Clase 3 = {3, 7, 11, 15, ...}.

A las clases así obtenidas las llamaremos *clases residuales módulo* 4.

Señalaremos por su importancia que Z/mód. (2) = Z/(2) está formada por dos clases, una de ellas en la que están todos los números pares, y en otra todos los impares.

Criterio fundamental de congruencia. — $a \equiv b$ (mód. m) $\iff a - b = \dot{m}$.

En efecto, demostremos la implicación en el sentido $\Longrightarrow$.

Si $a \equiv b$ (mód. m) $= \begin{cases} a = c_1 \cdot m + r_1 \\ b = c_2 \cdot m + r_1 \end{cases} \Longrightarrow a - b = m \cdot (c_1 - c_2) = k \cdot m = \dot{m} \Longleftarrow$ Si $a - b = \dot{m}$, $a = b + \dot{m}$; como $b = m \cdot c_2 + r_1 \Longrightarrow a = m \cdot c_2 + r_1 + \dot{m} = \dot{m} + r_1$. O sea, ambas dan el mismo resto al dividirlos por $m \iff a \equiv b$.

PROPIEDADES. — 1. Si $a \in Z$ es primo con m, todo número $b \in Z$, congruente con a (mód. m), es también primo con m.

2. Si se multiplican los dos miembros de una congruencia por un mismo número, así como el módulo, resulta otra congruencia. $a \equiv b$ (mód. m) $\iff a - b = \dot{m} \iff a \cdot k - b \cdot k = \dot{\overline{m \cdot k}}$; $a \cdot k - b \cdot k = \dot{\overline{m \cdot k}} \iff a \cdot k \equiv b \cdot k$ (mód. $m \cdot k$).

3. De la misma manera, si se dividen los dos miembros de una congruencia y el módulo por un mismo número, resulta otra congruencia.

4. Si se suman miembro a miembro vàrias congruencias respecto al mismo módulo m, resulta otra congruencia respecto a dicho módulo.

$$\left.\begin{array}{l} a_1 \equiv b_1 (\text{mód. } m) \\ a_2 \equiv b_2 (\text{mód. } m) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \equiv b_n (\text{mód. } m) \end{array}\right\} \Longrightarrow a_i - b_i = \dot{m} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a_1 = b_1 + \dot{m} \\ a_2 = b_2 + \dot{m} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n = b_n + \dot{m} \end{array}\right.$$

Sumando :

$$\Sigma a_i = \Sigma b_i + \dot{m} \Longrightarrow \Sigma a_i - \Sigma b_i = \dot{m} \iff \Sigma a_i \equiv \Sigma b_i \ (\text{mód. } m).$$

5. Si se multiplican miembro a miembro varias congruencias respecto al mismo módulo m, resulta otra congruencia respecto al mismo módulo. En efecto, sabemos que $a_i = b_i + \dot{m} \Longrightarrow a_1 \cdot a_2 = b_1 \cdot b_2 + b_1 \cdot \dot{m} + b_2 \cdot \dot{m} = b_1 \cdot b_2 + \dot{m} \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 + \dot{m} \ldots$ y $a_1 \cdot a_2 \ldots a_n = b_1 \ldots b_2 + \dot{m} \iff a_1 \cdot a_2 \ldots a_n \equiv b_1 \cdot b_2 \ldots b_n$ (mód. m).

Como caso particular de esta propiedad cuando $a_i = a \ \forall i$, y $b_i = b \ \forall i$, $\Longrightarrow a^n \equiv b^n$ (mód. m).

6. Si dos números a y b son congruentes respecto de varios módulos $m_1, m_2, \ldots m_n \cdot$, son entonces congruentes respecto del m.c.m. $(m_1, m_2, \ldots m_n \cdot) = M$

$$\left.\begin{array}{l} a \equiv b \ (\text{mód. } m_1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a \equiv b \ (\text{mód. } m_n) \end{array}\right| \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} a = b + \dot{m}_1 \\ \\ \\ \\ \cdot \\ a = b + \dot{m}_n \end{array}\right\} \Longrightarrow a - b = \dot{M}$$

Clases residuales módulo *m* ó *Z*/(*m*). — Hemos visto que la clasificación que en Z nos hacía la relación de congruencia mód. m, las clases de equivalencia estaban formadas por todos los números que divididos por m nos daban el mismo resto r. ¿Cuántas de estas clases habrá? Tantas como restos posibles al dividir la serie entera 0, 1, 2, 3, etc. ... n ..., por m. Estos restos serán : 0, 1, 2, ... $m - 2$, $m - 1$. Puesto que nunca un resto puede ser mayor que m, ya que el cociente podría hacerse una unidad mayor y el resto se haría entonces 0, el número, pues, de clases es m. La clase que contiene el número 0 será : $\{0, m, 2m, 3m, \ldots km, \ldots\}$ que vamos a representar por $\bar{0}$. De forma análoga $\{1, m+1, 2m+1, \ldots\} = \bar{1}$ y Z/(m) = $\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \ldots \overline{(m-1)}\}$.

Estructura algebraica de Z/(*m*) — Antes de definir unas operaciones internas en Z/(m), vamos a recordar que una clase la podemos representar por uno cualquiera de sus representantes con una raya trazada encima de él. Por ejemplo : En Z/(4), podemos escribir indistintamente $\bar{0} = \bar{4}$ y $\bar{1} = \bar{5}$, aunque se acostumbra siempre representar las clases mediante sus representantes canónicos, que son aquellos números a_i tales que $a_i < m$.

DEFINICIÓN DE SUMA. — En Z/(m), definimos : $\bar{a} + \bar{b} = \overline{a + b}$. La suma así definida posee estas propiedades :

1. *Asociativa.* $(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c})$.
2. *Conmutativa.* $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$.
3. *Elemento neutro.* $\bar{a} + \bar{0} = \bar{a}$.
4. *Elemento simétrico.* $\forall \bar{a}, \exists \overline{a'} / \bar{a} + \overline{a'} = \bar{0}$.

Como ejemplo de demostración, vamos a hacer 4.

Sea la clase $\bar{a}$, sabemos que existe la clase $\overline{m - a}$, y, además : $\bar{a} + \overline{m - a} = \overline{a + m - a} = \bar{m} = \bar{0}$, c.q.d.

La tabla de sumar para Z/(4) es :

+	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$

PRODUCTO. — En Z/(m), definimos $\bar{a} \cdot \bar{b} = \overline{a \cdot b}$.

Propiedades : 1. *asociativa* ; 2. *conmutativa* ; y 3. *elemento neutro* : $\bar{a} \cdot \bar{1} = \bar{a}$.

Además, propiedad *distributiva* del producto respecto de la suma : D. $\bar{a} \cdot (\bar{b} + \bar{c}) = \overline{a \cdot b} + \overline{a \cdot c} = \overline{a \cdot b + a \cdot c}$.

Con estas propiedades, el conjunto [Z/(m), + , $\cdot$] posee estructura de anillo conmutativo con elemento unidad.

La tabla de multiplicar para Z/(4) es :

•	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Divisores de cero en Z/(m). — Hemos visto que $Z/(m)$ es un anillo, nos interesa ver si tiene o no divisores de cero. Distinguiremos dos casos :

1. m es primo. Si $\bar{a}$ fuese divisor de $\bar{0} \Longrightarrow \exists\, \bar{b} \neq \bar{0} / \bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{0} \Longrightarrow a \cdot b = \dot{m} \Longrightarrow m/a$*, ó m/b, como m es primo, ha de ser necesariamente $a = 0$ ó $b = 0$.

2. m no es primo. Si esto ocurre, m admite al menos una descomposición factorial $m = a \cdot b \Longrightarrow \bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{m} = \bar{0}$, $\bar{a} \neq \bar{0}$, $\bar{b} \neq \bar{0} \Longrightarrow \bar{a}$ y $\bar{b}$ son divisores de 0.

Ejemplo : en $Z/(6)$, $\bar{2} \cdot \bar{3} = \bar{3} \cdot \bar{2} = 0$.

En resumen, podemos decir que, si m es primo, el anillo $Z/(m)$ no posee divisores de 0.

* m/a significa que m divide a a.

Restos potenciales

Sea un número natural $N \in \mathrm{N}$ y sus potencias sucesivas : $N^0, N^1, N^2, \ldots, N^k, \ldots$; dividamos esta sucesión de potencias por un mismo número m, que tomaremos como módulo de una congruencia. De esa manera, obtenemos una sucesión de restos : $r_0, r_1, \ldots, r_k, \ldots$

La obtención de esta sucesión de restos es inmediata, si tenemos en cuenta las propiedades antes enunciadas de las congruencias :

$$\begin{array}{l} N^i \equiv r_i \,(\text{mód. } m) \\ N \equiv r_1 \,(\text{mód. } m) \\ \hline N^{i+1} \equiv r_i \cdot r_1. \end{array}$$

De la misma manera que para las clases residuales módulo m, los distintos restos que pueden aparecer $r_0, r_1, \ldots, r_k, \ldots$ han de ser menores que m. Luego el número máximo de restos potenciales es también m.

Criterio general de divisibilidad. — Sea el número $N_{|B} = a_r a_{r-1}, \ldots, a_2 a_1 a_0 = a_0 + a_1 B + \ldots a_r B^r$. Hallemos los restos potenciales mód. m :

$$\begin{array}{lll} B^0 \equiv 1 & (\text{mód. } m) \\ B^1 \equiv r_1 & (\text{mód. } m) \\ \vdots & \\ B^{K-1} \equiv r_{K-1} & (\text{mód. } m) \\ \vdots & \\ B^K \equiv r_K & (\text{mód. } m). \end{array}$$

Multiplicando cada congruencia $B^i \equiv r_i$ por a_i y sumando miembro a miembro todas las congruencias $a_i B^i \equiv a_i r_i$, obtenemos :

$$\begin{array}{l} a_0 B^0 \equiv a_0 \cdot 1 \\ a_1 B^1 \equiv a_1 \cdot r_1 \\ a_2 B^2 \equiv a_2 \cdot r_2 \\ \vdots \\ a_{r-1} B^{r-1} \equiv a_{r-1} \cdot r_{r-1} \\ a^r B^r \equiv a^r \cdot r_r \\ \hline a_0 B^0 + \ldots + a_r B^r \equiv a_0 + a_1 \cdot r_1 + \ldots + a_r r_r. \end{array}$$

En el caso de que $N_{|B}$ sea divisible por m, el resto de la división ha de ser 0, o de otra manera, $N_{|B} \equiv 0$ (mód. m).

Ahora bien, como $N_{|B} \equiv a_0 + \ldots + a_r r_r$, resulta que la condición necesaria y suficiente para que $N_{|B}$ sea divisible por m es que sea divisible por m la expresión $a_0 + a_1 \cdot r_1 + \ldots + a_r \cdot r_r$.

Ejemplo : obtener el criterio de divisibilidad por 3 en el sistema decimal.

Las diversas potencias de 10, son :

$$10^0 \quad 10^1 \quad 10^2 \quad 10^3 \quad \ldots$$

Los restos de la división por 3 de dichas potencias son :

$$r_0 = 1 \quad r_1 = 1 \quad r_2 = 1 \quad \ldots \quad r_n = 1.$$

Luego, para que $a_k, \ldots, a_1, a_0$, sea divisible por 3, es necesario y suficiente que el polinomio numérico $a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot 1 + \ldots + a_k \cdot 1$ sea múltiplo de 3, lo que podemos enunciar diciendo « Un número $a_k, a_{k-1}, \ldots, a_1, a_0$ es divisible por 3 cuando la suma de sus cifras sea 3 ó un múltiplo de 3 ».

A veces, es conveniente sustituir alguno de estos restos por defecto, por los correspondientes restos por exceso, anteponiendo entonces el signo menos (–).

Ejemplo : el criterio de divisibilidad por 11, en base 10, sería :

Potencias	10^0	10^1	10^2	10^3
Restos	1	– 1	1	– 1, puesto que

$$1 \,\underline{|11} \quad 10 \,\underline{|11} \quad 100 \,\underline{|11} \quad 1000 \,\underline{|11}$$
$$1 \quad 0 \qquad -1 \quad 1 \qquad 1 \quad 9 \qquad 10 \quad 91$$
$$-1$$

y el número $a_k, \ldots, a_1, a_0$, será divisible por 11, cuando $a_0 - a_1 + a_2 - a_3, \ldots, \pm a_k$ fuese múltiplo de 11. Este criterio es el que hemos acostumbrado enunciar diciendo : « Un número es divisible por 11, en el sistema de base 10, cuando la diferencia entre las cifras que ocupan los lugares par e impar sea igual a 0, a 11 ó a un múltiplo de 11.

Otros criterios de divisibilidad. — A continuación enunciamos los criterios de divisibilidad más usados en la práctica :

1. Criterio de divisibilidad por 2 :

Potencias	10^0	10^1	10^2	10^3
Restos	1	0	0	0

$a_k, \ldots, a_1, a_0$ · será divisible por dos, cuando $a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot 0 + \ldots + a_2 \cdot 0 = a$, sea divisible por dos $\Longleftrightarrow$ Cuando el número tenga su última cifra par.

2. Criterio de divisibilidad por 3 :

Potencias	10^0	10^1	10^2	10^3
Restos	1	1	1	1

El polinomio es $a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot 1, \ldots, + a_k \cdot 1$ nos da la ley que podemos enunciar : « Un número es divisible por 3 cuando la suma de sus cifras sea un múltiplo de 3. »

3. Criterio de divisibilidad por 5 :

Potencias	10^0	10^1	10^2	10^3
Restos	1	0	0	0

El polinomio $a_0 \cdot 1 + a \cdot 0_k, \ldots, + a_k \cdot 0 = 0$ y enunciamos : « Un número es divisible por 5, cuando su última cifra es 0 ó 5. »

4. Criterio de divisibilidad por 7 :

Potencias	10^0	10^1	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7
Restos.	1	3	2	6	4	5	1	3
Restos	1	3	2	– 1	– 3	– 2	1	3

y el polinomio de restos sería : $a_0 + 3a_1 + 2a_2 - a_3 - 3a_4 - 2a_5 + a_6 + \ldots$

Ejemplo : el número 1 354 986 no es divisible por 7, pues el número $6 \cdot 1 + 3 \cdot 8 + 2 \cdot 9 - 4 \cdot 1 - 3 \cdot 5 - 2 \cdot 3 + 1 \cdot 1 = 49 - 25 = 24$, que no es múltiplo de 7.

Sin embargo, el número 1 354 983 sí es divisible por 7, puesto que : $3 \cdot 1 + 8 \cdot 3 + 2 \cdot 9 - 4 \cdot 1 - 3 \cdot 5 - 2 \cdot 3 + 1 = 46 - 25 = 21 = 3 \cdot 7$, que es divisible por 7.

5. Criterio de divisibilidad por 9 :

Potencias	10^0	10^1	10^2	10^3
Restos	1	1	1	1

y deducimos « Un número es divisible por 9, cuando la suma de sus cifras sea 9 ó un múltiplo de 9 ».

Relación de orden en el conjunto Z. — Decimos que dos números enteros a y b están relacionados y escribimos $a/b \iff \exists\, c \in Z / b = a \cdot c$.

De la misma definición, deducimos que si a y b están relacionados por medio de la relación /, b es múltiplo de a.

La relación así definida es de orden, puesto que cumple las propiedades :

1. *Reflexiva.* a/a ya que $a = a \cdot 1$.
2. *Antisimétrica.* Si a/b y $b/a \implies a = b$. En efecto, si $a/b \implies b = c_1 \cdot a$, si $b/a \implies a = c_2 \cdot b$. Sustituyendo el valor de a en la expresión $b = c_1 \cdot a$, queda : $b = c_1 \cdot c_2 \cdot b$, como c_1, $c_2 \in Z \implies c_1 = c_2 = 1 \implies a = b$.
3. *Transitiva.* Si a/b y $b/c \implies a/c$. En efecto, si $a/b \implies b = c \cdot a$, si $b/c \implies c = c_2 \cdot b$
$c = c_2 \cdot c_1 \cdot a = c_3 \cdot a \implies a/c$.

Sin embargo, dicha relación de orden no está definida $\forall z \in Z$ puesto que, por ejemplo, no podemos especificar nada en los casos 2/7 ó 23/25, etc. Esta relación, pues, es de orden parcial. De la misma definición, obtenemos que $a/0\ \forall a \in Z$, puesto que $0 = a \cdot 0$, es decir, todo número entero es divisible por 0.

También obtenemos :

el número 1 es divisible únicamente por 1 y -1;

el número entero $z \in Z$, que sea únicamente divisible por $\pm z$ y ± 1, se llama *primo absoluto*.

PROPIEDADES DE LA RELACIÓN DE ORDEN. — 1. Si $a/b \implies a/\dot{b}$. En efecto, si $a/b \implies b = k \cdot a$, para que $a/\dot{b}$, $\dot{b} = K \cdot a$, pero $\dot{b} = c \cdot b = c \cdot k \cdot a = (c \cdot k) \cdot a = K \cdot a$.

2. Si a/b y $a/c \implies a/(b \pm c)$. Su demostración es inmediata.

3. Si $a/b + c$, $a/b \implies a/c$.

4. Si a_1/b_1, $a_2/b_2, \dots a_i/b_i \implies a_1 \cdot a_2 \dots a_i / b_1 \cdot b_2 \dots b_i$.

Las demostraciones de los párrafos 3 y 4 las dejamos, por su sencillez, como ejercicio para los lectores.

Máximo común divisor de dos números. — Sean a y b dos números cualesquiera. Vamos a llamar D_a al conjunto de todos los divisores de a, y D_b al conjunto de todos los divisores de b. El conjunto de los divisores comunes de a y de b será $D_a \cap D_b$.

Este conjunto es distinto del $\varnothing$, puesto que $1 \in D_a$ y $1 \in D_b$.

De entre todos los elementos de $D_a \cap D_b$, hay uno que es superior a todos, que llamaremos *máximo común divisor*, y que simbolizaremos mediante la expresión M.C.D. (a, b).

Ejemplo : hagamos $a = 60$, $b = 40$. Hallemos M.C.D. (a, b). $D_a = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$ · Y $D_b = \{1, 2, 4, 5, 8, 10, 20\}$.

$D_{60} \cap D_{40} = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$. Y M.C.D. $(60, 40) = 20$.

Cuando $D_a \cap D_b = \{1\}$, diremos que a y b son *primos entre sí*.

Si, en vez de dos números, tenemos varios $a, b, c, \dots$ el conjunto de sus divisores comunes será el conjunto $D_a \cap D_b \cap D_c \cap \dots$

Ese conjunto no es vacío, pues contiene al menos el número 1. Si no es vacío, contendrá un elemento máximo. Dicho elemento máximo es el que llamaremos M.C.D. $(a, b, c \dots)$.

PROPIEDADES DEL M.C.D. — 1. *Asociativa.* $\forall a, b, c \in Z \implies$ M.C.D. $[(a, b), c]$ = M.C.D. $[a, (b, c)]$.

2. *Conmutativa.* $\forall a, b \in Z \implies$ M.C.D. (a, b) = M.C.D. (b, a).

3. *Elemento neutro.* $\forall a \in Z \implies$ M.C.D. $(a, 0) = a$.

4. $\forall a, b, c \in Z \implies c \cdot$ M.C.D. (a, b) = M.C.D. $(c \cdot a, c \cdot b)$.

Mínimo común múltiplo de dos números. — Sean a y b dos elementos cualesquiera de Z. Al conjunto de todos los múltiplos de a, lo representaremos mediante (a) y los múltiplos de b, mediante (b).

La intersección de ambos conjuntos $(a) \cap (b)$ es distinta del vacío, puesto que al menos el número $a \cdot b$ y el conjunto $(a \cdot b)$ pertenecen ambos a $(a) \cap (b)$.

Este conjunto $(a) \cap (b)$ tendrá un elemento mínimo distinto de 0, que llamaremos mínimo común múltiplo de a y b, y que representaremos por m.c.m. (a, b).

Ejemplo : hallar el m.c.m. (40, 60) :

$$\left.\begin{array}{l}(40) = \{40, 80, 120, 160, 200 \dots\} \\ (60) = \{60, 120, 180, 240 \dots\}\end{array}\right\} \quad \text{m.c.m. } (40, 60) = 120.$$

En (40) y (60) no hemos señalado como uno de sus elementos el 0, puesto que este elemento es múltiplo de todo número $a \in Z$.

De igual manera que operábamos con el M.C.D., si en vez de dos números a y b tenemos varios números $a, b, c \dots$, el conjunto $(a) \cap (b) \cap (c) \cap \dots$ estará formado por todos los múltiplos comunes de dichos números. Este conjunto no es vacío, pues al menos el conjunto $(a \cdot b \cdot c \cdot d \dots) \subset (a) \cap (b) \cap \dots$ Es, por tanto, un conjunto infinito. De entre todos sus elementos hay uno mínimo que llamaremos m.c.m. $(a, b, c, d, \dots)$.

PROPIEDADES DEL m.c.m. — 1. *Asociativa.* m.c.m. $[(a, b), c]$ = m.c.m. $[a, (b, c)]$.

2. *Conmutativa.* m.c.m. (a, b) = m.c.m. (b, a).

3. *Elemento neutro.* $\forall a \in Z, \implies$ m.c.m. $(a, 1) = a$.

4. $\forall a, b, c \in Z, c \cdot$ [m.c.m. (a, b)] = m.c.m. (ac, bc).

Determinación del M.C.D. de los números. — Dados dos números a y b, para hallar su M.C.D., podemos operar de dos maneras. Una de ellas es descomponer a y b en sus factores primos y, posteriormente, hallar el máximo de los divisores comunes.

Ejemplo : hallar M.C.D. (60, 40).

Descomponiendo en los factores primos :

60	2	40	2	$60 = 2^2 \times 3 \times 5$
30	2	20	2	$40 = 2^2 \times 2 \times 5$
15	3	10	2	
5	5	5	5	
1		1		

Los divisores comunes, como vemos, son 2^2 y 5. Por lo tanto, el M.C.D. de 40 y 60 será múltiplo de 2^2 y de 5. Lo que implica que será múltiplo de su producto $2^2 \cdot 5 = 20$. Además es el máximo de todos los divisores comunes.

Ejemplo : hallar M.C.D. (100, 150, 800) :

100	2	800	2	150	2	$100 = 2^2 \times 5^2$
50	2	400	2	75	3	$800 = 2^2 \times 2^3 \times 5^2$
25	5	200	2	25	5	$150 = 2 \times 3 \times 5^2$
5	5	100	2	5	5	
1		50	2	1		
		25	5			
		5	5			
		1				

Los divisores comunes a los tres números, salvo exponentes, son 2 y 5. El M.C.D. será, por consiguiente, el menor múltiplo de 2, y también múltiplo de 5^2, que es común a los tres números también, luego el M.C.D. será múltiplo de $2 \cdot 5^2 = 50$. Además, es el M.C.D., pues ningún múltiplo de 50 es a la vez divisor de los tres números : 100, 150 y 800.

En general podemos decir : el M.C.D. de varios números se obtiene descomponiendo éstos en sus factores primos y multiplicando después todos los factores comunes a dichos números afectados del menor exponente.

La otra forma de hallar el M.C.D. la basaremos en el siguiente teorema fundamental.

TEOREMA. — Los divisores comunes a dos números son los comunes al menor de ellos y al resto de la división entre ambos.

En efecto :

$$\begin{array}{l|l} a & b \\ \hline r_1 & c_1 \end{array} \qquad a = b \cdot c_1 + r_1 \iff r_1 = a - b \cdot c_1.$$

Si d es un divisor común a a y b, entonces también será divisor de $c_1 \cdot b$ y de a, y por tanto de su diferencia $a - c_1 \cdot b$. Ahora operamos de la misma manera : los divisores comunes de b y r_1 serán divisores comunes del menor de ellos r_1 y del resto de la división entre ambos.

Si reiteramos este proceso, encontramos una sucesión decreciente $a > b > r_1 > r_2 > \ldots > r_n$, llegando forzosamente a una división de resto 0. El último resto distinto de 0 será el M.C.D. buscado. Este proceso de divisiones sucesivas es lo que se conoce con el nombre de *algoritmo de Euclides*.

	c_1	c_2	c_3		c_n	c_{n+1}
a	b	r_1	r_2		r_{n-1}	r_n
r_1	r_2	r_3			0	

M.C.D. (a, b) = M.C.D. (b, r_1) = M.C.D. $(r_1, r_2) \ldots$ M.C.D. $(r_{n-1}, r_n) = r_n$.

Ejemplo : hallar M.C.D. (1 080, 3 000),

	2	1	3	2	
3000	1080	840	240	120	
840	240	120	00		

M.C.D. (1 080, 3 000) = 120.

Ejemplo : hallar M.C.D. (349, 500),

	1	2	3	4	3	1	2
500	349	151	47	11	3	2	1
151	047	11	3	2	1	0	

M.C.D. (349, 500) = 1. Los números son primos entre sí.

TEOREMA DE EUCLIDES. — Si un número a divide a un producto de dos factores $b \cdot c$ y es primo con uno de ellos, divide necesariamente al otro. En efecto, supongamos M.C.D. $(a, b) = 1 \implies$ M.C.D. $(a \cdot c, b \cdot c) = c$. Sabemos que $a / b \cdot c \wedge a / a \cdot c$, pero M.C.D. $(a \cdot c, b \cdot c) = c$, luego a también dividirá al M.C.D., o sea a / c.

PROPIEDADES DEL M.C.D. DE DOS NÚMEROS. — 1. Si dos números se multiplican o dividen por un tercero, su M.C.D. quedará multiplicado o dividido por dicho número. En efecto, sea M.C.D. $(a, b) = D$; como sabemos, $a = b \cdot c_1 + r_1$; multiplicando por c los dos miembros de la igualdad : $a \cdot c = c \cdot b \cdot c_1 + r_1 \cdot c$, o sea que el resto r_1 queda multiplicado por c.

Si este resto fuese M.C.D. de a y b, la propiedad queda demostrada; si no fuese así, todos los restos del algoritmo de Euclides quedan multiplicados por c, hasta llegar al r_n, que es el M.C.D. (a, b) y que se convierte en $c \cdot r_n = c \cdot D$. Luego se verifica que M.C.D. $(a \cdot c, b \cdot c) = c \cdot D$.

De la misma manera, si se dividen dos números por un tercero, demostraríamos que su M.C.D. quedaría dividido por dicho número.

2. Si dos números a y b se dividen por su M.C.D., los cocientes obtenidos son primos entre sí.

En efecto, si aceptamos que, al dividir dos números por su divisor común, su M.C.D. queda también dividido, se tiene :

$$\text{M.C.D.}\ (a, b) = D \implies \text{M.C.D.} \left(\frac{a}{D}, \frac{b}{D}\right) = \frac{D}{D} = 1 \implies$$

$\frac{a}{D}$ y $\frac{b}{D}$ son primos entre sí.

Determinación del m.c.m. de varios números. — Sean dos números, por ejemplo 100 y 150, que descompuestos en sus factores primos serían :

$$100 = 2^2 \cdot 5^2$$
$$150 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2.$$

El m.c.m. de ambos números, que llamaremos M, será naturalmente múltiplo de uno de ellos, por ejemplo 100. Dado que M es también múltiplo de 150, será múltiplo de 2, de 3, y de 5^2; de 2 ya lo es, pues este número es divisor de 100; de 5^2 también lo es por la misma razón, luego M será múltiplo de 3. En total será múltiplo de $100 \cdot 3 = 300$. Además este número es el menor de los múltiplos comunes.

Operando de manera análoga para varios números, encontramos la siguiente regla : para hallar el m.c.m. de varios números, se descomponen éstos en sus factores primos y después se multiplican los factores comunes y no comunes que se encuentren afectados por el mayor exponente.

Existe otra manera de hallar el m.c.m. de dos números a y b, y que justificaremos mediante la siguiente demostración :

sea M.C.D. $(a, b) = D \implies \begin{cases} a = D \cdot a' \\ b = D \cdot b' \end{cases}$ M.C.D. $(a', b') = 1$.

Los múltiplos de a serán de la forma $\dot{a} = k_1 \cdot a = k_1 \cdot D \cdot a'$.

Los múltiplos de b serán de la forma $\dot{b} = k_2 \cdot b = k_2 \cdot D \cdot b'$.

Los múltiplos comunes de a y b serán entonces $k_1 \cdot D \cdot a' = k_2 \cdot D \cdot b' \iff k_1 \cdot a' = k_2 \cdot b'$. Ahora bien, a' es divisor de $a' \cdot k_1$, luego también lo será de $b' \cdot k_2$, o sea, $a' / b' \cdot k_2$, pero a' y b' son primos entre sí, por el Teorema de Euclides $a' / k_2 \implies a' \cdot n = k_2$.

Sustituyendo este valor de k_2 en la expresión que nos da el conjunto de los múltiplos de a y b, tenemos : $b' \cdot D \cdot k_2 = a' \cdot D \cdot b' \cdot n$. De todos los múltiplos comunes, el menor de ellos se obtendrá haciendo $n = 1$. Y nos queda finalmente para la expresión del m.c.m. (a, b). m.c.m. $(a, b) = D \cdot a' \cdot b'$. Y la regla de obtención sería : *el mínimo común múltiplo de dos números es el producto de su máximo común divisor por los cocientes de dividir dichos números entre su máximo común divisor.*

PROPIEDADES. — 1. El m.c.m. de dos números es el cociente de dividir su producto por el M.C.D. de dichos números. En efecto :

$$\left.\begin{aligned} a &= a' \cdot \mathrm{D} \\ b &= b' \cdot \mathrm{D} \end{aligned}\right\} \quad a \cdot b = a' \cdot b' \cdot \mathrm{D}^2 = (a' \cdot b' \cdot \mathrm{D}) \cdot \mathrm{D} = \text{m.c.m.}$$

$$(a, b) \cdot \mathrm{D} \implies \text{m.c.m.}\,(a, b) = \frac{a \cdot b}{\mathrm{D}}.$$

2. El m.c.m. de dos números primos entre sí es su producto.

$$\text{Si} \quad \mathrm{D} = 1 \quad \text{m.c.m.}\,(a, b) = \frac{a \cdot b}{1} = a \cdot b.$$

3. Si un número primo absoluto p divide a un producto de varios factores, divide al menos a uno de ellos.

Por el teorema de Euclides, si $p/a \cdot b \cdot c \ldots r \implies p/a$ ó $p/(b \cdot c \ldots r)$.

Si $p/(b \cdot c \ldots r) \implies$ M.C.D. $(p, a) = 1$.

Si $p/(b \cdot c \ldots r) \implies p/b$ ó $p/(c \cdot d \ldots r)$, si $p/(c \cdot d \ldots r) \implies$ M.C.D. $(p, b) = 1$.

Y así operaríamos sucesivamente hasta encontrar un factor q tal que p/q.

4. Todo número compuesto es un producto de factores primos.

En efecto, sea N tal número. Si N no es primo, deberá admitir divisores distintos de N y de 1. Sea a el menor de dichos divisores $\frac{\mathrm{N}}{a} = n'$; $\mathrm{N} = a \cdot n'$. Este número a será primo, pues, de no serlo, admitiría un divisor $a'/a = a' \cdot k$ y $\mathrm{N} = n' \cdot a = k \cdot n' \cdot a' \implies a'/\mathrm{N}$, y a' sería un divisor de N menor que a, que hemos supuesto el menor de todos ellos. Luego a es primo.

Como $\mathrm{N} = a \cdot n'$, n' puede ser o no ser primo.

Si no fuese primo $n' = n'' \cdot b \implies \mathrm{N} = a \cdot b \cdot n''$. Y operando de esta manera sucesivamente obtendremos :

$$\mathrm{N} = a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot n''''. \quad \text{Y} \quad \mathrm{N} = a \cdot b \cdot c \ldots r.$$

Es decir, hemos descompuesto N en factores primos. De estos factores primos, algunos de ellos pueden estar repetidos, por lo que, agrupándolos, podemos escribir en definitiva : $\mathrm{N} = a^{\alpha} \cdot b^{\beta} \cdot c^{\gamma} \ldots r^{\varepsilon}$. Esta descomposición de un número en sus factores primos, que llamaremos *factorización*, es única.

Divisores simples y compuestos de un número. — Dado un número N, hemos visto que podemos encontrar todos sus factores primos con sus respectivos órdenes de multiplicidad. Sus factores primos y compuestos, agrupados, nos darían la siguiente serie :

$$\begin{array}{lllll} 1 & a & a^2 & a^3 \ldots a^{\alpha} \\ 1 & b & b^2 & b^3 \ldots b^{\beta} \\ 1 & c & c^2 & c^3 \ldots c^{\gamma} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 & r & r^2 & r^3 \ldots r^{\varepsilon}. \end{array}$$

El número de factores de la primera fila es $\alpha + 1$, el de la segunda fila $\beta + 1$, el de la tercera $\gamma + 1 \ldots$ etc., hasta llegar a la última fila que tendrá $\varepsilon + 1$ factores.

Para hallar el número total de divisores de N, podemos operar multiplicando cada elemento de la primera fila por todos y cada uno de los restantes, formando de esta manera todos los productos posibles. Dado que en la primera fila hay $(\alpha + 1)$ factores, en la segunda $(\beta + 1)$ etc., para hallar todos los productos posibles, habrá que multiplicar cada uno de los elementos de la primera fila por todos los de la segunda. Los productos obtenidos se multiplicarán por los de la tercera y así sucesivamente. El número total de divisores de N vendrá dado por $(\alpha + 1) \cdot (\beta + 1) \cdot \ldots (\varepsilon + 1)$.

Ejemplo : obtener todos los divisores de 120.

Factorizando 120 obtenemos :

$$\begin{array}{r|l} 120 & 2 \\ 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad 120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5;\ \alpha = 3,\ \beta = 1,\ \gamma = 1$$

Y el número total de factores será :

$$(\alpha + 1) \cdot (\beta + 1) \cdot (\gamma + 1) = 4 \cdot 2 \cdot 2 = 16.$$

Dichos factores son :

1	2	2^2	2^3
3	6	12	24
5	10	20	40
15	20	60	120 .

Suma de los divisores de un número. — Sabemos que todos los factores, tanto primos como compuestos, se obtienen a partir de los productos que ya hemos señalado. La suma de dichos productos es evidente que viene expresada mediante :

$$\mathrm{S} = (1 + a + a^2 + \ldots + a^{\alpha}) \cdot (1 + b + b^2 + \ldots + b^{\beta}) \cdot (\ldots) \cdot (1 + r + \ldots + r^{\varepsilon}).$$

Ahora bien, cada uno de los paréntesis indicados es la suma de los términos de progresiones geométricas de razones respectivas $a, b, c, \ldots r$. Dichas sumas, como sabemos, vienen expresadas mediante la fórmula $\mathrm{S} = \frac{a_n \cdot q - a}{q - 1}$, donde q es la razón. Aplicando esta última relación a cada paréntesis, obtenemos :

$$\mathrm{S} = \left(\frac{a^{\alpha} \cdot a - 1}{a - 1}\right) \cdot \left(\frac{b^{\beta} \cdot b - 1}{b - 1}\right) \cdots \left(\frac{r^{\varepsilon} \cdot r - 1}{r - 1}\right)$$

$$\implies \mathrm{S} = \frac{a^{\alpha + 1} - 1}{a - 1} \cdot \frac{b^{\beta + 1} - 1}{b - 1} \cdots \frac{r^{\varepsilon + 1} - 1}{r - 1}.$$

Ejemplo : hallar la suma de todos los divisores de 120.

Sabemos que $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$, y que $\mathrm{S} = \frac{a^{\alpha + 1} - 1}{a - 1} \cdot \frac{b^{\beta + 1} - 1}{b - 1} \cdot \frac{c^{\gamma + 1} - 1}{c - 1} = \frac{2^4 - 1}{1} \cdot \frac{3^2 - 1}{2} \cdot \frac{5^2 - 1}{4} = 15 \cdot 4 \cdot 12 = 720.$

Producto de los divisores de un número. — Escribamos de nuevo los divisores del número 120 :

1	2	2^2	2^3		d_1	d_2	d_3	d_4
3	6	12	24	ó	d_5	d_6	d_7	d_8
5	10	20	40		d_9	d_{10}	d_{11}	d_{12}.
15	30	60	120		d_{13}	d_{14}	d_{15}	d_{16}

Observemos que el producto de los términos equidistantes, por ejemplo, $d_1 \cdot d_{16} = d_2 \cdot d_{15} = d_3 \cdot d_{14} = \ldots = d_i \cdot d_{17-i} = 120$. De esta manera podemos escribir :

Producto total $= 1 \cdot 2 \cdot 2^2 \ldots 30 \cdot 60 \cdot 120 = \prod_{1}^{16} d_i$; aplicando la propiedad conmutativa :

Producto total $= 120 \cdot 60 \cdot 30 \ldots 2^2 \cdot 2 \cdot 1 = \prod_1^{16} d_i$; multiplicando las dos igualdades miembro a miembro :

$P^2 = (120 \cdot 1) \cdot (60 \cdot 2) \cdot (30 \cdot 2^2) \cdot (\quad) \ldots (60 \cdot 2) \cdot (120 \cdot 1) =$

$$\prod_1^{16} d_i \cdot d\ 17 \cdot 1 = 120^{16} \cdot P = \sqrt{120^{16}} = 120^8.$$

Este ejemplo lo podemos generalizar al caso de una factorización de un número cualquiera N. La expresión que nos da el producto de todos sus divisores es :

$$P = \sqrt{N^n}.$$

Ecuaciones diofánticas

Se denominan *ecuaciones diofánticas* aquellas ecuaciones algebraicas con más de una incógnita, con soluciones en Z; aunque las soluciones nosotros las buscaremos en N. Su nombre deriva del estudio que hizo de ellas Diofanto de Alejandría, matemático griego al que hemos aludido ya anteriormente. Aunque existen distintos tipos de ecuaciones diofánticas, nos ceñiremos al estudio de las más sencillas.

Ecuación general de la forma $Ax \pm By = C$. — Llamemos D al M.C.D. (A, B) $\Longrightarrow$ D/Ax $\wedge$ D/Ay $\Longrightarrow$ D divide a su suma o diferencia, es decir, D/C. De lo cual podemos deducir : la condición necesaria y suficiente para que la ecuación $Ax \pm By = C$ tenga solución en N es que C sea múltiplo de D.

Dividiendo los dos miembros de la ecuación por D, nos resulta la ecuación :

$\frac{Ax}{D} + \frac{By}{D} = \frac{C}{D} \iff a'x \pm b'y = c'$, donde a' y b' son primos entre sí. Una vez reducida la ecuación primitiva a la forma $a'x \pm b'y = c'$, distinguiremos dos subcasos :

a) Ecuación $ax - by = c$,

$x = \frac{c + by}{a}$, si queremos que $x \in Z \Longrightarrow c + by = \dot{a} \iff c + by \equiv \dot{a} \equiv 0 (\text{mód. } a)$. Ahora bien, nuestro problema es encontrar un valor de $y = y_1$ tal que se verifique que $c + by_1 \equiv 0$ (mód. a), lo cual siempre es posible.

Para este valor de $y = y_1$, tendremos que $c + by_1 = \dot{a}$; sea ese múltiplo de a, por ejemplo, el $x_1 \cdot a$, tendremos finalmente que $c + by_1 = x_1 \cdot a$ ó, lo que es lo mismo, $x_1 \cdot a - by_1 = c$, y habremos encontrado una solución de la ecuación.

Para obtener todas las soluciones posibles de dicha ecuación, operamos de la siguiente manera :

$$\left.\begin{array}{l} ax - by = c \\ ax_1 - by_1 = c \end{array}\right\} \text{ restando miembro a miembro}$$

$$ax - by - ax_1 - by_1 = 0 \iff a(x - x_1) - b(y - y_1) = 0.$$

Dado que a y b son primos entre sí, y teniendo en cuenta el teorema de Euclides : $b(y - y_1) = a(x - x_1)$, $b/a(x - x_1 \Longrightarrow b/(x - x_1) \Longrightarrow x - x_1 = \dot{b} = k \cdot b$, $x - x_1 = k \cdot b \Longrightarrow x = x_1 + k \cdot b$ que nos da todas las soluciones posibles de x.

De igual manera obtenemos para y la solución general $y = y_1 + a \cdot k$.

Ejemplo : resolver la ecuación $8x - 12y = 16$.

Dividiendo los dos miembros por M.C.D. (8,12) = 4, resulta la ecuación $2x - 3y = 4$; $x = \frac{4 + 3y}{2}$.

El menor valor de y que hace x entero es $y = y_1 = 2 \Longrightarrow x = 5$.

La solución general para x es : $x = x_1 + b \cdot k$, y para $y = y_1 + a \cdot k$, obteniendo finalmente :

$$\left.\begin{array}{l} x = 5 + 3 \cdot k \\ y = 2 + 2 \cdot k \end{array}\right\} \text{ que nos proveen de las parejas de soluciones :}$$

k	0	1	2	3
x	5	8	11	14
y	2	4	6	8

b) Ecuación del tipo $ax + by = c$.

Operando de manera análoga a como lo hicimos anteriormente, obtendremos una primera solución de la ecuación : (x_1, y_1), que verifica $a \cdot x_1 + b \cdot y_1 = c$. La solución general se obtiene a partir de :

$$\left.\begin{array}{l} ax + by = c \\ ax_1 + by_1 = c \end{array}\right\} \text{ restando se tiene :}$$

$a(x - x_1) = b$; por el teorema de Euclides $x - x_1 = b \cdot k$; $x = x_1 + b \cdot k$. Y de idéntica forma $y = y_1 - a \cdot k$.

Ejemplo : resolver la ecuación $8x + 11y = 2$.

$$x = \frac{2 - 11y}{8}.$$

El menor valor posible que hace a x entero es $y = y_1 = 6$, obteniendo para x el valor $x_1 = -8$.

La solución general para x será $x = -8 + 11 \cdot k$ y para y obtenemos $y = 6 - 8 \cdot k$.

Este último ejemplo nos muestra claramente que las soluciones encontradas no lo han sido en el conjunto N, sino en el conjunto Z.

k	0	1 ···
x	−8	3 ···
y	6	−2 ···

Cuerpos

Un conjunto C, con dos operaciones internas, adición y multiplicación, se dice que tiene estructura de *cuerpo* cuando :

1. C posee estructura de grupo abeliano respecto de la adición.

2. C − {0} posee estructura de grupo respecto de la multiplicación.

3. Se verifica la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la adición.

Si además la multiplicación es conmutativa, el cuerpo es llamado conmutativo. En nuestro estudio, sólo trataremos con *cuerpos conmutativos*.

También podemos definir un cuerpo diciendo que es un anillo con unidad tal que todo elemento de dicho anillo excepto el 0 posee inverso.

La primera propiedad importante que deducimos inmediatamente de la definición es que un cuerpo es un anillo sin divisores de 0.

En efecto, si $a \cdot b = 0$, dado que $\exists\, a^{-1}$, $\Longrightarrow$ multiplicando los dos miembros por a^{-1} queda : $a^{-1} \cdot a \cdot b = a^{-1} \cdot 0 \Longrightarrow 1 \cdot b = 0 \Longrightarrow b = 0$.

Subcuerpos. — Un conjunto $K' \subset C$, es un subcuerpo de C, cuando K', con las mismas operaciones de C, constituye un cuerpo.

Ejemplo : el cuerpo de los números reales R posee un subcuerpo que es isomorfo al conjunto de los números racionales Q.

Una condición necesaria y suficiente para que un subconjunto $K' \subset C$ sea un subcuerpo es :

1. $\forall x, y \in K' \quad x - y \in K'$.
2. $\forall x, y \in K \quad x \cdot y^{-1} \in K,\ y \neq 0$.

Ideales de un cuerpo. — Veamos que los únicos ideales que pueden existir en un cuerpo C son el mismo cuerpo C y el conjunto {0}.

En efecto, sea $x \in I$, $x \neq 0$, siendo I un ideal de C; por la definición de ideal, $\forall x \in I$, $\forall y \in C \implies x \cdot y\ I$. Dado que $x^{-1} \in C \implies x \cdot x^{-1} \in I \implies 1 \in I$, pues $1 = x \cdot x^{-1}$, siendo 1 el elemento unidad del subgrupo multiplicativo de C.

Así pues, $1 \in I$, aplicando de nuevo la definición de ideal, $\forall y \in C$, $1 \cdot y \in I$, pero $1 \cdot y = y \implies y \in I$, y tenemos que todo elemento $y \in C \implies y \in I$, lo cual sólo es posible si $I = C$.

Veamos que el otro ideal posible es 0. En efecto, supongamos que I no contiene ningún elemento x, $x \neq 0$, o sea, $I = \{0\} \implies \forall x \in C$, $0 \cdot x \in I$, pues $0 \cdot x = 0 \in I$, como queríamos demostrar.

Homomorfismos entre cuerpos. — Dada una aplicación f entre dos cuerpos $C \longrightarrow C'$, diremos que f es homomorfismo si y sólo si :

1. $f(x + x') = f(x) + f(x')$.
2. $f(x \cdot x') = f(x) \cdot f(x')$.

TEOREMA. — Dado el homomorfismo $f : C \longrightarrow C'$ se verifica que Ker f es o bien todo C o el conjunto {0}.

En efecto, sabemos que, dado un homomorfismo f entre anillos $A \longrightarrow A'$, Ker$f$ es un ideal de A. En nuestro caso, dado que C es un cuerpo y que los únicos ideales de un cuerpo son el mismo cuerpo o el conjunto {0}, la hipótesis queda verificada inmediatamente.

Construcción algebraica de un cuerpo C a partir de un anillo conmutativo. — Vamos a considerar el caso concreto de anillos sin divisores de cero. A partir de un tal anillo A vamos a construir un conjunto con estructura de cuerpo que llamaremos *cuerpo de las fracciones de A sobre A*.

Esta exigencia de construcción nos viene determinada por dos razones fundamentales, una de ellas es la de poder resolver más correctamente el problema de la medida, que es difícil abordarlo con magnitudes enteras, y otra es la de poder resolver satisfactoriamente el problema de la división, pues en Z sólo era posible cuando el dividendo era múltiplo del divisor.

Aunque, en lo que sigue, vamos a tratar con elementos de un anillo conmutativo sin divisores de cero, en general, damos por supuesto que el lector se dará cuenta de nuestra intención de operar con el anillo de los enteros.

DEFINICIÓN. — Sea A un anillo conmutativo sin divisores de cero. En $A \times (A - \{0\}$, definimos la siguiente relación : $(xy)\ R\ (x'y') \iff x \cdot y' = x' \cdot y$.

La relación así definida es de equivalencia, pues se verifican las tres propiedades.

1. *Reflexiva.* $(xy) R (xy)$ pues $x \cdot y = y \cdot x$.
2. *Simétrica.* Si $(xy) R (x'y') \implies (x'y') R (xy)$.
3. *Transitiva.* Si $(xy) R (x'y') \wedge (x'y') R (x''y'') \implies (xy) R (x''y'')$. En efecto :

Si $(xy) R (x'y') \implies x \cdot y' = x' \cdot y$ **[1]**
Si $(x'y') R (x''y'') \implies x' \cdot y'' = x'' \cdot y'$ **[2]**

Si multiplicamos (1) por y'' y (2) por y obtenemos :

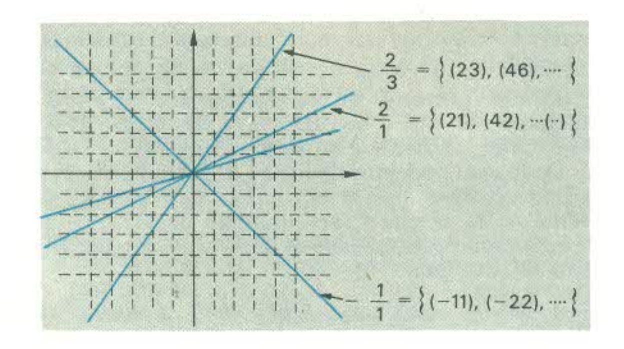
$$\left.\begin{array}{l} x \cdot y' \cdot y'' = x' \cdot y \cdot y'' \\ x' \cdot y'' \cdot y = x'' \cdot y' \cdot y \end{array}\right\} \implies x \cdot y' \cdot y'' = x'' \cdot y' \cdot y \implies$$
$$x \cdot y' \cdot y'' - x'' \cdot y' \cdot y = 0 \implies$$
$$y' \cdot (x \cdot y'' - y \cdot x'') = 0 \implies y' = 0,$$

que rechazamos por hipótesis, ó $x \cdot y'' - x'' \cdot y = 0 \implies x \cdot y'' = x'' \cdot y$, como queríamos demostrar.

Consideremos el conjunto cociente $A \times (A - \{0\})/R$.

Cada elemento de este conjunto cociente es una clase de equivalencia formada por todas las parejas que están relacionadas entre sí a través de la relación R ya definida. En el caso de los números enteros, dichas clases de equivalencia estarían formadas por las parejas que forman las rectas que pasan por el centro, exceptuando dicho centro, pues su segunda coordenada es $y = 0$, y la relación la hemos definido en $Z \times (Z - \{0\})$.

En un diagrama cartesiano, cada clase de equivalencia vendría representada en la forma siguiente :



A la clase de equivalencia a la que pertenece el elemento (x, y), la representaremos por $\frac{x}{y}$. En el caso de tratar con $Z \times (Z - \{0\})$, a las clases las llamaremos *números racionales*, al conjunto $Z \times (Z - \{0\})/R$ se le denomina *cuerpo de los números racionales* Q, y a cada uno de los infinitos elementos que componen una clase le llamaremos fracción.

Así pues, de acuerdo con las notaciones anteriores, a la clase {(2 1), (4 2), (6 3), (8 4)...} la representaremos por $\frac{2}{1}$, y a cada uno de sus elementos, por ejemplo el (6 3) ó (8 4), los llamaremos fracciones.

Se acostumbra representar a cada clase por el primero de sus elementos, y así escribimos $\frac{2}{1}$ y no $\frac{4}{2}$ para representar la clase a la cual pertenecen, aunque esto sea indiferente.

También se acostumbra representar las fracciones mediante la notación $\frac{x}{y}$; nosotros, para distinguir una fracción $\frac{x}{y}$ del número racional al que ésta pertenece, representaremos en lo que queda de capítulo las fracciones mediante un par de la forma (xy), y al número racional al que pertenece esta fracción mediante la notación $\frac{x}{y}$. A x le llamaremos numerador de la fracción y a y denominador de la misma.

Suma en A*x*(A − {0})/R. — Definimos $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}$; $\forall a,b,c,d \in A,\ b,d \neq 0$.

PROPIEDADES. — Dado que hemos definido la operación en un conjunto de clases, habremos de comprobar que dicha operación no depende de los representantes elegidos, lo que es lo mismo, demostrar la propiedad uniforme.

1. *Uniforme*. Sean las clases $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ de las que escogemos otros representantes distintos, por ejemplo los $\frac{a'}{b'}$ y $\frac{c'}{d'}$. Sumando estos dos últimos obtendríamos : $\frac{a'}{b'}+\frac{c'}{d'}=\frac{a'd'+c'b'}{b'd'}$. Se trata de ver que los dos representantes $\frac{ad+bc}{bd}$ y $\frac{a'd'+c'b'}{b'd'}$ son de la misma clase.

En efecto, sabemos que $a\cdot b'=b\cdot a'$ y que $c\cdot d'=c'\cdot d$; para que se verifique la demostración, es necesario que $a\cdot d\cdot b'\cdot d'\cdot + b\cdot c\cdot b'\cdot d' = b\cdot d\cdot a'\cdot d' + b\cdot d\cdot c'\cdot b'$, pero $a\cdot b'=b\cdot a'$ y $c\cdot d'=c'\cdot d$; sustituyendo estos valores en el primer miembro de la igualdad que queremos demostrar obtenemos : $(a\cdot b')\cdot d\cdot b'+b\cdot b'(c\cdot d')= a\cdot b'\cdot d\cdot b'+b\cdot b'\cdot c'\cdot d$, que es precisamente el segundo miembro de dicha igualdad.

2. *Asociativa*. $\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)+\frac{e}{f}=\frac{a}{b}+\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)$.

En efecto, el primer miembro de dicha igualdad es igual a $\frac{ad+bc}{bd}+\frac{e}{f}=\frac{adf+bcf+dbe}{bdf}$.

El segundo miembro es $\frac{a}{b}+\frac{cf+de}{df}=\frac{adf+bcf+bde}{bdf}$.

Ambos miembros, como vemos, son iguales.

3. *Conmutativa*. $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{c}{d}+\frac{a}{b}$. Inmediata.

4. *Elemento neutro*. Es la clase $\frac{0}{n}$. En efecto, $\frac{a}{b}+\frac{0}{n}=\frac{an+0b}{bn}=\frac{an}{bn}$; pero la clase $\frac{a}{b}$ es la misma que $\frac{an}{bn}$, pues $a\cdot b\cdot n=b\cdot a\cdot n$.

5. *Elemento simétrico*. De la clase $\frac{a}{b}$ es la $\frac{-a}{b}$, pues $\frac{a}{b}+\frac{-a}{b}=\frac{ab+(-ab)}{b^2}=\frac{0}{b^2}$.

Con respecto a dicha operación suma, el conjunto A × (A − {0})/R tiene estructura de grupo abeliano.

Producto en A*x* (A − {0})/R. — Definimos $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$.

PROPIEDADES. — 1. *Uniforme*. Sean $\frac{a'}{b'}$ y $\frac{c'}{d'}$ dos representantes de las clases $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$; tenemos $\frac{a'\cdot c'}{d'\cdot b'}=\frac{a'}{b'}\cdot\frac{c'}{d'}$. Nuestro problema es demostrar que $\frac{ac}{bd}$ pertenece a la misma clase que $\frac{a'c'}{x'b'} \iff a\cdot d'\cdot c\cdot b'=a'\cdot d\cdot b\cdot c'$.

En efecto,

$$\left.\begin{array}{l} \text{si } \frac{a}{b}R\frac{a'}{b'} \implies ab'=a'b \\ \text{si } \frac{c}{d}R\frac{c'}{d'} \iff cd'=c'd \end{array}\right\}$$

Multiplicando miembro a miembro, nos queda :

$$a\cdot b'\cdot c\cdot d'=a'\cdot b\cdot c'\cdot d.$$

2. *Asociativa*. $\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\right)\cdot\frac{e}{f}=\frac{a}{b}\cdot\left(\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}\right)$.

El primer miembro es igual a $\frac{a\cdot c}{bd}\cdot\frac{e}{f}=\frac{ace}{bdf}$.

El segundo miembro es igual a $\frac{a}{b}\cdot\frac{ce}{df}=\frac{ace}{bdf}$.

Ambos miembros, como vemos, son iguales, c.q.d.

3. *Elemento neutro*. Es el $\frac{n}{n}$, pues $\frac{a}{b}\cdot\frac{n}{n}=\frac{a\cdot n}{b\cdot n}$ y ambos $\frac{a}{b}$ y $\frac{an}{bn}$ pertenecen a la misma clase, puesto que $a\cdot b\cdot n=b\cdot a\cdot n$.

4. *Elemento simétrico*. Del $\frac{a}{b}$ es el $\frac{b}{a}$, puesto que $\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=\frac{a\cdot b}{b\cdot a}$, que es el elemento neutro.

5. Además se verifica la propiedad *distributiva* de la multiplicación respecto de la suma

$$\frac{a}{b}\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)=\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}+\frac{a}{b}\cdot\frac{e}{f}.$$

En efecto,

$$\frac{a}{b}\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)=\frac{a}{b}\cdot\left(\frac{cf+de}{df}\right)=\frac{acf+ade}{bdf}. \quad [1]$$

Por otra parte,

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}+\frac{a}{b}\cdot\frac{e}{f}=\frac{ac}{bd}+\frac{ae}{bf}=\frac{acbf+aebd}{bdbf} \quad [2]$$

y ambas clases [1] y [2] son la misma.

Hemos visto pues que el conjunto A*x* (A − {0})/R, con las operaciones suma y producto, verifica las condiciones que exigimos al principio del capítulo para poseer la estructura de cuerpo conmutativo.

El cuerpo Q de los racionales es ordenado. — Diremos que un número racional $\frac{a}{b}$ es positivo si $a\cdot b$ es un entero positivo, o, lo que es lo mismo, si a y b son a la vez ambos positivos o ambos negativos. En caso contrario, diremos que el número $\frac{a}{b}$ es negativo.

DEFINICIÓN. — El número racional $\frac{a}{b}$ es menor que el $\frac{c}{d}$, y se escribe $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$, si $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}$ es negativo. Si $\frac{a}{b}$ es igual o menor que $\frac{c}{d}$, escribimos $\frac{a}{b}\leq\frac{c}{d}$.

La relación menor o igual ($\leq$) en Q es una relación de orden total.

1. *Reflexiva*. $\frac{a}{b}\leq\frac{a}{b}$.

2. *Antisimétrica*. Si $\frac{a}{b} \leqslant \frac{c}{d} \wedge \frac{c}{d} \leqslant \frac{a}{b} \implies \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. En efecto, las dos primeras desigualdades no se pueden verificar más que cuando $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = 0$ y $\frac{c}{d} - \frac{a}{b} = 0$ $\implies \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

3. *Transitiva*. Si $\frac{a}{b} \leqslant \frac{c}{d} \wedge \frac{c}{d} \leqslant \frac{e}{f} \implies \frac{a}{b} \leqslant \frac{e}{f}$, lo que resulta evidente.

Como consecuencias inmediatas de la definición de orden podemos deducir las siguientes propiedades :

a) Si $\frac{a}{b} > 0 \implies \frac{b}{a} > 0$.

b) Si $\frac{a}{b} \leqslant \frac{c}{d} \implies \frac{a}{b} + \frac{e}{f} \leqslant \frac{c}{d} + \frac{e}{f}$.

c) Si $1 < \frac{a}{b} \implies 1 < \left(\frac{a}{b}\right)^n$.

c') Si $1 < \frac{a}{b}$, $1 < \frac{c}{d} \implies 1 < \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$.

d) Si $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ y $\alpha \in Q$, α cualquiera/$0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ se verifica que $\frac{a}{b} \leqslant \alpha \cdot \frac{a}{b} + (1-\alpha)\frac{c}{d} \leqslant \frac{c}{d}$. En efecto, si $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \implies \frac{a}{b} - \frac{c}{d} < 0 \implies \alpha \cdot \frac{a}{b} + (1-\alpha)\frac{c}{d} = \alpha \cdot \frac{a}{b} + \frac{c}{d} - \alpha \cdot \frac{c}{d} = \alpha\left(\frac{a}{b} - \frac{c}{d}\right) + \frac{c}{d}$, pero $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} < 0$ $\implies \alpha\left(\frac{a}{b} - \frac{c}{d}\right) < 0 \implies \frac{c}{d} + \alpha\left(\frac{a}{b} - \frac{c}{d}\right) < \frac{c}{d}$.

e) Entre dos números racionales distintos existen infinitos números racionales.

Sean, en efecto, $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ dos números racionales cualesquiera $\frac{a}{b} \neq \frac{c}{d}$; como la relación $\leqslant$ es de orden total, se habrá de verificar, bien que $\frac{a}{b} \leqslant \frac{c}{d}$ o que $\frac{c}{d} \leqslant \frac{a}{b}$. Supongamos se verifique que $\frac{a}{b} \leqslant \frac{c}{d}$; por la propiedad anterior, sabemos que $\forall \alpha$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ se verifica que $\frac{a}{b} \leqslant \alpha \cdot \frac{a}{b} + (1-\alpha)\frac{c}{d} \leqslant \frac{c}{d}$; ahora bien, existen infinitos números α comprendidos entre 0 y 1, puesto que todos los de la forma $\frac{1}{n} \in (0\ 1]$; a cada uno de estos infinitos α_i distintos corresponden infinitos racionales de la forma $\alpha \cdot \frac{a}{b} + (1-\alpha)\frac{c}{d}$, que es lo que nosotros queríamos encontrar.

Inmersión de Z en Q. — Definimos la aplicación φ :

$$\begin{array}{ccc} Z & \longrightarrow & Q \\ a & \longrightarrow & \varphi(a) = \frac{a}{1}. \end{array}$$

Que es un homomorfismo, es evidente. De esta manera, podemos considerar un número entero a como un número racional cuyo denominador es 1. Como consecuencia de la definición del homomorfismo φ, es posible realizar operaciones de la forma $a \cdot \frac{b}{c}$, $a \in Z$, pues hacemos $a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a}{1} \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c}$.

Q es arquimediano.

Esto significa que, dados dos números racionales positivos $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, $\exists\, n \in Z / n \cdot \frac{a}{b} > \frac{c}{d}$.

En efecto, haciendo $n = \frac{c}{d} : \frac{a}{b} = \frac{cb}{ad}$, tenemos : $\frac{cb}{ad} \cdot \frac{a}{b} = \frac{cba}{adb} = \frac{c}{d}$. Escogiendo ahora $n > \frac{cb}{da}$, el teorema queda demostrado.

Fracciones irreducibles. — Si tenemos un par de números enteros a y b, y d es un divisor común de ambos, podemos escribir :

$$\begin{array}{l} a = d \cdot a' \\ b = d \cdot b' \end{array} \implies \begin{array}{l} a \cdot b' = d \cdot a' \cdot b' \\ b \cdot a' = d \cdot b' \cdot a' \end{array} \implies a \cdot b' = b \cdot a'$$

$\implies (ab)\ R\ (a'b')$, o, lo que es lo mismo, $\frac{a}{b}$ y $\frac{a'}{b'}$ son la misma clase. Resumiendo, podemos decir que, dada una fracción cualquiera (ab), dividiendo ambos enteros a y b por su M.C.D., obtendremos otra fracción $(a'b')$ equivalente a la primera, verificándose además que los enteros a' y b' son primos entre sí. Estas fracciones así obtenidas se llaman *irreducibles*.

Como en una clase de equivalencia cualquiera $\frac{a}{b}$ es siempre posible encontrar una fracción de este tipo $\frac{a'}{b'}$, se acostumbra representar la clase mediante esta fracción irreducible, que además es única.

Según el razonamiento anterior, a la clase {(1 2), (2 4), (3 6), ... (− 1 − 2), (− 2 − 4), ...} la representaremos por $\frac{1}{2}$.

A la clase {(2 3), (4 6), ...} la representaremos por $\frac{2}{3}$.



4. — Espacios vectoriales

Definición. Ejemplo de espacio vectorial. Isomorfismo fundamental. Espacio vectorial de los vectores libres. El espacio vectorial R. Espacio vectorial R^n. Subespacios vectoriales. Intersección de subespacios. Suma de subespacios. Dependencia e independencia lineal. Variedades lineales de un espacio vectorial. Espacio vectorial de tipo finito. *Base de un espacio vectorial.* Dimensión de una variedad lineal. Cambio de base. — Homomorfismos entre espacios vectoriales.

Definición. — Sea K un cuerpo cualquiera y M un grupo abeliano. Representemos los elementos de K mediante letras griegas y los de M mediante negritas. Llamaremos espacio vectorial al par (M $\cdot$) donde $\cdot$ es la aplicación de $K \times M \xrightarrow{\cdot} M$ que verifica las siguientes propiedades :

1. $\alpha \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha \cdot \mathbf{x} + \alpha \cdot \mathbf{y} \quad \forall \alpha \in K, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in M.$
2. $(\alpha + \beta) \cdot \mathbf{x} = \alpha \cdot \mathbf{x} + \beta \cdot \mathbf{x} \quad \forall \alpha, \beta, \in K, \forall \mathbf{x} \in M.$
3. $(\alpha \cdot \beta) \cdot (\mathbf{x}) = \alpha \cdot (\beta \cdot \mathbf{x}) \quad \forall \alpha, \beta \in K, \forall \mathbf{x} \in M.$
4. $1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$, siendo 1 el elemento unidad de K, $\forall \mathbf{x} \in M$.

Los elementos de M con la aplicación $\cdot$ se denominan *vectores*.

PROPIEDADES. — Llamemos $\mathbf{0}$ al elemento neutro de M y 0 al elemento neutro del grupo aditivo de K.

1. $0 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0} \forall \mathbf{x} \in M$. En efecto, $\forall \alpha \in K$, $(\alpha + 0) \cdot \mathbf{x} = \alpha \cdot \mathbf{x} + 0 \cdot \mathbf{x}$; por otra parte $(\alpha + 0) = \alpha \implies \alpha \cdot \mathbf{x} = \alpha \mathbf{x} \implies \alpha \mathbf{x} + \mathbf{0x} = \alpha \mathbf{x} \implies \mathbf{0} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$.

2. $\alpha \cdot (-\mathbf{x}) = -(\alpha \cdot \mathbf{x}) \forall \alpha, \forall \mathbf{x}$. Sabemos que $\alpha [\mathbf{x} + (-\mathbf{x})] = \alpha \cdot \mathbf{0} = \alpha \mathbf{x} + \alpha(-\mathbf{x}) = \mathbf{0} \implies \alpha(-\mathbf{x}) = -\alpha \cdot (\mathbf{x}) = -(\alpha \cdot \mathbf{x})$.

3. $(-\alpha) \cdot \mathbf{x} = -(\alpha \cdot \mathbf{x})$. En efecto, $[\alpha + (-\alpha)] \cdot \mathbf{x} = 0 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0} = \alpha \cdot \mathbf{x} + (-\alpha) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0} \implies (-\alpha) \cdot \mathbf{x} = -(\alpha \cdot \mathbf{x})$.

4. $\alpha \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0} \forall \alpha \in K$. En efecto, $\alpha \cdot [\mathbf{x} + (-\mathbf{x})] = \alpha \cdot \mathbf{0} = \alpha \cdot \mathbf{x} + \alpha \cdot (-\mathbf{x})$, pero por 2. $\alpha(-\mathbf{x}) = -\alpha(\mathbf{x}) \implies \alpha \cdot \mathbf{x} + [-(\alpha \mathbf{x})] = \mathbf{0} \implies \alpha \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$.

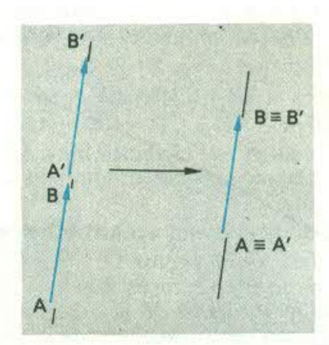
Ejemplo de espacio vectorial. — Supongamos el plano real, y en él un segmento $\overline{AB}$ con extremos A y B. Llamaremos vector libre a un segmento ordenado o dirigido; es decir, un segmento cuyos extremos los damos en un cierto orden, y escribimos $\overrightarrow{AB}$.

Llamamos A al origen del vector y B al extremo del mismo.

En este conjunto V_e, de todos los vectores libres del plano, definimos la siguiente relación que denominaremos de *equipolencia*.

El vector $\overrightarrow{AB}$ es equipolente al $\overrightarrow{A'B'}$, si se verifica que el cuadrilátero AA'BB', formado por los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{A'B'}$ y los $\overline{BB'}$ y $\overline{AA'}$, es un paralelogramo.

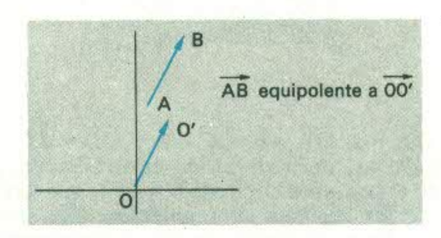
En el caso de que los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{A'B'}$ estén sobre la misma recta, diremos que $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{A'B'}$ son equipolentes, si mediante un deslizamiento se pueden hacer coincidir uno sobre otro, es decir, $A \equiv A'$, $B \equiv B'$.



La relación de equipolencia así definida se puede demostrar que es de equivalencia, pues cumple las tres propiedades reflexiva, simétrica y transitiva.

En consecuencia, existe el conjunto cociente V_e/R, equipolencia que designaremos mediante V, y que denominaremos *espacio de los vectores libres*. Sus elementos son clases de equivalencia.

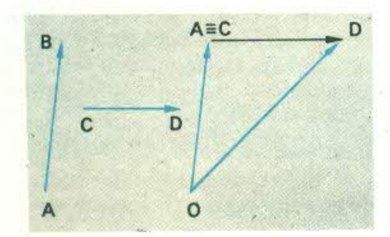
Para representar cada una de estas clases, lo haremos mediante uno cualquiera de sus representantes. De esos representantes de una clase, que son en número infinito, existe uno, único, representante que tiene como origen el centro O de coordenadas.



Ya tenemos construido un conjunto V, conjunto al que hemos denominado de los vectores libres; dado que este conjunto es el que vamos a identificar con el grupo abeliano M, necesitamos definir una adición en V.

DEFINICIÓN. — Dados dos vectores libres $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, se llama suma de dichos vectores, y la representaremos mediante $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$, un nuevo vector libre obtenido de la siguiente manera : tomamos un punto O cualquiera del espacio y desde él trazamos un vector equipolente a $\overrightarrow{AB}$, que designaremos por $\overrightarrow{OA}$; en el extremo A de ese vector trazaremos el origen de un vector equipolente al $\overrightarrow{CD}$. El

vector que tiene como origen O y extremo D es el vector suma.



Se demuestra de manera inmediata que la suma así definida es una operación interna que verifica las propiedades siguientes :

— *Asociativa* : $(\vec{AB}+\vec{CD})+\vec{EF}=\vec{AB}+(\vec{CD}+\vec{EF})$.

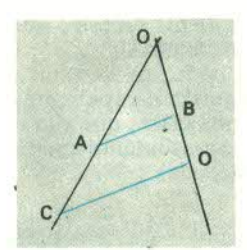
— *Conmutativa* : $\vec{AB}+\vec{CD}=\vec{CD}+\vec{AB}$.

— *Elemento neutro* : es el vector libre $\vec{AA}$, o sea, aquel cuyo origen y extremo coinciden; también se le denomina vector $\vec{O}$.

— *Elemento simétrico* del vector $\vec{AB}$ es el vector $\vec{BA}$, dado que su suma es el vector $\vec{O}$.

El conjunto V de los vectores libres es, como vemos, un grupo abeliano respecto de la adición.

Sea S el conjunto de los segmentos generales que, ya demostramos anteriormente, tiene estructura de semigrupo conmutativo respecto de la adición, y definamos en $S\times S$ la siguiente relación $(\overline{ab})\,R\,(\overline{cd}) \iff$ la recta AB es paralela a la CD.



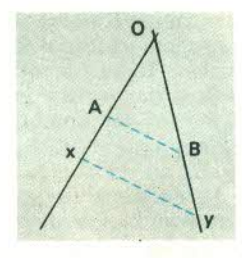
Donde $\overline{OA}=\bar{a}$, $\overline{OB}=\bar{b}$, $\overline{OC}=\bar{c}$ y $\overline{OD}=\bar{d}$.

La relación así definida es de equivalencia, y por lo tanto existe el conjunto cociente $S\times S/R$, que llamaremos *conjunto de las razones de segmentos*. Sus elementos, que son las clases de equivalencias, los representaremos por $\frac{\bar{a}}{\bar{b}}$, $\frac{\bar{m}}{\bar{n}}$, etc.

DEFINICIÓN. — Una razón $\frac{\bar{a}}{\bar{b}}$ define una aplicación de $\frac{\bar{a}}{\bar{b}}\,S \longrightarrow S$, llamada proporcionalidad de la siguiente forma :

$$\forall \bar{x}\in S, \frac{\bar{a}}{\bar{b}}(\bar{x})=\bar{y} \iff \frac{\bar{a}}{\bar{b}}=\frac{\bar{y}}{\bar{x}}.$$

Gráficamente, el segmento $\bar{y}$ originado por aplicación de la proporcionalidad al segmento $\bar{x}$ se obtiene de la siguiente manera :



$\overline{OA}=\bar{a}$
$\overline{OB}=\bar{b}$
$\overline{OX}=\bar{x}$
$\overline{OY}=\bar{y}$

AB paralela a XY.

DEFINICIÓN. — La suma de dos proporcionalidades $\frac{\bar{a}}{\bar{b}}+\frac{\bar{c}}{\bar{d}}$ es una aplicación de $S \longrightarrow S$ definida por :

$$\left(\frac{\bar{a}}{\bar{b}}+\frac{\bar{c}}{\bar{d}}\right)(\bar{x})=\frac{\bar{a}}{\bar{b}}(\bar{x})+\frac{\bar{c}}{\bar{d}}(\bar{x});\ \frac{\bar{a}}{\bar{b}}(\bar{x})=\bar{x}_1,\ \frac{\bar{c}}{\bar{d}}(\bar{x})=\bar{x}_2.$$

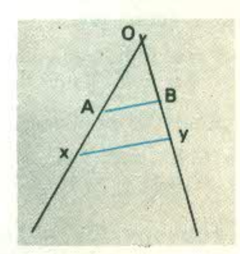
La suma así definida es una operación interna o, lo que es lo mismo, $\frac{\bar{a}}{\bar{b}}+\frac{\bar{c}}{\bar{d}}$ es otra proporcionalidad, pudiendo comprobarse que la proporcionalidad suma $\frac{\bar{a}}{\bar{b}}+\frac{\bar{c}}{\bar{d}}$ es $\frac{\bar{x}_1}{\bar{x}}+\frac{\bar{x}_2}{\bar{x}}=\frac{\bar{x}_1+\bar{x}_2}{\bar{x}}$. La proporcionalidad $\frac{\bar{x}_1+\bar{x}_2}{\bar{x}}$ nos define una razón entre los segmentos $\bar{x}_1+\bar{x}_2$ y el $\bar{x}$, que llamaremos suma de las razones $\frac{\bar{a}}{\bar{b}}+\frac{\bar{c}}{\bar{d}}$.

Con la operación así definida, el conjunto de las razones de segmentos S_r tiene estructura de semigrupo, pues verifica las propiedades asociativa y conmutativa.

Definamos en el conjunto S_r una nueva operación que va a ser el producto de razones de segmentos, para lo cual vamos a definir con prioridad el producto de proporcionalidades.

DEFINICIÓN. — Dadas dos proporcionalidades $\frac{\bar{a}}{\bar{b}}$ y $\frac{\bar{c}}{\bar{d}}$, se define $\frac{\bar{a}}{\bar{b}}\cdot\frac{\bar{c}}{\bar{d}}$ como una aplicación de $S\times S \longrightarrow S$ tal que $\left(\frac{\bar{a}}{\bar{b}}\cdot\frac{\bar{c}}{\bar{d}}\right)(\bar{x})=\frac{\bar{a}}{\bar{b}}\left[\frac{\bar{c}}{\bar{d}}(\bar{x})\right]$. Es inmediato que el producto de proporcionalidades es otra proporcionalidad $\frac{\bar{p}}{\bar{q}}$, donde $\bar{p}=\frac{\bar{c}}{\bar{d}}(\bar{n})$ y $\bar{n}=\frac{\bar{a}}{\bar{b}}(\bar{q})$.

Respecto de la operación producto ya definida, el conjunto S verifica las siguientes propiedades : 1. *asociativa*; 2. *conmutativa*; 3. *elemento neutro*, que viene dado por la razón $\frac{\bar{a}}{\bar{a}}$; 4. *elemento inverso* de la razón $\frac{\bar{a}}{\bar{b}}$ es la $\frac{\bar{b}}{\bar{a}}$. Para demostrarlo no hay más que aplicar la proporcionalidad $\frac{\bar{b}}{\bar{a}}$ a la $\frac{\bar{a}}{\bar{b}}$, $\forall \bar{x}$;



$$\frac{\bar{a}}{\bar{b}}(\bar{x})=\bar{y},\quad \frac{\bar{b}}{\bar{a}}(\bar{y})=\bar{x} \implies \frac{\bar{b}}{\bar{a}}\left[\frac{\bar{a}}{\bar{b}}(\bar{x})\right]=\bar{x} \implies \frac{\bar{b}}{\bar{a}}\cdot\frac{\bar{a}}{\bar{b}}=\text{la}$$

razón unidad $\frac{\bar{m}}{\bar{m}}$, y, por último, 5. propiedad *distributiva* :

$$\frac{\bar{a}}{\bar{b}}\left[\frac{\bar{c}}{\bar{d}}+\frac{\bar{e}}{\bar{f}}\right]=\frac{\bar{a}}{\bar{b}}\cdot\frac{\bar{c}}{\bar{d}}+\frac{\bar{a}}{\bar{b}}\cdot\frac{\bar{e}}{\bar{f}}.$$

DEFINICIÓN. — En $S_r \times S_r$ definimos la siguiente relación :

$$\left(\frac{\bar{a}}{\bar{b}},\frac{\bar{c}}{\bar{d}}\right) R \left(\frac{\bar{a}'}{\bar{b}'},\frac{\bar{c}'}{\bar{d}'}\right) \iff \frac{\bar{a}}{\bar{b}}+\frac{\bar{c}'}{\bar{d}'}=\frac{\bar{c}}{\bar{d}}+\frac{\bar{a}'}{\bar{b}'}.$$

Esta relación es de equivalencia.

El conjunto cociente $S_r \times S_r/R$, con las operaciones suma y producto que definiremos inmediatamente, tiene estructura de cuerpo y lo representaremos por S_K.

SUMA. — $\left(\frac{\bar{a}}{\bar{b}},\frac{\bar{c}}{\bar{d}}\right)+\left(\frac{\bar{e}}{\bar{f}},\frac{\bar{m}}{\bar{n}}\right)=\left(\frac{\bar{a}}{\bar{b}}+\frac{\bar{e}}{\bar{f}},\frac{\bar{c}}{\bar{d}}+\frac{\bar{m}}{\bar{n}}\right)$

PRODUCTO. — $\left(\frac{\bar{a}}{\bar{b}},\frac{\bar{c}}{\bar{d}}\right)\cdot\left(\frac{\bar{e}}{\bar{f}},\frac{\bar{m}}{\bar{n}}\right)=$

$$\left(\frac{\bar{a}}{\bar{b}}\cdot\frac{\bar{e}}{\bar{f}}+\frac{\bar{c}}{\bar{d}}\cdot\frac{\bar{m}}{\bar{n}},\frac{\bar{a}}{\bar{b}}\cdot\frac{\bar{m}}{\bar{n}}+\frac{\bar{c}}{\bar{d}}\cdot\frac{\bar{e}}{\bar{f}}\right).$$

DEFINICIÓN. — Sea $\bar{u}$ un segmento general fijo. Definimos una aplicación de S $\xrightarrow{m}$ S_K de la forma :

$$S \xrightarrow{m} S_K$$
$$\bar{x} \longrightarrow m(\bar{x})=\frac{\bar{x}}{\bar{u}}.$$

A dicha aplicación se le llama medida en S.

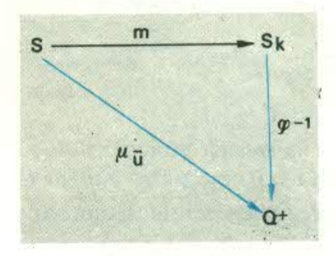
DEFINICIÓN. — Sea $S_u{}^*$ el conjunto de las razones de segmentos $\frac{p\bar{u}}{q\bar{u}}$ donde $p, q \in N$. Definimos φ :

$$Q^+ \longrightarrow S\bar{u}$$
$$\frac{p}{q} \longrightarrow \frac{p\bar{u}}{q\bar{u}}.$$

Dicha correspondencia es una aplicación.

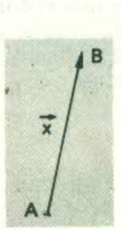
DEFINICIÓN. — Un segmento $\bar{x}$ se llama conmensurable si $m(\bar{x}) \in S_{\bar{u}}$.

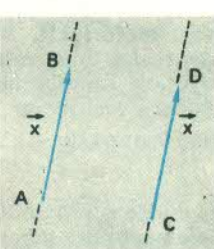
Isomorfismo fundamental. — A todo segmento conmensurable $\bar{x}$ se le puede hacer corresponder un número racional mediante la aplicación μ_u, definida por



$$\mu_u(\bar{x})=\varphi^{-1}\circ m(\bar{x}).$$

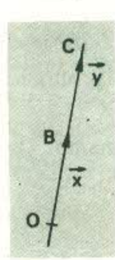
Espacio vectorial de los vectores libres. — Fijado un segmento unidad $\bar{u}$, llamaremos módulo del vector $\vec{x}$ al número racional $\varphi^{-1}\cdot m(\overline{AB})$, donde $\overline{AB}$ es el segmento correspondiente al vector $\vec{x}$, y representaremos $|\vec{x}|=\frac{|\overrightarrow{AB}|}{\bar{u}}$.





Llamaremos dirección del vector $\vec{x}$ a la dirección de cualquier recta que contenga a un representante de dicho vector.

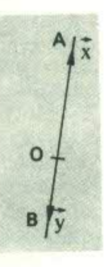
Dos vectores $\vec{x}$ e $\vec{y}$, se dice tienen el mismo sentido, cuando tomando dos representantes suyos cualesquiera, con el mismo origen O, uno de ellos contiene al otro. Cuando dicho representante tiene únicamente en común el origen O, se dice que tienen sentidos opuestos.



$\overrightarrow{OB}$ representante de $\vec{x}$
$\overrightarrow{OC}$ representante de $\vec{y}$

$\vec{x}$ e $\vec{y}$ del mismo sentido

$\overrightarrow{OA}$ representante de x
$\overrightarrow{OB}$ representante de $\vec{y}$



$\vec{x}$ e $\vec{y}$ de sentidos opuestos

Dos vectores libres $\vec{x}$ e $\vec{y}$ son iguales cuando tienen igual módulo, igual sentido e igual dirección. Esta relación es de equivalencia.

Definamos ahora la aplicación de $V \times S_K \xrightarrow{\cdot} V$ de la siguiente manera :

$\forall$ razón $r \in S_K$, $\forall \vec{v} \in V$; $\vec{v} \times r \longrightarrow \overrightarrow{r \cdot v}$, definido por :

1. $|\overrightarrow{r \cdot v}| = |r| \cdot |\vec{v}|$.
2. $\overrightarrow{r \cdot v}$ tiene la misma dirección de $\vec{v}$.
3. Si la razón $r > 0 \implies \overrightarrow{r \cdot v}$, tiene el mismo sentido que $\vec{v}$; si $r < 0$, tienen sentidos opuestos.

NOTA : Hemos escrito r por comodidad, dado que en realidad habríamos de escribir

$$\frac{\bar{a}}{\bar{b}}; \quad \text{entonces} \quad \left|\frac{\bar{a}}{\bar{b}}\right| = \varphi^{-1}\left(\frac{\overline{au}}{\overline{bu}}\right) = \frac{a}{b}.$$

Por tanto, ya hemos conseguido el propósito que nos guiaba : encontrar un espacio vectorial $(V \cdot)$, donde V es un grupo abeliano y $\cdot$ una aplicación de $V \times S_K \longrightarrow V$ siendo S_K un cuerpo.

El espacio vectorial R. — Sabemos que el conjunto de los números reales tiene estructura de cuerpo conmutativo, luego R tiene un subgrupo aditivo abeliano; nada nos impide entonces considerar la aplicación

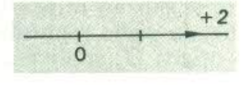
$$\begin{array}{ccc} R \times R & \longrightarrow & R, \\ \alpha, \boldsymbol{a} & \longrightarrow & \alpha\boldsymbol{a} \end{array}$$

donde α es un elemento de R, considerado como cuerpo, y $\boldsymbol{a}$ es un elemento del subgrupo aditivo de R, que es un vector. El producto es el vector $\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{a}$, cuyo módulo es el producto $\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{a}$ considerados ambos como números reales.

La dirección de $\boldsymbol{\alpha a}$ es la de $\boldsymbol{a}$, y su sentido es el mismo de $\boldsymbol{a}$, si $\alpha > 0$, y opuesto al de $\boldsymbol{a}$ si $\alpha < 0$.

De esta manera, cada número real puede ser considerado como un vector, y a la recta real se le llama entonces *recta vectorial*, designándosela indistintamente mediante V_1 ó R^1.

Vectores $+\vec{1}$ y $-\vec{1}$



Vector $+\vec{2}$

Espacio vectorial R^n. — Consideremos el producto cartesiano de $\overbrace{R \times R \times \ldots \times R}^{n \text{ veces}}$, y en él definamos la suma de dos elementos $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in R$, $\boldsymbol{x} = (x_1 x_2 \ldots x_n)$, $\boldsymbol{y} = (y_1 y_2 \ldots y_n)$ de la manera :

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_1 \ldots x_n) + (y_1 \ldots y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots x_n + y_n).$$

La suma así definida cumple las propiedades características para que el par $(R^n, +)$ sea un grupo abeliano.

Consideremos un cuerpo K cualquiera, que puede ser el mismo R, y definamos la aplicación :

$$K \times (\overbrace{R \times R \times \ldots \times R}^{n \text{ veces}}) \longrightarrow \overbrace{R \times \ldots \times R}^{n \text{ veces}}, \quad \text{tal que}$$

$$\alpha\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) \longrightarrow (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n) \in R \times \ldots \times R.$$

El par $(R^n, \cdot)$ tiene estructura de espacio vectorial que llamaremos R^n.

Subespacios vectoriales. — Una parte $E \subset V$, donde V es un espacio vectorial sobre K, se dice que es un subespacio vectorial de V, cuando E es un espacio vectorial respecto de las leyes de composición definidas en V; esto equivale a decir que :

$$\forall \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}' \in E \implies \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}' \in E,$$
$$\forall \alpha \in K, \forall \boldsymbol{v} \in E \implies \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{v} \in E.$$

Estas dos condiciones se pueden resumir en una :

$$\forall \alpha_1 \beta \in K, \quad \forall \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}' \in E \implies \alpha \cdot \boldsymbol{v} + \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{v}' \in E.$$

Intersección de subespacios. — Dados dos subespacios E_1 y E_2 de V, el conjunto de los vectores comunes a E_1 y E_2 constituye otro subespacio de V que llamaremos *subespacio intersección* de los subespacios E_1 y E_2.

En efecto, $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in E_1 \cap E_2$; veamos que $\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y} \in E_1 \cap E_2$.

$$\text{Si } \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in E_1 \cap E_2 \implies \left.\begin{array}{l} \alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y} \in E_1 \\ \alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y} \in E_2 \end{array}\right\} \implies \alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y} \in E_1 \cap E_2.$$

Suma de subespacios. — Llamaremos suma de los subespacios vectoriales E_1 y E_2 al conjunto de los vectores de las formas $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$, donde $\boldsymbol{x} \in E_1$, $\boldsymbol{y} \in E_2$.

Dicho conjunto de vectores $E_1 + E_2$ es un nuevo subespacio vectorial. Para demostrarlo habremos de ver que se verifica :

$$\forall \boldsymbol{z_1 z_2} \in E_1 + E_2, \alpha \cdot \boldsymbol{z_1} + \beta \cdot \boldsymbol{z_2} \in E_1 + E_2.$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } \boldsymbol{z_1} \in E_1 + E_2 \implies \boldsymbol{z_1} = \boldsymbol{x_1} + \boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{x_1} \in E_1, \boldsymbol{y_1} \in E_2 \\ \text{Si } \boldsymbol{z_2} \in E_1 + E_2 \implies \boldsymbol{z_2} = \boldsymbol{x_2} + \boldsymbol{y_2}, \boldsymbol{x_2} \in E_1, \boldsymbol{y_2} \in E_2 \end{array}\right\}$$

$\alpha\boldsymbol{z_1} + \beta\boldsymbol{z_2} = \alpha\,(\boldsymbol{x_1} + \boldsymbol{y_1}) + \beta\,(\boldsymbol{x_2} + \boldsymbol{y_2}) = \alpha\boldsymbol{x_1} + \alpha\boldsymbol{y_1} + \beta\boldsymbol{x_2} + \beta\boldsymbol{y_2} = (\alpha\boldsymbol{x_1} + \beta\boldsymbol{x_2}) + (\alpha\boldsymbol{y_1} + \beta\boldsymbol{y_2}) \in E_1 + E_2$, puesto que $\alpha\boldsymbol{x_1} + \beta\boldsymbol{x_2} \in E_1$, $\alpha\boldsymbol{y_1} + \beta\boldsymbol{y_2} \in E_2$.

El subespacio vectorial $E_1 + E_2 \subset V$ contiene como subespacios propios a E_1 y E_2.

En efecto, $\forall \boldsymbol{x} \in E_1$, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} + 0$, pero $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{0} \in E_1 + E_2 \implies E_1 \in {}_2 + E_2$:

$\forall \boldsymbol{y} \in E_2$, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{y}$, pero
$$\boldsymbol{0} + \boldsymbol{y} \in E_1 + E_2 \implies E_2 \subset E_1 + E_2.$$

La definición anterior de subespacio suma de dos subespacios puede ampliarse a un número n finito de subespacios $E_1 \ldots E_n \cdot$:

$$E_1 + E_2 + \ldots + E_n = \{\boldsymbol{x} \in V / \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x_1} + \boldsymbol{x_2} + \ldots + \boldsymbol{x_n}, \boldsymbol{x_i} \in E_i\}.$$

Dependencia e independencia lineal. — Un conjunto de vectores $A \subset V$ se dice que es linealmente dependiente cuando existen n números reales $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, no todos iguales a cero, tales que se verifica :

$$\alpha_1 \boldsymbol{x_1} + \alpha_2 \boldsymbol{x_2} + \ldots + \alpha_n \boldsymbol{x_n} = 0, \quad \boldsymbol{x_i} \in A \,\forall i.$$

Un vector $\boldsymbol{x}$ diremos que depende linealmente del conjunto de vectores A si existen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n \in R / \boldsymbol{x} = \alpha_1 \boldsymbol{x_1} + \ldots + \alpha_n \boldsymbol{x_n}$.

Variedades lineales de un espacio vectorial. — Llamaremos variedad lineal engendrada por el conjunto $A \subset V$, y escribiremos L (A), al conjunto de todos los vectores que dependen linealmente de A. Al conjunto $A \subset V$ se le llama conjunto de generadores de L (A).

TEOREMA. — Las variedades lineales de V son subespacios vectoriales de V.

En efecto, sean x e $y \in L(A)$, veamos que

$$\gamma x + \delta y \in L(A) \forall \gamma, \delta \in K \forall x, y \in A.$$

Si $x \in L(A) \implies x = \sum_1^m \alpha_i x_i,\ x_i \in A,\ \alpha_i \in K.$

Si $y \in L(A) \implies y = \sum_1^m \beta_i x_i,\ x_i \in A,\ \beta_i \in K.$

$$\gamma x + \delta y = \gamma \sum_1^m \alpha_i x_i + \delta \sum_1^m \beta_i x_i = \sum_1^m (\gamma \alpha_i) x_i + \sum_1^m (\delta \beta_i) x_i$$

$$= \sum_1^m (\gamma \alpha_i + \delta \beta_i) x_i,$$

haciendo $(\gamma \alpha_i + \delta \beta_i) = \varepsilon_i \implies \gamma x + \delta y = \sum_1^m \varepsilon_i x_i$, lo cual significa que la variedad lineal L(A) es un subespacio vectorial.

Espacio vectorial de tipo finito. — *Base de un espacio vectorial.* — *Un espacio vectorial se llama de tipo finito, cuando puede ser engendrado por un conjunto finito de generadores.*

Un conjunto de vectores se dice linealmente independiente, cuando no es linealmente dependiente.

Un conjunto de generadores de un espacio vectorial V, *que sea linealmente independiente, se llama base de dicho espacio vectorial.*

Admitiremos sin demostración que todo espacio vectorial de tipo finito posee una base. Con respecto a esa base, todo vector V se puede escribir de manera única, en función de los elementos de esa base $e_1, e_2, \ldots e_n$, de la forma $V = \sum_1^n v^i e_i$, donde $v \in R$, siendo R el cuerpo base sobre el que está definido el espacio vectorial V. Observemos que dicho cuerpo R (cuerpo de los números reales) se puede sustituir por cualquier cuerpo K conmutativo. A los elementos $v^i \in R$ se les llama coordenadas del vector v respecto de la base $B = \{e_1, e_2, \ldots e_n\}$.

Dicha manera de escribir $V = \sum_1^n v^i e_i$ es única, pues, considerando que existiese otra forma $v = \sum_1^n \alpha^i e_i$, tendríamos que $\sum_1^n v^i e_i = \sum_1^n \alpha^i e_i \iff (v^1 - \alpha^1) e_1 + (v^2 - \alpha^2) e_2 + \ldots + (v^n - \alpha^n) e_n = \mathbf{0}$; dado que el conjunto B es linealmente independiente $\implies v^1 - \alpha^1 = 0;\ v^2 - \alpha^2 = 0;\ v^n - \alpha^n = 0 \implies v^i - \alpha^i = 0 \forall i \iff v^i = \alpha^i \forall i$, c.q.d.

DEFINICIÓN. — Se llama *dimensión* de un espacio vectorial V al número de vectores de una base de dicho espacio.

TEOREMA. — Dado un espacio V de dimensión finita, todas las bases de V son finitas y tienen el mismo número de vectores.

Ejercicio : sea $B = \{e_1, e_2\}$ una base del espacio vectorial V_2 de dos dimensiones. Demostrar que el conjunto $B^1 = \{a_1, a_2\}$, $a_1 = e_1 + e_2$, $a_2 = e_1 - 2e_2$ es otra base de V_2. Para ver esto hemos de comprobar que : *a*) B^1 es un conjunto de generadores; *b*) B^1 es un conjunto de vectores linealmente independientes.

a) Sea x un vector cualquiera de V_2; $x = x^1 e_1 + x^2 e_2$; sustituyendo e_1 y e_2 por los valores que encontraremos seguidamente, tenemos :

$$\begin{array}{l} a_1 = e_1 + e_2 \\ a_2 = e_1 - 2e_2 \\ \hline a_1 - a_2 = 3e_2 \implies e_2 = \dfrac{a_1 - a_2}{3} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2a_1 = 2e_1 + 2e_2 \\ a_2 = e_1 - 2e_2 \\ \hline 2a_1 + a_2 = 3e_1 \implies e_1 = \dfrac{2a_1 + a_2}{3} \end{array}$$

$$x = x^1 \frac{2a_1 + a_2}{3} + x^2 \frac{a_1 - a_2}{3}$$

$$= \frac{2a_1 x^1 + x^1 a_2 + x^2 a_1 - x^2 a_2}{3}$$

$$= \frac{a_1 (x^2 + 2x^1)}{3} + \frac{a_2 (x^1 - x^2)}{3} \implies x = a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_2,$$

donde $\alpha_1 = \dfrac{x^2 + 2x^1}{3}$, $\alpha_2 = \dfrac{x^1 - x^2}{3}$, y hemos visto de esta manera que a_1 y a_2 son generadores.

b) Sea una expresión de la forma $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 = 0$; veamos que $\alpha_1 = 0$ y $\alpha_2 = 0$. En efecto, $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 = \alpha_1 (e_1 + e_2) + \alpha_2 (e_1 - 2e_2) = \alpha_1 e_1 + \alpha_1 e_2 + \alpha_2 e_1 - \alpha_2 \cdot 2e_2 = e_1 (\alpha_1 + \alpha_2) + e_2 (\alpha_1 - 2\alpha_2)$. Haciendo esta última expresión igual a cero tenemos :

$e_1 (\alpha_1 + \alpha_2) + e_2 (\alpha_1 - 2\alpha_2) = 0$, pero $\{e_1, e_2\}$ es linealmente independiente $\implies \left.\begin{array}{l} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 - 2\alpha_2 = 0 \end{array}\right\} \implies$ $3\alpha_2 = 0 \implies \alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 0$. Es decir, hemos encontrado finalmente que $\{a_1, a_2\}$ es linealmente independiente.

Ejercicio : encontrar la relación entre las coordenadas de un vector v en las bases B y B' del ejercicio anterior.

Sea x un vector de V_2, cuyas coordenadas en función de la base B son $x^1 x^2$, y en función de la base B' $x_1 x_2$,

$$\begin{array}{l} x = x^1 e_1 + x^2 e_2 \\ x = x_1 a_1 + x_2 a_2. \end{array}$$

Sustituyendo a_1 y a_2 por sus valores en función de la base B encontramos :

$x = x_1 (e_1 + e_2) + x_2 (e_1 - 2e_2) = x_1 e_2 + x_1 e_1 + x_2 e_1 - 2x_2 e_2 = e_1 (x_1 + x_2) + e_2 (x_1 - 2x_2)$, igualando esta expresión a la $x = x^1 e_1 + x^2 e_2$, tenemos :

$$\begin{array}{l} x^1 = x_1 + x_2 \\ x^2 = x_1 - 2x_2. \end{array}$$

Ecuaciones que se llaman del cambio de base.

Dimensión de una variedad lineal. — TEOREMA DE LA BASE INCOMPLETA. — Dada una variedad lineal L(H), *llamaremos dimensión de* L(H), *y escribimos* Dim L(H), *al máximo número de generadores linealmente independientes de dicha variedad.*

TEOREMA. — Dada una variedad lineal L de dimensión r y una base de la misma $\{e_1 e_2 \ldots e_r\}$, podemos ampliar dicha base con $n - r$ vectores, tal que el conjunto $\{e_1 e_2 \ldots e_r u_{r+1} u_{r+2} \ldots u_n\}$ sea una base del espacio vectorial de n dimensiones, del cual L es una variedad lineal.

Ejemplo : dada la variedad lineal $L = L(\boldsymbol{a}_1 \boldsymbol{a}_2)$, donde $\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$ $\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3$.

Hallar : 1. una base de L; 2. una base de V_3, ampliada con la base de L.

1. Veamos si $\{\boldsymbol{a}_1 \boldsymbol{a}_2\}$ forman una base de L; dado que son generadores, sólo hemos de ver si son linealmente independientes :

$$\alpha_1 \cdot \boldsymbol{a}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{a}_2 = 0 \Longrightarrow \alpha_1 \cdot (\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2) + \alpha_2 (\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3) = \boldsymbol{e}_1(\alpha_1 + \alpha_2) + \boldsymbol{e}_2(\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_2 \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{0},$$

como $\{e_1 e_2 e_3\}$ es linealmente independiente

$$\Longrightarrow \left.\begin{matrix} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \alpha_1 = 0 \quad \text{y} \quad \alpha_2 = 0;$$

luego $\{\boldsymbol{a}_1 \boldsymbol{a}_2\}$ es una base de L.

2. Dado que $\{\boldsymbol{a}_1 \boldsymbol{a}_2\}$ son dos vectores linealmente independientes de V_3, hemos de buscar otro vector de V, que no dependa linealmente de ellos.

Un vector $\boldsymbol{v}$ que dependa linealmente de ellos será de la forma :

$$V = v^1 \boldsymbol{a}_1 + v^2 \boldsymbol{a}_2 = v^1(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2) + v^2(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3) = \boldsymbol{e}_1(v^1 + v^2) + \boldsymbol{e}_2(v^1 + v^2) + \boldsymbol{e}_3 v^2 \Longrightarrow$$

$$V = v_1 \boldsymbol{e}_1 v_2 \boldsymbol{e}_2 + v_3 \boldsymbol{e}_3.$$

$$\begin{aligned} v_1 &= v^1 + v^2 \\ v_2 &= v^1 + v^2 \\ v_3 &= v^2 \end{aligned}$$

o sea cualquier vector V de coordenadas v_1, v_2, v_3 respecto de $B(\boldsymbol{e}_1 \boldsymbol{e}_2 \boldsymbol{e}_3)$, que cumpla las tres relaciones anteriores, será linealmente independiente de $\boldsymbol{a}_1$ y $\boldsymbol{a}_2$. En caso contrario será l.i.

El vector $\boldsymbol{e}_1 = (1\ 0\ 0)$, no verifica las relaciones anteriores, lo que implica que la terna $\{\boldsymbol{a}_1 \boldsymbol{a}_2 \boldsymbol{e}_1\}$, es una base de V_3.

Cambio de base. — TEOREMA. — Sean $B = \{\boldsymbol{e}_1 \boldsymbol{e}_2 \ldots \boldsymbol{e}_n\}$ y $B' = \{\boldsymbol{u}_1 \ldots \boldsymbol{u}_n\}$ dos bases del espacio vectorial V_n. Sean $(x_1 \ldots x_n)$ y $(x^1, \ldots x^n)$ las coordenadas de un mismo vector $\boldsymbol{x}$ respecto de las bases B y B' respectivamente; se verifica que :

$$\begin{aligned} x^1 &= x_1 a_{11} + x_2 a_{21} + \ldots + x_n a_{n1} \\ x^2 &= x_1 a_{12} + x_2 a_{22} \ldots + x_n a_{n2} \\ &\vdots \\ x^n &= x_1 a_{1n} + x_2 a_{2n} \ldots + x_n a_{nn} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} x_1 &= x^1 b_{11} + x^2 b_{21} + \ldots + x^n b_{n1} \\ x_2 &= x^1 b_{12} + x^2 b_{22} + \ldots + x^n b_{n2} \\ &\vdots \\ x_n &= x^1 b_{1n} + x^2 b_{2n} + \ldots + x^n b_{nn} \end{aligned}$$

donde las a_{ij} y b_{ij} representan :

$$\boldsymbol{e}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \boldsymbol{u}\,; \text{ y } \boldsymbol{u}_j = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} \boldsymbol{e}_i.$$

En efecto, sea $\boldsymbol{x} = x_1\ \boldsymbol{e}_1 + \ldots + x_n \boldsymbol{e}_n = x^1 \boldsymbol{u}_1 + \ldots + x^n \boldsymbol{u}_n$, sustituyendo $\boldsymbol{u}_i$ por su valor, queda :

$$\boldsymbol{x} = x_1 \boldsymbol{e}_1 + \ldots + x_n \boldsymbol{e}_n = x^1(b_{11}\boldsymbol{e}_1 + b_{12}\boldsymbol{e}_2 + \ldots + b_{1n}\boldsymbol{e}_n) + x^2(b_{21}\boldsymbol{e}_1 + b_{22}\boldsymbol{e}_2 + \ldots + b_{2n}\boldsymbol{e}_n) + \ldots + x^n(b_{n1}\boldsymbol{e}_1 + b_{n2}\boldsymbol{e}_2 + \ldots b_{nn}\boldsymbol{e}_n) = \boldsymbol{e}_1(x^1 b_{11} + x^2 b_{21} + \ldots + x^n b_{n1}) + \boldsymbol{e}_2(x^1 b_{12} + x^2 b_{22} + \ldots + x^n b_{n2}) + \ldots + \boldsymbol{e}_n(x^1 b_{1n} + x^2 b_{2n} + \ldots + x^n b_{nn}).$$

Igualando coeficientes tenemos :

$$\begin{aligned} x_1 &= x^1 b_{11} + x^2 b_{21} + \ldots + x^n b_{n1} \\ x_2 &= x^1 b_{12} + x^2 b_{22} + \ldots + x^n b_{n2} \\ &\vdots \\ x_n &= x^1 b_{1n} + x^2 b_{2n} + \ldots + x^n b_{nn}. \end{aligned}$$

Operando de manera análoga en la expresión $\boldsymbol{x} = x_1 \boldsymbol{e}_1 + \ldots x_n \boldsymbol{e}_n$ encontramos el otro grupo de fórmulas que necesitamos :

$$\begin{aligned} x^1 &= x_1 a_{11} + x_2 a_{21} + \ldots + x_n a_{n1} \\ x^2 &= x_1 a_{12} + x_2 a_{22} + \ldots + x_n a_{n2} \\ &\vdots \\ x^n &= x_1 a_{1n} + x_2 a_{2n} + \ldots + x_n a_{nn}. \end{aligned}$$

Ejercicio : sean $B = \{\boldsymbol{e}_1 \boldsymbol{e}_2 \boldsymbol{e}_3\}$ y $B' = \{\boldsymbol{u}_1 \boldsymbol{u}_2 \boldsymbol{u}_3\}$, $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3$ dos bases de V_3. Dado el vector $\boldsymbol{v}$ (1 1 1) respecto de la primera base B, encontrar sus coordenadas $(v_1 v_2 v_3)$ respecto de la base B' :

$$\boldsymbol{v}\,(1\ 1\ 1) = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3$$

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{u}_2 &= \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} \boldsymbol{e}_2 &= \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{u}_1 \\ \boldsymbol{e}_1 &= \boldsymbol{u}_2 \\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{e}_3 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{e}_3 &= 2\boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_3 \\ \boldsymbol{e}_1 &= \boldsymbol{u}_2 \\ \boldsymbol{e}_2 &= \boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{u}_1 \end{aligned}\right\}$$ sustituyendo esos valores en $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3$, encontramos :

$\boldsymbol{v} = v_1 \boldsymbol{u}_1 + v_2 \boldsymbol{u}_2 + v_3 \boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{u}_1 + 2\boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_3 = -2\boldsymbol{u}_1 + 3\boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{u}_3 \Longleftrightarrow v_1 = -2$, $v_2 = 3$, $v_3 = -1$, y las coordenadas respecto de la base B' serán $\boldsymbol{v}\,(-2\ 3\ -1)$.

Homomorfismos entre espacios vectoriales

DEFINICIÓN. — Dada una aplicación $f : V \longrightarrow V'$, V y V' espacios vectoriales, diremos que f es homomorfismo si se verifica :

1. $f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y})\ \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$.
2. $f(\alpha \boldsymbol{x}) = \alpha \cdot f(\boldsymbol{x})\ \forall \boldsymbol{x} \in V$, $\forall \alpha \in K$, siendo K el cuerpo base sobre el que han sido construidos V y V'.

PROPOSICIÓN. — Si f es un homomorfismo de $V \longrightarrow V'$ se verifica :

1. $f(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$.
2. Si los vectores $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots \boldsymbol{x}_n$ son linealmente dependientes $\Longrightarrow$ los vectores $f(\boldsymbol{x}_1), f(\boldsymbol{x}_2), \ldots f(\boldsymbol{x}_n)$ también lo son.
3. Im f es un subespacio vectorial de V'.
4. Ker f es un subespacio vectorial de V.

Demostración :

1. Sabemos que $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{x} \Longrightarrow f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{0}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{0}) = f(\boldsymbol{x}) \Longleftrightarrow f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{0})$, pero $f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0} \Longrightarrow f(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$, c.q.d.

2. Si $\boldsymbol{x}_1, \ldots \boldsymbol{x}_n$ son linealmente dependientes $\Longrightarrow$ una expresión de la forma $\alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \ldots + \alpha_n \boldsymbol{x}_n = 0$ implica que no todas las $\alpha_i = 0$.

Aplicando f : $f(\alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \ldots + \alpha_n \boldsymbol{x}_n) = f(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0} \Longrightarrow \alpha_1 f(\boldsymbol{x}_1) + \ldots + \alpha_n f(\boldsymbol{x}_n) = \boldsymbol{0}$; como anteriormente hemos supuesto que no todas las $\alpha_i = 0$, el teorema queda demostrado.

3. Hemos de verificar que $\forall \boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}' \in \operatorname{im} f \Longrightarrow \alpha \boldsymbol{x}' + \beta \boldsymbol{y}' \in \operatorname{im} f$. Si $\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}' \in \operatorname{im} f \Longrightarrow \boldsymbol{x}' = f(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{y}' = f(\boldsymbol{y})\ \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$. Ahora bien, $\alpha \boldsymbol{x}' + \beta \boldsymbol{y}' = \alpha f(\boldsymbol{x}) + \beta f(\boldsymbol{y}) = f(\alpha \boldsymbol{x} + \beta \boldsymbol{y}) \in \operatorname{im} f$.

4. Sabemos que $\operatorname{Ker} f = \{\boldsymbol{x} \in V / f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}\}$.

Sean $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \operatorname{Ker} f \Longrightarrow \alpha \boldsymbol{x} + \beta \boldsymbol{y} \in \operatorname{Ker} f$, puesto que $f(\alpha \boldsymbol{x} + \beta \boldsymbol{y}) = \alpha \cdot f(\boldsymbol{x}) + \beta \cdot f(\boldsymbol{y}) = \alpha \cdot \boldsymbol{0} + \beta \cdot \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$.

5. — Matrices y determinantes

Definiciones. Multiplicación de matrices. Transposición. *Propiedades de la aplicación transposición.* Matrices diagonales y triangulares. Operaciones matriciales con cajas. *Multiplicación*. Anillo de las matrices cuadradas. Polinomios de matrices. — Determinantes : Introducción. Propiedades de los determinantes. Adjuntos y menores complementarios. Matriz inversa de una matriz cuadrada.

Definiciones. — I. Dado un cuerpo K, se denomina matriz sobre K, de m filas y n columnas, a un conjunto de la forma :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \cdots\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \cdots\cdots a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \cdots\cdots a_{mn} \end{pmatrix}$$

Donde las $a_{ij} \in K$.

A la matriz anterior se le denomina de dimensión $m \times n$.

Dos matrices se llaman equivalentes cuando $a_{ij} = b_{ij} \; \forall i, j$.

En lo que sigue, vamos a suponer que el cuerpo K es el de los números reales.

II. — Dadas dos matrices de dimensión $m \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots\cdots a_{1n} \\ \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots\cdots a_{mn} \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} b_{n} \cdots\cdots b_{1n} \\ \vdots \qquad \vdots \\ b_{m1} \qquad b_{mn} \end{pmatrix}$$

Se llama matriz suma A + B a la matriz obtenida sumando cada uno de los elementos de igual índice de una y de otra.

Si representamos a la matriz A en la forma $A = (a_{ij})$ y a la $B = (b_{ij})$, entonces la matriz $A + B = C = (c_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$.

Respecto de dicha operación suma, el conjunto de las matrices $\mathcal{M}_{m \times n}$ verifica las propiedades :

1. *Asociativa*. $(A + B) + C = A + (B + C)$.
2. *Conmutativa*. $A + B = B + A$.
3. *Elemento neutro*.

Que es la matriz $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \cdots\cdots 0 \\ 0 & \cdots\cdots\cdots 0 \\ \vdots & \\ 0 & \cdots\cdots\cdots 0 \end{pmatrix}$

4. *Elemento simétrico*. De la matriz (a_{ij}) es la $(-a_{ij})$.

La demostración de los puntos 1, 2, 3 y 4 es inmediata si recordamos las propiedades de los números reales.

Respecto de la suma el conjunto $\mathcal{M}_{m \times n}$ tiene estructura de grupo abeliano.

III. — Definimos una aplicación de

$K \times \mathcal{M}_{m \times n} \xrightarrow{p} \mathcal{M}_{m \times n}$ de tal manera que a la pareja $(\alpha, a_{ij}) \xrightarrow{p} (\alpha \cdot a_{ij})$, $(a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m \times n}$, $\alpha \in K$, $(\alpha \cdot a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m \times n}$.

En nuestro estudio vamos a considerar matrices sobre el cuerpo R de los números reales. De esta manera podemos escribir que :

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$$

El conjunto $\mathcal{M}_{m \times n}$ con la aplicación p definida tiene estructura de espacio vectorial de dimensión $m \times n$.

Como todo espacio vectorial, el conjunto $\mathcal{M}_{m \times n}$ tiene base; una de estas bases, llamada canónica, está formada por las $m \times n$ matrices, que tienen nulos todos sus elementos a excepción de uno solo que es la unidad y que está situado en el lugar de intersección de la fila i-ésima, con la columna k-ésima. De esta manera la base canónica de $\mathcal{M}_{2 \times 2}$ está formada por las cuatro matrices :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Multiplicación de matrices. — Consideremos los conjuntos $\mathcal{M}_{m \times n}, \mathcal{M}_{n \times q}, \mathcal{M}_{m \times q}$, y definamos una aplicación que llamaremos multiplicación de la manera siguiente : $\mathcal{M}_{m \times n} \times \mathcal{M}_{n \times q} \longrightarrow \mathcal{M}_{m \times q}$:

$$\begin{pmatrix} a_{11}\, a_{12} \cdots a_{1n} \\ \vdots \\ a_{m1} \cdots a_{mn} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{11} \cdots b_{1q} \\ b_{21} \quad \vdots \\ \vdots \\ b_{n1} \cdots b_{nq} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1} \cdots & a_{11}b_{1q} + a_{12}b_{2q} + \cdots + a_{1n}b_{nq} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + \cdots + a_{2n}b_{n1} \cdots & a_{21}b_{1q} + a_{22}b_{2q} + \cdots + a_{2n}b_{nq} \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1}b_{11} + \cdots\cdots + a_{mn}b_{n1} \cdots & a_{m1}b_{1q} + a_{m2}b_{2q} + \cdots + a_{mn}b_{nq} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} \cdots c_{1q} \\ \vdots \\ c_{m1} \cdots c_{mq} \end{pmatrix}$$

donde cada elemento c_{ij} lo hemos obtenido como suma de los productos de los elementos de la fila i por la columna j.

En la misma definición, está implícita la condición de que sólo es posible la multiplicación entre dos matrices, cuando el número de columnas de la primera matriz sea igual al número de filas de la segunda.

Ejemplo : hallar el producto

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1\cdot1+2\cdot0+3\cdot2 & 1\cdot2+2\cdot1+3\cdot2 \\ 0\cdot1+1\cdot0+2\cdot2 & 0\cdot2+1\cdot1+2\cdot2 \\ 0\cdot1+0\cdot0+1\cdot2 & 0\cdot2+0\cdot1+1\cdot2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 4 & 5 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

La matriz resultante tiene el mismo número de filas que la primera matriz y de columnas que la segunda.

PROPIEDADES. — El producto de matrices verifica :

1. *Asociativa.* $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$.
2. $A \times I = A$, $\forall A$, donde I es la matriz que tiene todos sus elementos iguales a cero, excepto los de la diagonal principal que son todos igual a uno; $a_{ii} = 1$, $a_{ij} = 0 \, \forall \, i \neq j$.

Transposición. — Es una aplicación unaria en el conjunto $\mathcal{M}_{m \times n}$ que hace corresponder a una matriz $A = (a_{ij})$ otra matriz $B = (a_{ji})$; o sea la transposición hace cambiar las filas por columnas y las columnas por filas. A la matriz transpuesta de la A, la designaremos por A^T o por A'.

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12} \cdots\cdots a_{1n} \\ a_{21}a_{22} \cdots\cdots a_{2n} \\ \vdots \\ a_{m1}a_{m2} \cdots\cdots a_{mn} \end{pmatrix} \Longrightarrow A^T = \begin{pmatrix} a_{11}a_{21} \cdots\cdots a_{m1} \\ a_{12}a_{22} \cdots\cdots a_{m2} \\ \vdots \\ a_{1n}a_{2n} \cdots\cdots a_{mn} \end{pmatrix}$$

Propiedades de la aplicación transposición. —

1. $(A^T)^T = A$.
2. $(A + B)^T = A^T + B^T$.
3. $(A \times B)^T = B^T \times A^T$.

DEFINICIONES. — *Una matriz* A *es simétrica si* $A^T = A$. *Una matriz* A *es antisimétrica si* $A^T = -A$.

Matrices diagonales y triangulares. — Una matriz cuadrada $m \times n$ se llama *diagonal*, si todos los elementos de la matriz son iguales a cero, excepto los de la diagonal principal. El conjunto de dichas matrices constituye un subespacio vectorial de m dimensiones.

Se llama *triangular* a una matriz cuadrada en la que todos sus elementos por encima o por debajo de la diagonal principal son nulos.

Operaciones matriciales con cajas. — Subdividir una matriz en cajas equivale a considerarla como una matriz cuyos elementos son a su vez matrices. Esto nos lleva a considerar los elementos de dicha matriz no como elementos pertenecientes a un cuerpo K, sino como pertenecientes a un conjunto más general C.

Para este caso no hemos definido las operaciones adición y multiplicación; pero es posible definirlas como una generalización de la suma y multiplicación normales entre matrices normales.

DEFINICIÓN :

$$\text{Dadas dos matrices } A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{pmatrix}, \text{ llamaremos } A+B = \begin{pmatrix} A_{11}+B_{11} & A_{12}+B_{12} & A_{13}+B_{13} \\ A_{21}+B_{21} & A_{22}+B_{22} & A_{23}+B_{23} \\ A_{31}+B_{31} & A_{32}+B_{32} & A_{33}+B_{33} \end{pmatrix}$$

Esta operación siempre es posible cuando : *a*) las matrices A y B tengan las mismas dimensiones en sus descomposiciones en cajas; *b*) las cajas A_{ij} y B_{ij} tengan las mismas dimensiones.

$$A = \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ \hline 3 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad B = \left(\begin{array}{cc|ccc} 3 & 5 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 3 & 0 & 1 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Ejemplo :

sumar las matrices A y B :

$$A+B = \left(\begin{array}{cc|ccc} 1+3 & 2+5 & 0+2 & 0+1 & 3+1 \\ 0+0 & 1+1 & 2+0 & 0+1 & 1+0 \\ \hline 3+3 & 0+0 & 1+1 & 2+2 & 4+5 \\ 3+4 & 0+3 & 2+0 & 0+2 & 1+1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|ccc} 4 & 7 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ \hline 6 & 0 & 2 & 4 & 9 \\ 7 & 3 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

Multiplicación. — Dadas dos matrices de cajas A y B :

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} \cdots\cdots A_{1n} \\ \vdots \\ A_{m1} \cdots\cdots A_{mn} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \cdots\cdots B_{1p} \\ \vdots \\ B_{n1} & B_{n2} \cdots\cdots B_{np} \end{pmatrix}$$

definimos $A \times B$ como la matriz C.

$$A \times B = C = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} + \cdots + A_{1n}B_{n1} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} + \cdots + A_{1n}B_{n2} \cdots & A_{11}B_{1p} + A_{12}B_{2p} + \cdots + A_{1n}B_{np} \\ \vdots & & \\ A_{m1}B_{11} + A_{m2}B_{21} + \cdots + A_{mn}B_{n1} & A_{m1}B_{12} + A_{m2}B_{22} + \cdots + A_{mn}B_{n2} \cdots & A_{m1}B_{1p} + A_{m2}B_{2p} + \cdots A_{mn}B_{np} \end{pmatrix}$$

Ejemplo : multiplicar las siguientes matrices :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ o & a & b \\ o & c & d \end{array}\right) \times \left(\begin{array}{cc} o & 1 \\ 1 & m \\ \hline 1 & 1 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1B_1 + A_2B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1+m \\ a & a \cdot m \\ c & c \cdot m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ b & b \\ d & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2+m \\ a+b & a \cdot m+b \\ c+d & c \cdot m+d \end{pmatrix}$$

Anillo de las matrices cuadradas. — Las matrices cuadradas de orden $n \times n$ forman un conjunto cerrado para las operaciones de adición y multiplicación, como es inmediato comprobar. La primera operación, la suma, dota a dicho conjunto de estructura de grupo abeliano; la segunda operación, la multiplicación, verifica las propiedades asociativa y distributiva respecto de la suma. El conjunto $\mathcal{M}_{m \times n}$ con las operaciones + y × es pues un anillo no conmutativo.

Este anillo posee además elemento unidad, que es la

$$\text{matriz } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \cdots\cdots 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \cdots\cdots 0 \\ \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \cdots\cdots 1 \end{pmatrix}$$

además, es un anillo con divisores de cero, pues de la relación $A \times B = 0$ no se deduce de inmediato que A sea la matriz cero o B sea la matriz cero.

En efecto, en $\mathcal{M}_{2 \times 2}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

y ninguno de los dos factores es la matriz nula.

Polinomios de matrices. — Podemos definir la expresión $P(A) = a_n I + a_{n-1} A + a_{n-2} A^2 + \ldots + a_0 A^n$, donde $A^i = \overbrace{A \times A \times \ldots \times A}^{i \text{ veces}}$ y las a_i son números reales o elementos del cuerpo K sobre el que están definidas las matrices. A dicha expresión la llamaremos polinomio con relación a la matriz A.

El conjunto de todos los polinomios asociados a la matriz A de la $\sum_{1}^{n} a_i A^i$ es cerrado respecto de las operaciones adición y multiplicación, constituyendo un subanillo conmutativo el anillo de las matrices cuadradas.

Determinantes

Introducción. — A toda matriz cuadrada A, cuyos elementos $a_{ij} \in R$, se le puede asignar un número real positivo o negativo que se denomina det. A ó $|A|$.

Esta aplicación de $\mathcal{M}_{m \times m} \longrightarrow R$ fue descubierta como consecuencia del estudio de sistemas lineales, aunque posteriormente sus aplicaciones fueron cada vez más importantes y se hicieron imprescindibles en el estudio de homomorfismos entre espacios vectoriales.

El estudio de los determinantes exige primeramente una introducción somera sobre las permutaciones de un conjunto finito.

Al estudiar la teoría de grupos, tratamos ya el grupo de las permutaciones S_n y vimos que el número de las mismas era $n!$

Dada una permutación arbitraria $\sigma = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$, decíamos que dos elementos cualesquiera de ella (i_k, i_ℓ) formaban inversión cuando siendo $i_k > i_l$ en la ordenación de los números naturales; sin embargo, en la ordenación de $\sigma = (i_1, i_2, \ldots i_k, \ldots i_\ell)$, el elemento i_k precede al i_ℓ.

Una permutación se denomina par, si el número de sus inversiones es par, e impar si el número de sus inversiones es impar.

Por ejemplo, la permutación (1 2 3 4 6 5) es impar, pues sólo existe una inversión, la (6 5); sin embargo, la permutación (2 4 5 1 3 6) es par, pues el número de sus inversiones es par : a saber, las (2 1), (4 1), (5 1), (5 3).

Llamaremos signo de una permutación a la correspondencia Sig. de $S_n \longrightarrow \{-1+1\}$ que hace corresponder a cada permutación el número $(-1)^\varepsilon$, donde ε es el número de sus inversiones. Con esta notación escribimos : $\text{sig.}\,\sigma_1 = \text{sig.}\,(1\,2\,3\,4\,6\,5) = (-1)^1 = -1$, $\text{sig.}\,\sigma_2 = \text{sig.}\,(2\,4\,5\,1\,3\,6) = (-1)^4 = 1$.

DEFINICIÓN. — Consideremos la matriz cuadrada

$A = \begin{pmatrix} a_{11} \cdots\cdots a_{1n} \\ \vdots \\ a_{n1} \cdots\cdots a_{nn} \end{pmatrix}$ y, a partir de ella, formemos todos los

productos que podamos construir, entrando n elementos en cada uno de ellos, tal que en cada producto de los así

formados entre como factor un elemento de cada fila y un elemento de cada columna. Un tal producto puede escribirse en la forma $a_{1i_1} \cdot a_{2i_2} \cdot a_{3i_3} \ldots a_{ni_n}$, donde los primeros subíndices nos indican que los elementos a_{ji_j} pertenecen a cada fila sucesiva. Los segundos subíndices nos indican la pertenencia a las columnas, y son ellos los que forman permutaciones de orden par o impar. Dado que existen n columnas, podremos formar $n!$ productos, correspondientes cada uno de ellos a las $n!$ permutaciones de S_n.

Se llama determinante a la aplicación de $\mathcal{M}_{n \times n} \xrightarrow{\det} R$ definida por : det. $A = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sig.}(\sigma) a_{1i_1} \cdot a_{2i_2} \cdot \ldots a_{ni_n} = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sig.}(\sigma)\ a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdot \ldots a_{n\sigma(n)}$.

El determinante de una matriz de orden n se dice que es un determinante de orden n.

Ejemplo : desarrollar en productos el determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$\det. A = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sig.}(\sigma)\quad a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2 2\sigma(2)} = \text{sig.}(\sigma_1)\, a_{11} \cdot a_{22} + \text{sig.}(\sigma_2) \cdot a_{12} \cdot a_{21} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12},$$

$$S_2 = \{(1\,2), (2\,1)\} = \{\sigma_1, \sigma_2\}.$$

Ejemplo : desarrollar el determinante :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}$$

Propiedades de los determinantes. — 1. Si una matriz tiene una línea (fila o columna) formada toda ella por ceros, su determinante es cero.

Esto es claro puesto que en cada producto parcial entra al menos uno de los elementos de esa línea; al existir en cada sumando parcial un factor 0, todos los sumandos parciales son 0, y la suma total, que es el valor del determinante, también es 0.

2. Si se intercambian entre sí dos líneas paralelas de un determinante, el nuevo determinante tiene el mismo valor del anterior, cambiado de signo.

Sea σ_1 la transposición que intercambia las dos líneas (podemos considerar el caso en que se intercambian dos columnas, pues si fuesen dos filas, seguiríamos idéntico proceso).

Si llamamos A a la matriz del primer determinante y B a la obtenida cambiando las columnas, se verifica que $b_{ij} = a_i\sigma_1(j)$. Dado que el determinante de A es

$$\sum_{\sigma \in S_n} \text{sig.}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots a_{n\sigma(n)},$$

cada producto parcial se convierte en

$$\text{sig.}\ \sigma a_{1\sigma 1(\sigma(1))}\, a_{2\sigma 1(\sigma(2))} \cdots a_{n\sigma 1(\sigma(n))}.$$

Dado que la permutación σ_1 es una transposición, entonces es impar, y cada uno de los productos parciales cambia de signo, luego el determinante también lo hace.

3. Una matriz con dos líneas paralelas idénticas tiene su determinante igual a 0.

En efecto, si cambiamos entre sí las líneas iguales, el nuevo determinante cambia de signo, pero al mismo tiempo es el mismo determinante de antes, luego

$$\det. A = -\det. A;\ 2 \det. A = 0 \implies \det. A = 0.$$

4. Si se multiplican todos los elementos de una línea de una matriz por un número, el determinante de dicha matriz queda multiplicado por dicho número.

En efecto, si multiplicamos por ejemplo la fila k -ésima de A por el número t, entonces se verifica para el nuevo determinante : $\det. B = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sig.}(\sigma)\, a_{1i_1} \cdot \ldots t \cdot a_{ki_k} \ldots a_{ni_n}$

$$= t \cdot \sum_{\sigma \in S_n} \text{sig.}(\sigma)\, a_{1i_1} \cdot a_{ni_n} = t \cdot |A|.$$

5. El determinante de una matriz que tenga dos de sus líneas proporcionales es nulo.

Supongamos que los elementos de una línea sean el resultado de multiplicar otra de ellas por un número cualquiera t. Si sacamos factor común t, nos quedaremos con un determinante que tiene dos líneas iguales, que, por la propiedad 3, es cero.

6. Si sumamos a una línea de un determinante otra paralela a ella, multiplicada por un número k, el nuevo determinante es igual al primero.

En efecto, llamemos A a la matriz inicial y B a la matriz obtenida sumando a la línea j -ésima la k -ésima multiplicada por t, tendremos :

$$\det. B = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sig.}(\sigma)\, a_{1ij} \ldots (a_{ji_j} + t \cdot a_{ki_j}) \ldots a_{ni_n} =$$

$$\sum_{\sigma \in S_n} \text{sig.}(\sigma)\, a_{1i_j} \ldots a_{ji_j} \ldots a_{ni_n} +$$

$$t \cdot \sum_{\sigma \in S_n} \text{sig.}(\sigma)\, a_{1i_j} \cdot \ldots a_{ki_k} \cdot \ldots a_{ni_n}.$$

El segundo sumatorio representa un determinante cuyas filas k -ésima y j -ésima son idénticas (ambas son iguales a a_{ki_k}), luego dicho sumatorio es nulo. El primer sumatorio es det. A $\implies$ det. B = det. A.

7. El determinante de una matriz A se puede descomponer en la suma de dos determinantes con todas sus líneas iguales excepto una, de tal manera que la suma de los elementos homólogos de esa línea sean los elementos de la línea antigua :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \cdots\cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} & a_{13} \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_{22} & a_{23} \cdots\cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & b_{n2} & a_{n3} \cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} \cdots\cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} + b_{n2} & a_{n3} \cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Adjuntos y menores complementarios. — *Llamaremos submatriz* M *de una matriz cuadrada* A *a la matriz que se obtiene al suprimir un cierto número de filas y un cierto número de columnas de* A.

A es una submatriz de A, obtenida al suprimir 0 filas y 0 columnas de la matriz A.

Una submatriz puede ser cuadrada; si lo es, *a su determinante se le llama menor de la matriz* A. *Si a la matriz* A *se le suprime la fila* i -ésima *y la columna* j -ésima, *el menor obtenido se llama menor complementario del elemento* a_{ij} *y lo representaremos por* $|M_{ij}|$.

Se llama adjunto del elemento a_{ij} (también se le denomina *cofactor*) a $(-1)^{i+j}\cdot|M_{ij}|$.

Ejemplo : dada la matriz $\begin{pmatrix}1&0&1\\3&0&2\\1&1&1\end{pmatrix}$, $M_{11}=\begin{vmatrix}0&2\\1&1\end{vmatrix}=-2$

$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot(-2)=-2$; $|M_{12}|=1$,

$A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot 1=-1$.

TEOREMA. — El determinante de una matriz A es igual a la suma de los productos obtenidos multiplicando los elementos de una línea cualquiera por sus adjuntos respectivos, es decir :

$$|A|=a_{i1}\cdot A_{i1}+a_{i2}\cdot A_{i2}\cdot\ldots a_{in}\cdot A_{in}$$

o bien :

$$|A|=a_{1j}\cdot A_{1j}+a_{2j}\cdot A_{2j}\cdot\ldots a_{nj}\cdot A_{nj}.$$

Este método de encontrar el valor de un determinante nos es especialmente útil para matrices de órdenes superiores, pues podemos hacer (aplicando las propiedades anteriores) que los elementos de una o varias líneas sean iguales a 0, excepto uno. Desarrollando entonces por los adjuntos de esa línea, convertimos el determinante en otro de un orden menor.

Ejemplo : calcular el determinante de

$$A=\begin{vmatrix}1&0&1&2&3\\4&1&1&2&5\\0&1&3&2&4\\2&3&2&1&4\\-1&2&3&1&0\end{vmatrix}$$

Llamemos $|A|$ a dicho determinante.

$$|A|=\begin{vmatrix}1&0&1&2&3\\4&1&1&2&5\\0&1&3&2&4\\2&3&2&1&4\\-1&2&3&1&0\end{vmatrix}$$

Aplicando la propiedad 6 a las filas 1, 2, 3, 4, y 5, y columna 4, obtenemos :

$$|A|=\begin{vmatrix}-3&-1&0&0&-2\\4&0&-2&0&1\\-4&-5&-1&0&0\\3&1&-1&0&4\\-1&2&3&1&0\end{vmatrix}$$

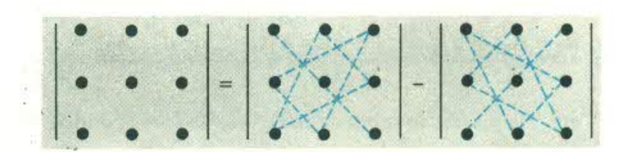
$$=a_{54}\cdot A_{54}=+1\cdot(-1)=\begin{vmatrix}3&-1&0&-2\\4&0&-2&1\\-4&-5&-1&0\\3&1&-1&4\end{vmatrix}$$

Aplicando la misma propiedad a las filas 2, 3 y 4, y columna 3, obtenemos :

$$|A|=\begin{vmatrix}-3&-1&0&-2\\12&10&0&1\\-7&-6&0&-4\\3&1&-1&4\end{vmatrix}=$$

$$=-(a_{43}\cdot A_{43})=-(-1)\cdot(-1)\begin{vmatrix}-3&-1&-2\\12&10&1\\-7&-6&-4\end{vmatrix}$$

el cual ya se resuelve directamente aplicando la regla de Sarrus para los determinantes de tercer orden, que podemos sintetizar escribiendo :



donde las líneas trazadas unen elementos que forman los productos parciales.

DEMOSTRACIÓN. — Sabemos que det. A contiene en cada uno de los productos que lo forman un término y uno solo de la fila i -ésima (o de la columna j -ésima). En consecuencia, sacando factor común todos los términos de la fila i (o de la columna j) encontramos :

$$\text{det. } A=a_{i1}\cdot A_1+a_{i2}\cdot A_2+\ldots+a_{in}\cdot A_n=$$
$$a_{1j}\cdot B_1+a_{2j}\cdot B_2+\ldots+a_{nj}\cdot B_j.$$

Donde los A_j son sumas de términos que no contienen ningún elemento de la fila i -ésima y los B_i son sumas de términos que no contienen ningún elemento de la columna j -ésima. Si hacemos ahora $A_j=A_{ij}$ y los $B_i=A_{ji}$, el teorema queda demostrado.

DEFINICIÓN. — Un teorema más amplio, para obtener el desarrollo de un determinante, lo abordaremos a partir de las siguientes definiciones :

1. Al menor de la matriz A, que se obtiene suprimiendo las filas $i_1, i_2, \ldots i_r$, y las columnas $j_1, j_2, \ldots j_r$, se le designa por $|i_1 j_1; i_2 j_2; \ldots; i_r j_r|^1$, y al menor que queda suprimiendo las restantes filas se le designa por $|i_1 j_1; i_2 j_2; \ldots; i_r j_r|$.

2. Se denomina adjunto del menor $|i_1 j_1; i_2 j_2; \ldots i_r j_r|$ al producto $(-1)^{i_1+\ldots+i_r+j_1+\ldots+j_r}\cdot|i_1 j_1; i_2 j_2; \ldots i_r j_r|^1$.

Con estas definiciones obtenemos el llamado *desarrollo de Laplace* del determinante de la matriz cuadrada A.

$$\text{det. } A=\sum_{j_1 j_2\ldots j_r\in C_{n,r}}|i_1 j_1;\ldots;i_r j_r|\cdot \text{Ad}\,|i_1 j_1; i_2 j_2;\ldots\ldots;i_r j_r|.$$

Donde $C_{n,r}$ representa las combinaciones de n elementos tomados de r en r.

Como propiedad 8 de los determinantes, podemos enunciar la siguiente : si multiplicamos los elementos de una línea cualquiera por los adjuntos de otra paralela a ella y los sumamos, la suma obtenida es nula :

$$a_{i1}\cdot A_{j1}+a_{i2}\cdot A_{j2}+\ldots+a_{in}\cdot A_{jn}=0.$$

En efecto, este desarrollo es sinónimo de recomponer un determinante con dos filas iguales, la i y la j; como sabemos, este determinante vale 0.

Matriz inversa de una matriz cuadrada. — Denominaremos inversa de una matriz cuadrada A, $|A| \neq 0$ a otra matriz que designaremos mediante A^{-1} tal que $A \times A^{-1} = I$ y $A^{-1} \times A = I$, donde I es la matriz unidad.

Dicha matriz inversa siempre existe si det. $A \neq 0$. En efecto :

$$\begin{vmatrix} a_{11} \cdots a_{1n} \\ \vdots \\ a_{n1} \cdots a_{nn} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{n1}}{|A|} \\ \vdots \\ \frac{A_{1n}}{|A|} & \frac{A_{2n}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{nn}}{|A|} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1\ 0\ 0 \cdots 0 \\ 0\ 1\ 0 \cdots 0 \\ \vdots \\ 0\ 0\ 0 \cdots 1 \end{vmatrix}$$

Puesto que $\dfrac{a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + \ldots + a_{1n} \cdot A_{1n}}{|A|} = \dfrac{|A|}{|A|} =$ 1 y $\dfrac{a_{11} \cdot A_{21} + a_{12} \cdot A_{22} + a_{13} \cdot A_{23} + \ldots + a_{1n} A_{2n}}{|A|} = \dfrac{0}{|A|} =$ 0, ... etc., la matriz inversa de la (a_{ij}) es la $\left(\dfrac{A_{ji}}{|A|}\right)$, donde los elementos de $\left(\dfrac{A_{ji}}{|A|}\right)$ son los adjuntos de la matriz traspuesta de A, divididos por el determinante de A.

Dicha matriz inversa es única, pues suponiendo que existiese otra matriz A^* que verificase la condición de que $A \times A^* = I$, multiplicando a la izquierda por A^{-1}, quedaría el resultado de la columna siguiente.

$$A^{-1} \times (A \times A^*) = A^{-1} \times I \implies (A^{-1} \times A) \times A^* = A^{-1} \iff I \times A^* = A^{-1} \implies A^* = A^{-1}.$$

Ejemplo : hallar la matriz inversa de la $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = A$,

$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, la matriz adjunta de la A sería $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$,

$$|A| = -2 \implies A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{0}{-2} & \frac{-1}{-2} \\ \frac{-2}{-2} & \frac{1}{-2} \end{pmatrix}, \text{ que verifica :}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo : hallar la matriz inversa de la $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$,

$|A| = 1$, $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, y la adjunta de A^T será :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. — Sistemas de ecuaciones

Definición. Rango de una matriz. Dependencia lineal de los vectores fila y columna. Determinación del rango de una matriz. Regla de Cramer. Sistema de ecuaciones generales. Teorema de Rouché-Frobenius. Sistemas homogéneos.

Definición. — Dada una matriz

$$A_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11}\, a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22} \ldots a_{2n} \\ \vdots \\ a_{m1}\, a_{m2} \ldots a_{mn} \end{pmatrix},$$ podemos considerar a los elementos de una de sus filas, por ejemplo la primera, como coordenadas de un vector n-dimensional, y entonces podemos hablar con sentido del *vector fila* $(a_{11}\, a_{22} \ldots a_{1n})$. En general, la fila $(a_{i1} \ldots a_{in})$ es un *vector fila n -dimensional*. De la misma manera, podemos considerar los elementos de la columna j como coordenadas de un vector m-dimensional $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$, que llamaremos *vector columna*.

Rango de una matriz. — *Rango de* A *es un número entero que representa el orden del mayor menor de la matriz distinto de cero*, o, lo que es lo mismo, el mayor de los órdenes de los menores distintos de cero de la matriz.

Dependencia lineal de los vectores fila y columna. — En el razonamiento que vamos a seguir, nos ceñiremos a tratar con una clase de vectores, por ejemplo, los vectores fila, pues es idéntico seguir dicho estudio con vectores columna, sin más que sustituir las coordenadas de uno por las de otro.

Supongamos sea L la variedad lineal engendrada por los vectores fila $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3 \ldots \boldsymbol{a}_m$, donde $\boldsymbol{a}_i = (a_{i1} \ldots a_{in})$, $L = \left\{\boldsymbol{x} / \boldsymbol{x} = \sum_1^m \alpha_i \cdot \boldsymbol{a}_i\right\}$.

TEOREMA. — El rango de la matriz A es el mismo que la dimensión de la variedad lineal L.

Consecuencias inmediatas de este teorema, del que hemos enunciado su tesis, aun cuando no lo hemos demostrado, son las siguientes :

1. Si $r(A) = m$, $A_{n \times n}$, $m < n$. El máximo número de filas o columnas linealmente independientes es m.

En efecto, si $r(A) = m$, como $m = dim$ L, quiere decir que la base de L está formada por m vectores (líneas de la matriz), luego los demás $n - m$ vectores dependen linealmente de los m primeros. Además podemos afirmar que, si $r(A) = n$, todas sus líneas son linealmente independientes.

2. Si $|A| = 0$, existe al menos una línea combinación lineal de otras líneas de la matriz.

3. Si $|A| \neq 0$, todas las líneas son linealmente independientes.

Determinación del rango de una matriz. — Sea una matriz A cualquiera; suprimamos todas sus filas que sean cero y, una vez efectuado esto, escojamos la primera fila $(a_{11} \dots a_{1n})$ y en ella un menor cualquiera de orden 1. Este menor existe, pues todos los elementos de la fila no pueden ser cero, ya que hemos suprimido las filas nulas.

Supongamos que $a_{11} \neq 0$. Entonces tendremos que $r(\mathrm{A}) = 1$.

Consideremos ahora otra submatriz, la formada por la primera y segunda fila $\begin{pmatrix} a_{11} a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} a_{22} \dots a_{2n} \end{pmatrix}$, y hallemos los órdenes de todos los menores de orden 2 en los que entra como columna $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$. Pueden ocurrir dos casos :

1. Todos los menores encontrados son nulos, en cuyo caso orlaremos la primera fila con la tercera, para investigar el orden de los menores $\begin{pmatrix} a_{11} a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{31} a_{32} \dots a_{3n} \end{pmatrix}$, y así sucesivamente hasta encontrar un menor de orden 2 no nulo. Si no lo encontramos, $r(\mathrm{A}) = 1$.

2. Algún menor de orden 2 es distinto de cero. El rango de la matriz es, por tanto, al menos 2.

Supongamos que dicho menor sea el $\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \\ a_{31} a_{32} \end{vmatrix}$, lo cual no resta generalidad, y orlaríamos con la submatriz $\begin{pmatrix} a_{11} a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{31} a_{32} \dots a_{3n} \end{pmatrix}$ una submatriz de orden 3

$$\begin{pmatrix} a_{11} a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{31} a_{32} \dots a_{3n} \\ a_{41} a_{42} \dots a_{4n} \end{pmatrix}.$$

En esta última matriz se dan dos subcasos :

1'. Que todos los menores sean nulos. Entonces orlaríamos con otras columnas y filas, hasta encontrar un menor no nulo; el rango de A sería al menos 3.

2'. Que todos los menores que se puedan formar sean nulos, $\Longrightarrow$ $r(\mathrm{A}) = 2$.

Ejemplo : hallar el rango de la matriz

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 0 \\ 6 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

El menor $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$, luego la matriz es de orden 2, al menos. Orlando este menor encontramos :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \\ 6 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 18 + 24 - 36 - 6 = 0.$$

Otro menor de orden 3 es

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 24 - 6 - 6 = 12 \neq 0.$$

Luego el rango de la matriz A es al menos 3.

Orlando este menor con la columna cuarta, encontramos el último menor

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 0 \\ 6 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

de lo que deducimos que $r(\mathrm{A}) = 3$.

Regla de Cramer. — Sea un sistema de n ecuaciones con n incógnitas, de la forma :

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = c_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = c_n \end{array} \qquad [1]$$

donde las a_{ij} y c_i son números reales; y las x_i son las incógnitas de dicho sistema.

Una solución del sistema será cualquier vector fila $v\,(v_1 v_2 \dots v_n)$ que verifique las condiciones :

$$\begin{array}{l} a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + \dots + a_{1n}v_n = c_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{n1}v_1 + a_{n2}v_2 + \dots + a_{nn}v_n = c_n. \end{array}$$

En forma matricial podemos escribir el sistema en la forma :

$\mathbf{X} \times \mathrm{A} = \mathbf{C}$, donde $\mathbf{X} = (x_1 x_2 \dots x_n)$, $\mathrm{A} =$

$$\begin{pmatrix} a_{11} \dots a_{n1} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{1n} \dots a_{nn} \end{pmatrix}. \quad \mathbf{C} = (c_1 \dots c_n).$$

El sistema [1] se llama *compatible*, si posee solución; en el caso contrario, se llama *incompatible*.

Dos sistemas con las mismas soluciones diremos que son *equivalentes*.

La regla de Cramer nos provee de un método para hallar las soluciones del sistema [1]. En efecto, [1] se puede escribir en forma matricial como $\mathbf{X} \times \mathrm{A} = \mathbf{C}$. Multiplicando los dos miembros por A^{-1} a la derecha, tenemos :

$$\mathbf{X} \times \mathrm{A} \times \mathrm{A}^{-1} = \mathbf{C} \times \mathrm{A}^{-1} \implies \mathbf{X} = \mathbf{C} \times \mathrm{A}^{-1},$$

que desarrollada será :

$$(x_1 x_2 \dots x_n) = (c_1 \dots c_n) \times \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{A}_{11}}{|\mathrm{A}|} \frac{\mathrm{A}_{12}}{|\mathrm{A}|} \dots \frac{\mathrm{A}_n}{|\mathrm{A}|} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{\mathrm{A}_{n1}}{|\mathrm{A}|} \frac{\mathrm{A}_{n2}}{|\mathrm{A}|} \dots \frac{\mathrm{A}_{nn}}{|\mathrm{A}|} \end{pmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$x_1 = c_1 \frac{\mathrm{A}_{11}}{|\mathrm{A}|} + c_2 \frac{\mathrm{A}_{21}}{|\mathrm{A}|} + \dots + c_n \frac{\mathrm{A}_{n1}}{|\mathrm{A}|} \quad \frac{\begin{vmatrix} c_1 & a_{12} \dots a_{1n} \\ c_2 & \vdots \quad \vdots \\ \vdots & \\ c_n & a_{n2} a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} \dots\dots a_{1n} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{n1} \dots\dots a_{nn} \end{vmatrix}}$$

$$x_i = \left| \frac{\begin{matrix} a_{11} \dots c_1 \; a_{1i+1} \dots a_{1n} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{1n} \quad c_n \; a_{ni+1} \quad a_{nn} \end{matrix}}{|\mathrm{A}|} \right|$$

Ejercicio : hallar, si existen, las soluciones del sistema :

$$\begin{array}{r} 2x + y - z = 1 \\ x + y + z = 3 \\ x - 5z = 0 \end{array}$$

$$\text{det. } A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -5 \end{vmatrix} = -10 + 1 + 1 + 5 = -3$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix}}{-3} = -\frac{10}{3} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix}}{-3} = 7$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{-3} = -\frac{2}{3}.$$

Ejercicio : resolver $\begin{matrix} x + y + z + t = 2 \\ 2x + t = 1 \\ x - y - z = 1 \\ y - 2z + t = 0 \end{matrix}$ $A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 12$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}}{12} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{12} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{12} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{12} = +\frac{4}{12} = +\frac{1}{3}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{12} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{12} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{12} = -\frac{4}{12} = -\frac{1}{3}$$

$$t = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}}{12} = \frac{\begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}}{12} = \frac{\begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}}{12} = -\frac{12}{12} = -1$$

Sistemas de ecuaciones generales. — Un sistema de m ecuaciones y n incógnitas, $m \neq n$, puede escribirse en la forma :

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = c_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = c_m. \end{matrix} \qquad \textbf{[A]}$$

Dicho sistema, tendrá solución si existe un vector $\boldsymbol{v}\,(v_1 \ldots v_n)$ tal que se satisfaga las relaciones :

$$\begin{matrix} a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + \ldots + a_{1n}v_n = c_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m1}v_1 + a_{m2}v_2 + \ldots + a_{mn}v_n = c_m. \end{matrix}$$

En forma matricial podemos escribir :

$$v_1 \cdot \boldsymbol{a_1} + v_2 \cdot \boldsymbol{a_2} + \ldots + v_n \cdot \boldsymbol{a_n} = c, \qquad \textbf{[B]}$$

donde $\boldsymbol{a_i} = (a_{1i}, a_{2i}, \ldots a_{ni})$ y $c = (c_1, c_2, \ldots c_m)$.

La relación [B] expresa que el vector c, depende linealmente de los vectores $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \ldots \boldsymbol{a_n}$.

Esto es lo mismo que decir que el sistema [A] tiene solución si, y solo si el vector c, pertenece a la variedad lineal engendrada por los vectores $\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2}$, ... $\boldsymbol{a_n}$.

Recíprocamente, si $c \in L(\boldsymbol{a_1}, \ldots \boldsymbol{a_n}) \implies$ que el sistema [A] tiene solución.

Teorema de Rouché-Frobenius. — El sistema [A] tiene solución si, y solamente si el rango de la matriz A es el mismo que el rango de la matriz B :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}\, a_{12} \ldots a_{1n} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{m1}\, a_{m2} \ldots a_{mn} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} a_{11} \ldots a_{1n}\, c_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{m1} \ldots a_{mn}\, c_m \end{pmatrix}$$

En efecto, decir lo anterior es equivalente a afirmar que la columna $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$ depende linealmente de las n columnas anteriores, que, como hemos visto, es la condición de solución.

Supongamos que $r(A) = r(B) = r$; esto significa que sólo existen r líneas linealmente independientes (columnas). Mediante una conveniente reorganización, podemos hacer que dichas r columnas sean las r primeras, pudiendo escribir el sistema [A] así :

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r + a_{1r+1}x_{r+1} + \ldots \\ \qquad\qquad + a_{1n}x_n = c_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mr}x_r + a_{mr+1}x_{r+1} + \ldots + a_{mn}x_n = c_n \end{array}\right\} \Longleftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1r}x_r = c_1 - a_{1r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{1n}x_n \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mr}x_r = c_m - a_{mr+1}x_{r+1} - \ldots - a_{mn}x_n \end{array}\right\}$$

Dado que sólo las r primeras ecuaciones son linealmente independientes, podemos suprimir las $m - r$ restantes, quedándonos finalmente :

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r = c_1 - a_{1r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{1n}x_n \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rr}x_r = c_r - a_{rr+1}x_{r+1} - \ldots - a_{rn}x_n \end{array}\right\}$$

Este sistema es de r ecuaciones con r incógnitas, y podemos resolverlo aplicando la regla de Cramer :

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} c_1 - a_{1r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{1n}x_n \, a_{12}\, a_{13} \ldots a_{1r} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_r - a_{rr+1} - \ldots - a_{rn}x_n \, a_{r2}\, a_{r3} \ldots a_{rn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} \ldots a_{1r} \\ a_{r1} \ldots a_{rr} \end{vmatrix}};$$

llamando $\begin{vmatrix} a_{11} \ldots a_{1r} \\ : \\ a_{r1} \ldots a_{rr} \end{vmatrix} = |A|$

$$x_i = \frac{\begin{array}{l} a_{11} \ldots a_{1i-1} c_1 - a_{1r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{1n}x_n a_{1i+1} \ldots a_{1r} \\ \vdots \\ a_{r1} + \ldots a_{ri-1} c_1 - a_{rr+1}x_{r+1} - \ldots - a_{rn}x_n a_{ri+1} \ldots a_{rn} \end{array}}{|A|}.$$

Ejemplo : resolver el sistema :

$$\begin{array}{l} x + y + z + t = 1 \\ x - y - z - t = 2 \\ x \quad\;\; + z - t = 1. \end{array}$$

Si operamos, veremos inmediatamente que $r(A) = r(B) = 3$, luego el sistema tiene solución, y además podemos escribir :

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 1 - t \\ x - y - z = 2 + t \\ x \quad\;\; + z = 1 + t \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \quad x = \frac{\begin{vmatrix} 1 - t & 1 & 1 \\ 2 + t & -1 & -1 \\ 1 + t & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$$

$$y = \frac{\begin{matrix} 1 & 1 + t & 1 \\ 1 & 2 + t & -1 \\ 1 & 1 + t & 1 \end{matrix}}{-2} = \frac{4t}{-2} = -2t \qquad z = \frac{\begin{matrix} 1 & 1 & 1 - t \\ 1 & -1 & 2 + t \\ 1 & 0 & 1 + t \end{matrix}}{-2} = \frac{1 - 2t}{-2}$$

$t = t.$

Sistemas homogéneos. — Son denominados así aquellos sistemas de la forma [A] donde el vector $\mathbf{C}\ (c_1 \ldots c_m) = (0\,0\,0 \ldots 0)$, o sea :

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{array} \qquad [C]$$

Una solución inmediata de dicho sistema la constituye el vector $(0\,0 \ldots 0)$, pues, sustituyendo dichos valores en el sistema, éste se verifica.

Ahora bien, dicha solución es trivial; por ello llamaremos solución del sistema a toda solución $(v_1 v_2 \ldots v_n)$, distinta del vector $\mathbf{0}$.

Supongamos que el rango de la matriz del sistema sea r

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \ldots a_{1n} \\ : \\ a_{m1} \ldots a_{mn} \end{pmatrix}$$

Esto, como sabemos, quiere decir que las m ecuaciones del sistema [C] dependen linealmente de r ecuaciones del mismo.

Aplicando el teorema de Rouché-Frobenius, si $r(A) = n$, obtenemos la solución trivial $(0\ 0 \ldots 0)$.

Si $r(A) = r < n$, tenemos infinitas soluciones que son las que a nosotros nos interesan. Resumiendo podemos afirmar :

La condición necesaria y suficiente para que el sistema [C] tenga solución es que $r(A) < n$.

Ejemplo : hallar a para que el siguiente sistema tenga solución, obteniendo todas ellas, y una en particular distinta de la trivial.

$$\begin{array}{l} ax + y - z = 0 \\ x + 3y - az = 0 \\ x \qquad\;\; + 4z = 0. \end{array}$$

Para que el sistema tenga solución, ha de suceder que

$r(A) < 3 \iff \begin{vmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -a \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0 \iff a = \frac{1}{11}$ y el sistema se nos convierte en

$$\begin{array}{l} \frac{1}{11}x + y - z = 0. \\ x + 3y - \frac{1}{11}z = 0 \\ x \qquad\;\; + 4z = 0. \end{array}$$

$r(A) = 2$; podemos, por tanto, suprimir una ecuación cualquiera, por ejemplo la segunda, y obtenemos :

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{11}x + y - z = 0 \\ x \qquad + 4z = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x = -4z \\ y = \frac{15}{11}z \\ z = z \end{array}$$

que es la solución general del sistema.

Haciendo $z = 1$, encontramos una solución particular :

$$x = -4 \qquad y = \frac{15}{11} \qquad z = 1.$$

7. — Polinomios

Definición. Igualdad de polinomios. Operaciones internas en A$[x]$. División de polinomios. Regla de Ruffini. Teorema de Descartes. Cociente de $x^m \pm a^m$ por $x \pm a$. Descomposición factorial de un polinomio. Principio de identidad. Divisibilidad algebraica. Máximo común divisor de dos polinomios.

Definición. — En Álgebra elemental tratamos con cierto tipo de entes matemáticos llamados polinomios en x, y que son de la forma $3 \cdot x^2 + 5$; $x^3 + 3 \cdot x^2 - x - 3$, donde los coeficientes de la x son números enteros. Más adelante encontramos otras expresiones donde los coeficientes de la x no son necesariamente números enteros, sino que pueden ser elementos de Q ó de R. Todo esto nos lleva a considerar un estudio más profundo y sistemático de estos entes que tanta importancia tienen en todo el Álgebra, Análisis y Geometría.

Sea A un anillo cualquiera y sea x un símbolo llamado *indeterminada*, $x \notin$ A; llamaremos polinomio en x sobre A a una expresión de la forma :

$$P(x) = a_0 \cdot x^0 + a_1 \cdot x^1 + \ldots + a_n \cdot x^n + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot x^i,$$

$a_i \in$ A, donde un número finito de $a_i \neq 0$. Siendo 0 el elemento neutro del grupo aditivo de A.

Igualdad de polinomios. — Sea A$[x]$ el conjunto de todas las expresiones de la forma $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ y establezcamos la siguiente relación entre los elementos de A$[x]$

$$p_1(x) R p_2(x) \iff a_i = b_i \ \forall i,$$

$$p_1(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot x^i$$

$$p_2(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i \cdot x^i.$$

La relación así definida es de equivalencia, pues cumple las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva.

DEFINICIONES. — En un polinomio $p(x) = a_0 \cdot x^0 + a_1 \cdot x^1 + \ldots + a_n \cdot x^n + \ldots$ cada uno de los elementos $a_0 \cdot x^0$, $a_1 \cdot x^1, \ldots a_n \cdot x^n$, se llaman *términos* del polinomio. Los elementos $a_0, \ldots a_n$ se llaman *coeficientes* del polinomio. Dado un término cualquiera $a_i x^i$, se llama grado de dicho término al exponente i de la indeterminada. Ejemplo : el grado de $3 \cdot x^7$ es 7.

Dado un polinomio $p(x)$, se llama grado de dicho polinomio al mayor exponente de los términos cuyos coeficientes sean distintos de 0. Así diremos que el grado de $p(x) = 1 + 3 \cdot x^2 + 5 \cdot x^7 + 0 \cdot x^8 + \ldots + 0 \cdot x^n + \ldots$ es 7, pues éste es el exponente mayor de los términos cuyos coeficientes son distintos de 0.

Acostumbramos encontrar en la mayoría de las obras de Matemáticas que los polinomios se expresan solamente por sus términos, cuyos coeficientes son distintos de 0; de esta manera el polinomio $p(x) = 0 \cdot x^0 + 5 \cdot x + 3 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 + x^4 + 0 \cdot x^5 + \ldots + 0 \cdot x^n + \ldots$ lo escribiremos únicamente mediante la expresión $p(x) = 5 \cdot x + 3 \cdot x^2 + x^4$.

Un polinomio $p(x)$ que tenga únicamente un coeficiente distinto de 0 lo llamaremos *monomio*, si tiene dos coeficientes distintos de 0 le llamaremos *binomio*, si tres, *trinomio*, etc.

Operaciones internas en A[x]. — ADICIÓN. — Dados dos polinomios cualesquiera $p_1(x), p_2(x) \in$ A$[x]$, definimos $p_1(x) + p_2(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (a_i + b_i) x^i$ donde

$$p_1(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i ; p_2(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i.$$

PROPIEDADES. — 1. *Asociativa.*

$$[p_1(x) + p_2(x)] + p_3(x) = p_1(x) + [p_2(x) + p_3(x)].$$

2. *Elemento neutro.* Es el polinomio $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$, donde $a_i = 0 \forall i$.

3. *Elemento simétrico.* El polinomio $p(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$, tiene como inverso el $\sum_{i=0}^{\infty} (-a_i) x^i$, puesto que

$$\sum_{0}^{\infty} [a_i + (-a_i)] \cdot x^i = \sum_{i=0}^{\infty} 0 \cdot x^i.$$

4. *Conmutativa.* $p_1(x) + p_2(x) = p_2(x) + p_1(x)$. Respecto de la adición así definida, A$[x]$ tiene estructura de grupo abeliano.

PRODUCTO. — Sean :

$$a(x) = a_0 x^0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$
$$b(x) = b_0 x^0 + b_1 x^1 + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n.$$

Definimos el producto $a(x) \cdot b(x)$ como el polinomio $(a_0 b_0) x^0 + (a_1 b_0 + a_0 b_1) x^1 + (a_0 b_2 + a_2 b_0 + a_1 b_1) x^2 +$

$$(a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0 + a_0 b_3) x^3 + \ldots + \ldots = \sum_{0}^{\infty} c_k \cdot x^k,$$

donde $c_k = \sum_{0}^{k} a_i b_{k-i}$.

PROPIEDADES. — 1. *Asociativa.*

$$[p_1(x) \cdot p_2(x)] \cdot p_3(x) = p_1(x) \cdot [p_2(x) \cdot p_3(x)].$$

2. *Conmutativa.* $p_1(x) \cdot p_2(x) = p_2(x) \cdot p_1(x)$.

3. *Elemento neutro.* $a(x) \cdot 1 = a(x) \forall a(x) \in$ A$[x]$, donde 1 es el polinomio $1 \cdot x^0 + 0 \cdot x^1 + 0 \cdot x^2 + \ldots + 0 \cdot x^n + \ldots + \ldots$

4. *Distributiva.* $a(x) \cdot [b(x) + c(x)] = a(x) \cdot b(x) + a(x) \cdot c(x)$.

La terna (A$[x]$, +, ·), con las propiedades antes anunciadas, posee estructura de anillo conmutativo con elemento unidad.

División de polinomios. — Dados :

$$p_1(x), p_2(x) \in \text{A}[x]$$
$$p_1(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0$$
$$p_2(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} \ldots \quad b_0.$$

En general, no será posible encontrar otro polinomio C(x) tal que se verifique : $p_1(x) = C(x) \cdot p_2(x)$.

Ahora bien, en el caso de que no se verifique, siempre es posible encontrar dos polinomios $c(x)$ y $r(x)$, grado $r(x) <$ grado $p_2(x)$, tal que se verifique : $p_1(x) = c(x) \cdot p_2(x) + r(x)$. Estos dos polinomios $c(x)$ y $r(x)$ son únicos, y su determinación la explicaremos en otro apartado.

Regla de Ruffini. — Supongamos que en el caso anterior $p_2(x) = x - a$, aplicando la mecánica operatoria de la división, tendremos :

$$\begin{array}{l|l} a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_0 & x - a \\ \underline{- a_n x^n + a_n a x^{n-1}} & \overline{a_n x^{n-1} + (a a_n + a_{n-1}) x^{n-2} + (a^2 a_n + a_{n-1} a + a_{n-2}) x^{n-3} + \ldots +} \\ \quad (a a_n + a_{n-1}) x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_0 & \\ \quad \underline{- (a a_n + a_{n-1}) x^{n-1} + (a^2 a_n + a_{n-1} a) x^{n-2}} & \end{array}$$

$$(a^2 a_n + a_{n-1} a + a_{n-2}) x^{n-2} + a_3 x^{n-3}$$
$$\underline{- (a^2 a_n + a_{n-1} a + a_{n-2}) x^{n-2} + (a^3 a_n + a^2 a_{n-1} + a_{n-2} a) x^{n-3}}$$
$$r(x) = a_n \cdot a^n + a_{n-1} \cdot a^{n-1} + \ldots + a_1 a + a_0$$

que podemos esquematizar así :

a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	a_1	a_0	a
a_n	$a_n a$	$a^2 a_n + a a_{n-1}$	$a_n a^n + a_{n-1} a^{n-1} + \ldots + a_1 a + a_0$.		
a_n	$a_n a + a_{n-1}$	$a^2 a_n + a a_{n-1} + a_2 \ldots$			

Coeficientes del cociente — Valor numérico de $p(x)$ para $x = a$, o sea $p(a)$.

Esta última esquematización de la división anterior es conocida en Álgebra con el nombre de regla de Ruffini.

Ejemplo : dividir el polinomio $x^3 + 2x^2 - 1$ por $x - 2$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & \\ & 2 & 8 & 16 & 2 \\ \hline 1 & 4 & 8 & 15 & \end{array}$$

El cociente será $x^2 + 4x + 8$, y el resto 15 que observamos es $p_1(2) = 2^3 + 2 \cdot 2^2 - 1 = 15$.

Prácticamente el modo de aplicar la regla ha sido el siguiente :

1. Se escriben los coeficientes de $p_1(x)$ de izquierda a derecha, poniendo un cero cuando el término sea $0 \cdot x^i$, y el número a, en este caso el 2, se escribe a la derecha.
2. Empezamos multiplicando $a_n = 1$ por $a = 2$, y el producto se suma con el coeficiente $a_{n-1} = 2$. Posteriormente se multiplica de nuevo dicha suma por $a = 2$, y el producto se suma al coeficiente de x que es 0, y finalmente multiplicando 2 por 8, obtenemos 16, que sumado al coeficiente a_0 nos da 15.

Teorema de Descartes. — La condición necesaria y suficiente para que un polinomio $p(x)$ sea divisible por $x - a$ es que $p(a) = 0$.

En ese caso diremos que $x = a$ es una raíz o cero del polinomio.

Puede ocurrir que la división por $x - a$ admita reiteración : es decir, que el polinomio $p(x)$, $p(x) = (x - a) p_1(x)$, sea divisible por $(x - a)$ también, y del mismo modo por $p_2(x) \ldots p_n(x)$; entonces $p(x)$ es divisible por $(x - a)^n$, y diremos que a es una raíz de orden n de $p(x)$.

Ejemplo : averiguar si el polinomio $p(x) = x^2 - 2x + 1$ es divisible por $x - 1$.

$p(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 + 1 = 0$. Luego es divisible.

Cociente de $x^m \pm a^m$ por $x \pm a$. — Cuando el dividendo es de cualquiera de las formas $x^m \pm a^m$, es de gran interés estudiar todos los casos de su división por $x \pm a$.

Para ello, basta aplicar el criterio de divisibilidad antes enunciado, a fin de conocer si obtenemos o no cociente exacto, y en caso afirmativo obtener los coeficientes de dicho cociente.

1. $\dfrac{x^m - a^m}{x - a}$; $\quad P(a) = 0$.

2. $\dfrac{x^m - a^m}{x + a}$;

$$P(-a) = (-a)^m - a^m \begin{cases} \text{si } m = \dot{2} \implies P(a) = 0 \\ \text{si } m = 2k + 1 \implies P(a) = -2a^m \neq 0. \end{cases}$$

3. $\dfrac{x^m + a^m}{x - a} \quad p(a) = a^m + a^m \neq 0.$

4. $\dfrac{x^m + a^m}{x + a}$

$$P(-a) = (-a)^m + a^m \begin{cases} \text{si } m = \dot{2} \implies P(a) \neq 0 \\ \text{si } m = 2k + 1 \implies P(a) = 0. \end{cases}$$

Descomposición factorial de un polinomio. — Sea $p(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ un polinomio de grado n, y supongamos existen r valores distintos $a_1 a_2 \ldots a_r$ tal que se verifique : $p(a_1) = p(a_2) = p(a_3) = \ldots = p(a_r) = 0$, o, lo que es lo mismo, todo a_i es raíz de dicho polinomio.

Si $\quad p(a_1) = 0 \implies \dfrac{p(x)}{x - a_1} = p_1(x), \implies p(x) = (x - a_1) \cdot p_1(x)$. El polinomio $p_1(x)$ será de grado $n - 1$, y el coeficiente de grado n será a_n.

Por otra parte $p(a_2) = 0 \implies$ si sustituimos en $p(x) = (x - a_1) \cdot p_1(x)$, x por a_2, obtenemos :

$p(a_2) = 0 = (a_2 - a_1) \cdot p_1(a_2) \cdot$,

como $a_2 \neq a_1 \implies p_1(a_2) = 0 \implies \dfrac{p_1(x)}{x - a_2} = p_2(x) \iff p_1(x) = p_2(x) \cdot (x - a_2)$ y obtenemos :

$p(x) = (x - a_1) \cdot (x - a_2) \cdot p_2(x)$. Siendo el polinomio $p_2(x)$ de grado $n - 2$, y el coeficiente de x^n, a_n. Operando sucesivamente se tiene :

$p(x) = (x - a_1) \cdot (x - a_2) \cdot \ldots (x - a_r) \cdot p_r(x)$, donde $p_r(x)$ es de grado $n - r$ y el coeficiente de x^n, a_0.

En el caso de que $r = n$, obtendríamos :

$p(x) = (x - a_1) \cdot (x - a_2) \ldots (x - a_n) \cdot a_0$, resultado que podemos enunciar en el siguiente teorema.

Si un polinomio de grado n se anula para n raíces distintas, el polinomio se puede escribir en la forma $p(x) = (x - a_1) \cdot \ldots (x - a_n) \cdot a_0$.

Una consecuencia de este teorema es que un polinomio de grado n no puede tener más de n raíces.

En efecto, supongamos existe otro valor $a \neq a_i \forall_i$, $i = 1, 2, \ldots, n / p(a) = 0$. En este caso al sustituir a en la expresión encontrada para $p(x)$ en el teorema anterior, tendríamos :

$p(a) = (a - a_1) \cdot (a - a_2) \ldots (a - a_n) \cdot a = 0$, y dado que $\left.\begin{array}{c} a_0 \neq 0 \\ a - a_i \neq 0 \forall i \end{array}\right\}$ $p(a) \neq 0$ en contra de la hipótesis $\Longrightarrow$ a no es una raíz de $p(x)$.

Ejemplo : hallar los ceros o raíces de la ecuación $x^3 - 7x + 6 = 0$.

Dado que las raíces enteras, si las hubiere, han de ser divisores de 6, habremos de probar si son ceros dichos divisores : $+1$, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6.

Fácilmente comprobamos que $p(1) = 0$, $p(2) = 0$, $p(-3) = 0 \Longrightarrow x^3 - 7x + 6 = (x - 1) \cdot (x - 2) \cdot (x + 3)$.

Principio de identidad. — Si un polinomio $p(x)$ de grado n admite más de n raíces, dicho polinomio es idénticamente nulo.

Un polinomio es idénticamente nulo cuando todos sus coeficientes son nulos; es decir $p(x) = \sum_0^\infty a_i x^i$ donde $a_i = 0 \forall i$.

Como consecuencia importante de dicho principio obtenemos el siguiente corolario.

COROLARIO. — Si dos polinomios $p_1(x)$, $p_2(x)$, de grados m y n respectivamente, toman iguales valores numéricos para un cierto número de valores $a_1, a_2, \ldots a_r, r > m$, $r > n$, ambos polinomios son idénticos.

En efecto, supongamos que $m \geqslant n$:

$$p_1(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \ldots + a_0$$
$$p_2(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_0.$$

El polinomio $p_1(x) - p_2(x)$ será de grado $\leqslant m$, y además se anula para $a_1, a_2, \ldots a_r$, $r >$ grado $[p_1(x) - p_2(x)] \Longrightarrow$ el polinomio $p_1(x) - p_2(x)$ es idénticamente nulo $\Longrightarrow$ $p_1(x) = p_2(x)$.

Otra consecuencia del principio de identidad nos viene dada por el siguiente teorema.

TEOREMA. — Si el producto de dos polinomios $p_1(x), p_2(x)$, de grados n y m respectivamente, se anula para más de $m + n$ valores distintos, uno al menos de los dos polinomios es idénticamente nulo.

En efecto, el polinomio $p_1(x) \cdot p_2(x)$ se anula para r valores, $r > m + n \Longrightarrow p_1(x)$ se anulará para más de n valores, o $p_2(x)$ para más de m valores. Si ocurre el primer caso, $p_1(x)$ será idénticamente nulo; si se cumple el segundo, será $p_2(x)$ quien es idénticamente nulo.

Es también el principio de identidad el que nos permite aplicar el llamado método de los coeficientes indeterminados que tanta utilidad tiene en Álgebra, Análisis, así como en otras ciencias : Física, Química, etc.

Este método consiste en calcular los coeficientes de un polinomio si se conocen las operaciones que, realizadas con él, nos den resultados conocidos.

Ejemplo : en la naturaleza se produce la reacción química siguiente :

$$CO_3Ca + H_2O + CO_2 \longrightarrow (CO_3H)_2Ca + H_2O$$

nuestro problema es ajustar dicha reacción.

Asignando coeficientes indeterminados a la reacción y teniendo en cuenta la igualdad de átomos del mismo elemento en un miembro y en otro, se tiene :

$$a\,CO_3Ca + b\,H_2O + c\,CO_2 = m\,(CO_3H)_2Ca + n\,H_2O.$$

Atomos :

C .... $a + c = 2m$
O .... $3a + b + 2c = 6m + n$
Ca .... $a = m$
H .... $2b = 2m + 2n$.

Resolviendo el problema encontramos $a = 2$, $b = 2$, $c = 3$, $m = 2$, $n = 1$ que ajusta la reacción.

Ejemplo : hallar A y B para que se verifique la siguiente relación :

$$\frac{2x + 1}{(x + 2)(x + 1)} = \frac{A}{x + 2} + \frac{B}{x + 1}.$$

Quitando denominadores

$$2x - 1 = A(x + 1) + B(x + 2);$$
$$2x - 1 = Ax + Bx + A + 2B;$$
$$2x - 1 = x(A + B) + (A + 2B).$$

Aplicando el método de los coeficientes indeterminados se tiene :

$$\left.\begin{array}{r} 2 = A + B \\ -1 = A + 2B \end{array}\right\} \Longrightarrow B = -3,\ A = 5 \Longrightarrow$$
$$\frac{2x - 1}{(x + 2)(x + 1)} = \frac{5}{x + 2} + \frac{-3}{x + 1}.$$

Divisibilidad algebraica. — DEFINICIÓN. — Un polinomio $P(x)$ es divisible por otro $p(x)$, cuando $P(x) = p(x) \cdot Q(x)$.

De la definición deducimos inmediatamente :

1. Si $p(x)/P(x) \Longrightarrow p(x)/P(x) \cdot P_1(x)$, donde $P_1(x)$ es un polinomio cualquiera.
2. Si $p(x)/P_1(x) \wedge p(x)/P_2(x) \Longrightarrow$ $p(x)/P_1(x) \pm P_2(x)$.
3. Si $p_1(x)/P_1(x) \wedge p_2(x)/P_2(x) \Longrightarrow$ $p_1(x) \cdot p_2(x)/P_1(x) \cdot P_2(x)$.
4. Todo número racional es divisor de un polinomio cualquiera.

A. Como hemos observado, todo número racional es divisor de un polinomio, es decir, dichas constantes desempeñan aquí el papel del número 1 en la divisibilidad numérica.

B. Dos polinomios que no admiten más divisores comunes que constantes se llaman primos entre sí.

C. Un polinomio es primo absoluto cuando no admite más divisores que él mismo, constantes, o el producto de ambos.

D. Si un polinomio $P_1(x)$ no divide a otro $P_2(x)$, entonces es primo con él.

NOTA : cuando escribimos $P_1(x)/P_2(x)$, queremos decir que $P_1(x)$ es divisor de $P_2(x)$.

Máximo común divisor de dos polinomios. — De forma similar a como definíamos el M.C.D. de dos números enteros, como el mayor de los divisores comunes de dichos números, definiremos el máximo común divisor de dos polinomios diciendo que es el polinomio de máximo grado que es a la vez divisor de ambos.

Para hallar dicho polinomio, vamos a utilizar los resultados 1., 2., 3., 4.

TEOREMA. — Dados dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$, los divisores comunes de ambos son los divisores comunes al de menor grado y al resto $R(x)$ de la división entre ambos.

En efecto, sea $P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x)$. Si un polinomio es divisor de $P(x)$ y $Q(x)$, también lo será de $Q(x) \cdot C(x)$ por la propiedad 1.

Si el mismo polinomio es divisor de $P(x)$ y de $Q(x) \cdot C(x)$, por 2., también será divisor de su diferencia $P(x) - Q(x) \cdot C(x) = R(x)$.

Este teorema nos permite aplicar el algoritmo de Euclides para la obtención del M.C.D.

	$C_1(x)$	$C_2(x)$		$C_{n-1}(x)$	$C_n(x)$	$C_{n+1}(x)$
$P(x)$	$Q(x)$	$R_1(x)$	$R_2(x)$...	$R_{n-2}(x)$	$R_{n-1}(x)$	$R_n(x)$
$R_1(x)$	$R_2(x)$		......	$R_n(x)$	0	

Los divisores comunes de $P(x)$ y $Q(x)$ lo serán de $Q(x)$ y $R_1(x)$; los de $Q(x)$ y $R(x)$ lo son también de $R_1(x)$ y $R_2(x)$, y así sucesivamente.

Aplicando reiteradamente este proceso, el último resto encontrado será el M.C.D. Si dicho resto $R_n(x)$ es una constante, los dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ serán primos entre sí.

Ejemplo : hallar M.C.D. de $x^4 - 1$ y $x^3 - x^2 + x - 1$.

		$x+1$
x^4 $-x^4+x^3-x^2+x$	-1	x^3-x^2+x-1
x^3-x^2+x $-x^3+x^2-x$	-1 $+1$	
0		

El M.C.D., es pues el resto $R_n \equiv x^3 + x^2 - x + 1$.

Ejemplo : hallar M.C.D. de $x^4 - 2x - 1$ y $x^3 - x^2 + x - 1$.

		$x+1$	$-x^2+x-3$
x^4	$-2x-1$	x^3-x^2-x+1	$-2x+1$
$-x^4+x^3-x^2+$	x	$2x^3-2x^2+2x-2$ $-2x^3+x^2$	
x^3-x^2 $-x^3+x^2$	$-x-1$ $-x+1$	$-x^2+4x-4$ $2x^2-x$	
	$-2x+1$	$3x-4$ 6 $6x-8$ $-6x+3$	
		-5	

El resto R_n es una constante $\Longleftrightarrow$ los polinomios son primos entre sí.

De manera análoga al estudio de la divisibilidad numérica, daremos unos teoremas de divisibilidad de polinomios.

1. Para hallar el M.C.D. de varios polinomios se halla el M.C.D. de dos de ellos; el polinomio que resulte (que es el M.C.D. de los dos polinomios primeramente elegidos) se trata por el algoritmo de Euclides con un tercer polinomio; el resultante con un cuarto polinomio, y así sucesivamente. El polinomio resultante constituye el divisor común de mayor grado de los polinomios dados.
2. Si dividimos dos polinomios por un divisor común de ambos, el M.C.D. queda a su vez dividido por ese divisor.
3. Si multiplicamos dos polinomios por un polinomio cualquiera de coeficientes enteros, el M.C.D. queda multiplicado por dicho polinomio.
4. Si un polinomio $P(x)$ divide a un producto de otros dos $p_1(x) \cdot p_2(x)$ y es primo con uno de ellos, divide al otro.

Como puede observarse, la analogía con la divisibilidad numérica es realmente grande.

8. — Sistemas de numeración

Introducción. Sistema de numeración decimal o de base 10. Teorema fundamental de la numeración. Cambios de base. Conversión de base B a base 10. Conversión inversa (de base 10 a base B). Sistemas de numeración de base B > 10. Práctica de las operaciones en base B ≠ 10. Propiedades fundamentales.

Introducción. — El sistema de numeración utilizado hoy en todos los países del mundo es el que llamamos *decimal*. Este sistema es así denominado porque los órdenes sucesivos de unidades aumentan de 10 en 10. Pero nada nos impide el poder agruparlos de 2 en 2, de 12 en 12, o de n unidades en n unidades. Según el número n que nos marca las unidades que son necesarias para pasar de un orden a otro, queda definido el sistema. Así, en el sistema de base 2, dos unidades forman una decena, dos decenas una centena, dos centenas un millar, y así sucesivamente.

El objeto principal del número natural es poder contar los elementos de un conjunto. La representación del número de elementos de dicho conjunto ha de hacerse de la manera menos complicada posible. En tiempos prehistóricos los pueblos acostumbraban contar mediante los nudos de una cuerda o mediante piedrecitas que, guardadas, señalaban el número exacto de ovejas, cabras u otros conjuntos.

Han existido, no obstante, varios sistemas de numeración cuyo objeto es hacer corresponder a todo elemento $n \in N$ un símbolo escrito, lo menos complicado posible. A dichos sistemas de numeración les debemos exigir también otras condiciones, como la de permitirnos efectuar con facilidad las operaciones en el conjunto N.

Antes de empezar con el estudio específico del sistema decimal, conviene recordar que una cifra simple o guarismo posee dos clases de valores : uno, el que le confiere

su propia representación aislada; ejemplo, el número 9 es un guarismo que nos representa un número natural. Otro valor es el que le confiere su posición o lugar que ocupa; de esta manera en la representación 900, el número 9 representa nueve centenas.

Sistema de numeración decimal o de base 10. — Los signos o guarismos utilizados son : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

En dicho sistema, un número cualquiera, por ejemplo 15 731, puede escribirse : $1 \times 10{,}000 + 5 \times 1\,000 + 7 \times 100 + 3 \times 10 + 1$ o también $1 \times 10^4 + 5 \times 10^3 + 7 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 1 \times 10^0$, expresión esta última que llamaremos polinómica de dicho número. La base a la que están elevados los exponentes 0, 1, 2, 3, 4 da el nombre al sistema : de base 10.

En general, un número cualquiera N, en el sistema decimal, vendrá representado por n cifras $N = abcd \dots nrp$, que en forma polinómica escribiríamos :

$$N = p \times 10^0 + r \times 10^1 + n \times 10^2 + \dots + b \times 10^{n-1} + a \times 10^n.$$

Si utilizásemos el sistema de base 5, un número $N = abcd$, en forma polinómica se escribiría :

$$N = d \times 5^0 + c \times 5^1 + b \times 5^2 + a \times 5^2.$$

En este sistema de base 5, si queremos seguir utilizando la notación decimal o árabe, los cinco primeros números serán 0, 1, 2, 3, 4. El siguiente número ya representará una decena, y escribiremos 10, que se lee « uno cero » y no « diez » para distinguirlo del número 10, que representa diez unidades en el sistema decimal. Los siguientes números en el sistema de base 5, serían 11, 12, 13, 14, 20, 21, ... etc.

A continuación escribimos una tabla con la representación de los diez primeros números en diferentes sistemas de numeración.

BASE	NÚMEROS									
10	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0	1	10	11	100	101	110	111	1 000	1 001
4	0	1	2	3	10	11	12	13	20	21
5	0	1	2	3	4	10	11	12	13	14
7	0	1	2	3	4	5	6	10	11	12
9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	10

Teorema fundamental de la numeración. — Dada una base $B > 1$, todo número natural N_{10} puede descomponerse en la forma :

$N = a + b \cdot B^1 + c \cdot B^2 + \dots + r \cdot B^n$, donde $a, b, c, \dots r$, son números naturales menores que B.

En efecto, sea N escrito en forma decimal.

Formemos los grupos que contengan B elementos :

$$\begin{array}{l|l} N & B \\ \hline a & c_1 \end{array}$$

$N = B \cdot c_1 + a$ — se pueden formar c_1 grupos de B elementos cada uno y sobran $a < B$ elementos.

A su vez dichos c_1 grupos podrán agruparse de B en B elementos.

$$\begin{array}{l|l} c_1 & B \\ \hline b & c_2 \end{array}$$

$c_1 = B \cdot c_2 + b$ — se pueden formar c_2 grupos en los que hay B elementos y sobran b grupos de B elementos.

A su vez dichos c_2 grupos de B^2 elementos pueden agruparse en grupos mayores, en cada uno de los cuales entren B grupos de B^2 elementos cada uno.

$$\begin{array}{l|l} c_2 & B \\ \hline c & c_3 \end{array}$$

$B \cdot c_3 + c = c_2$ — se pueden formar c_3 grupos de B^3 elementos cada uno y sobran c grupos de B^2 elementos, $c < B$.

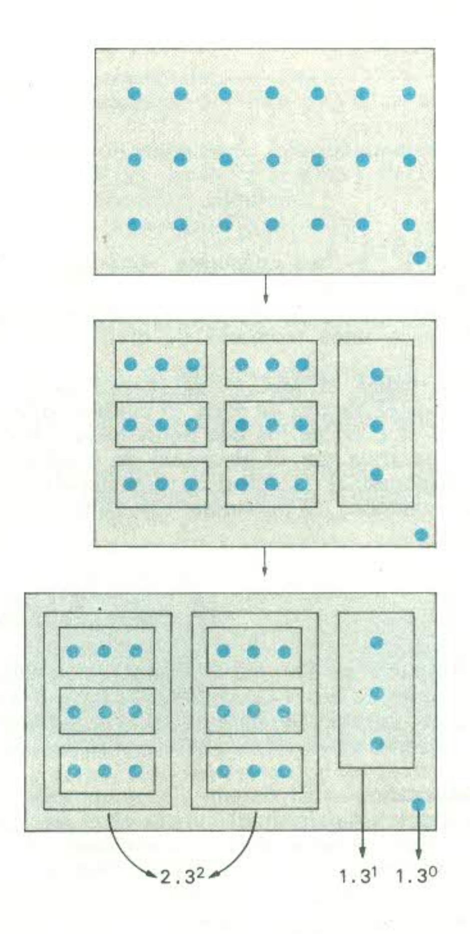
Ahora bien, como $B > 1$ y cada cociente es mayor que el dividendo, necesariamente llegaremos a un cociente $r < B$. En tal momento se tiene :

$$\begin{array}{l|l} c_{n-1} & B \\ \hline n & r \end{array} \qquad c_{n-1} = r \cdot B + n.$$

Sustituyendo en cada una de las expresiones anteriores, encontramos.

$N = a + b \cdot B^1 + \dots + r \cdot B^n$.

Ejemplo : escribir el número 22 en base 3.



En un principio, lo que hicimos fue agrupar los elementos de 3 en 3.

$$\begin{array}{l|l} 22 & 3 \\ \hline 1 & 7 \end{array}$$

Formamos siete grupos de 3 elementos que a su vez agruparemos de 3 en 3; en cada uno de los cuales grupos habrá 3^2 elementos.

Ya no podemos formar más grupos de 3 en 3, puesto que sólo hay dos grupos de 3^2 elementos.

El número escrito en base 3 sería :

$$2 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0 \quad \text{ó} \quad 211_{\lfloor 3}.$$

Observemos que las cifras que forman el número 211 son la primera por la izquierda el último cociente, y las demás : 1 y 1, los restos de cada división parcial.

Como ejercicio vamos a escribir el mismo número $22_{\lfloor 10}$ en base 2. ⟶

Cambios de base. — Una vez escrito un número en un sistema cualquiera, nos interesa conocer o escribir ese número en otra base. Generalmente, para evitar confusiones, y dado que estamos acostumbrados a conocer el conjunto que contenga doscientas diez unidades (es un ejemplo) por su representación decimal 210, es conveniente al pasar un número $N_{\lfloor B_1}$ a $N'_{\lfloor B_2}$ hacerlo por intermedio de la numeración decimal.

Claro está que, igual que operábamos en base 10, habremos de hacer operaciones y confeccionar unas tablas en la base que estamos utilizando.

Conversión de base B a base 10. — Un número N escrito en la forma polinómica es :

$$a_1 \cdot B^1 + a_2 \cdot B^2 + \ldots + a_n \cdot B^n = a_n a_{n-1} \ldots a_3 a_2 a_1.$$

Para escribirlo en base 10, basta sumar la expresión $a_1 \cdot B^1 + \ldots + a_n \cdot B^n$.

Ejemplo : escribir el número $6\,531_7$ en base 10

$$6\,531 = 1 \cdot 7^0 + 3 \cdot 7^1 + 5 \cdot 7^2 + 6 \cdot 7^3 = 2\,325_{\lfloor 10}.$$

Conversión inversa (de base 10 a base B). — El método antes señalado de divisiones sucesivas es el más indicado.

Ejemplo : pasar el número $2\,325_{\lfloor 10}$ a base 7,

```
2325 |7
  22 |332 |7
  15 | 52 |47 |7
   1 |  3 | 5 |6
```

El número es 6 531.

Sistemas de numeración de base B > 10. — En un sistema de numeración superior al de base 10, por ejemplo el sistema de base 12, dado que se han de utilizar doce signos, podemos usar los diez guarismos de la numeración decimal y los dos restantes. Se acostumbra a escoger las primeras letras del alfabeto griego, a saber α y β, que corresponden a los números decimales 10 y 11 $10 \equiv \alpha$; $11 \equiv \beta$.

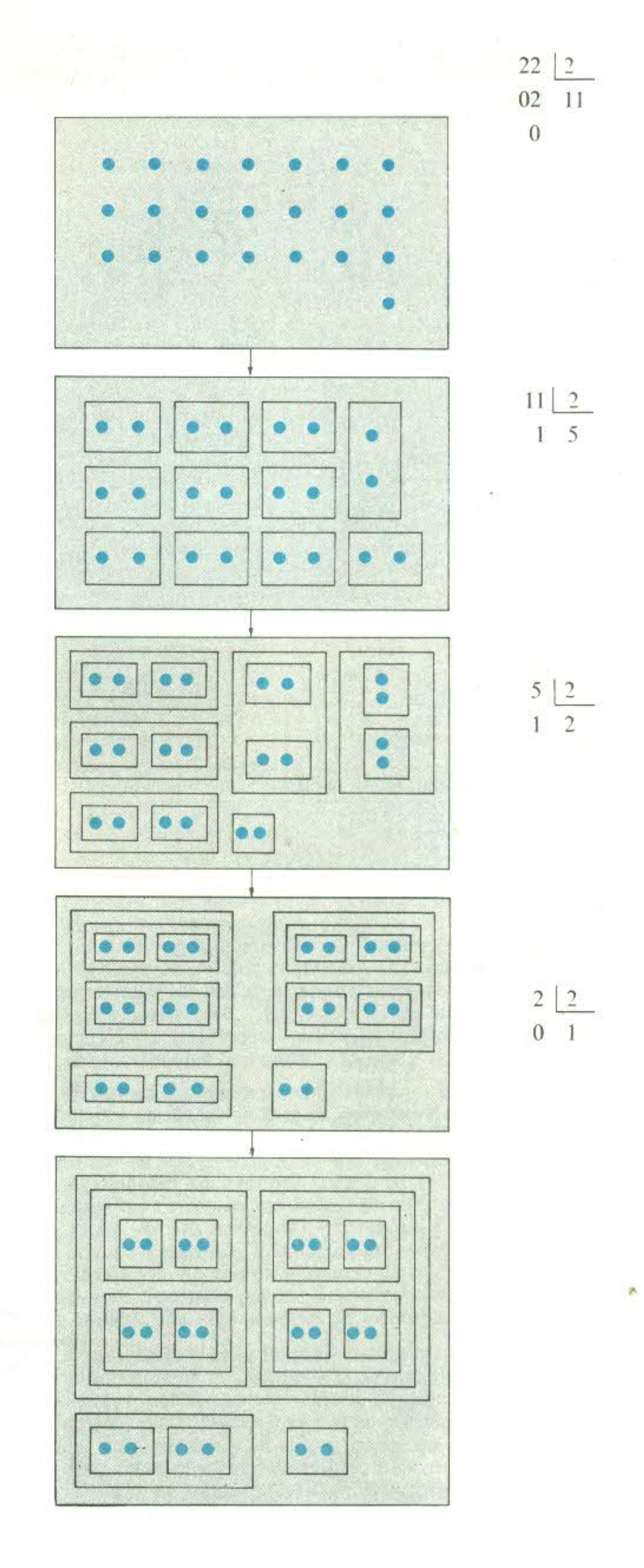
Ejemplo : escribir el número $10\ \alpha\ 2\beta_{\lfloor 12}$, en base 10.

$$\beta \cdot 12^0 + 2 \cdot 12^1 + \alpha \cdot 12^2 + 0 \cdot 12^3 + 1 \cdot 12^4 =$$
$$11 + 24 + 1\,440 + 20\,736 = 22\,211_{\lfloor 10}.$$

Inversamente, para poner el número $22\,211_{\lfloor 10}$ en el sistema de base 12 escribiríamos :

```
22211    |12
  102    |1850 |12
  061    |065  |154  |12
         | 50  |     |12
011 ≡ β  |  2  | 34  | 0  |12
         |     |10 ≡ α|   | 1
```

El número es $10\ \alpha\ 2\beta_{\lfloor 12}$.



Y el número escrito en base 2 será :

$$1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 10\,110_{\lfloor 2}.$$

Práctica de las operaciones en base $B \neq 10$. — Vamos a escribir algunas tablas de sumar y multiplicar para bases distintas de 10.

BASE	SUMA			PRODUCTO		
2		0	1		0	1
	0	0	1	0	0	0
	1	1	10	1	0	1

OPERACIONES

Efectuar :

$$\begin{array}{r} 10100 \\ +\ \ 111 \\ 10 \\ \hline 11101 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1001 \\ \times\ 101 \\ \hline 1001 \\ 1001\ \ \\ \hline 101101 \end{array}$$

BASE	SUMA						PRODUCTO				
5		0	1	2	3	4		1	2	3	4
	0	0	1	2	3	4	1	1	2	3	4
	1	1	2	3	4	10	2	2	4	11	13
	2	2	3	4	10	11	3	3	11	14	22
	3	3	4	10	11	12	4	4	13	22	31
	4	4	10	11	12	13					

OPERACIONES

Efectuar :

$$\begin{array}{r} 4102 \\ +20014 \\ 4321 \\ \hline 33442 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4321 \\ \times\ 304 \\ \hline 33334 \\ 24013\ \ \ \\ \hline 2440134 \end{array}$$

Ejemplo : efectuar en base 7 las operaciones siguientes;

$$\begin{array}{r} 654321 \\ 404360 \\ +\ \ 12460 \\ 3201 \\ \hline 1411002 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 654032 \\ \times\ \ 432 \\ \hline 1641064 \\ 3612161\ \ \\ 5553255\ \ \ \ \\ \hline 626421504 \end{array}$$

Dejamos al lector la interpretación de estas operaciones, previa construcción de las tablas correspondientes.

Propiedades fundamentales. — 1. Todo número $N_{|B}$, que tiene r cifras, está comprendido entre dos potencias consecutivas de B, $B^{r-1} \leq N_B < B^r$.

En efecto,
$N = a_0 + a_1 \cdot B + a_2 \cdot B^2 + \ldots + a_{r-1} \cdot B^{r-1} \geq B^{r-1}$,
como $a_0, a_1, \ldots a_{r-1} < B \implies$

$$a_0 + a_1 \cdot B < B + a_1 \cdot B = B(1 + a_1) \leq B^2$$

$$a_0 + a_1 \cdot B + a_2 \cdot B^2 < B_1^2 + a_2 \cdot B^2 = B^2(1 + a_2) \leq B^3$$

.
.
.
.

$$a_0 + a_1 \cdot B^1 + a_2 \cdot B^2 + \ldots + a_{r-1} \cdot B^{r-1} < B^{r-1} + a_{r-1} \cdot B^{r-1} = B^{r-1}(1 + a_{r-1}) \leq B^r \cdot \text{c.q.d.}$$

2. El producto de un número $N_{|B}$ por una potencia B^n viene representado por las mismas cifras de N, seguidas de n ceros.

En efecto, el número $N = a_r \ldots a_1 a_0 = a_0 + a_1 B + \ldots + a_r B^r$ multiplicando por B^n, nos queda :

$$N \cdot B^n = (a_0 + a_1 B + \ldots + a_r B^r) \cdot B^n = a_0 B^n + a_1 B^{n+1} + \ldots + a_r B^{n+r} = a_r \ldots \overbrace{a_0 000 \ldots 0}^{n \text{ ceros}}.$$



9. — Repaso de Aritmética y Álgebra elementales

Operaciones aritméticas fundamentales : Numeración. Numeración hablada. Órdenes y clases de unidades. Enunciado de un número natural. Numeración escrita. Numeración romana. Práctica de la suma o adición. Sustracción de números naturales. *Práctica de la sustracción. Prueba de la sustracción.* Propiedad asociativa y uso del paréntesis. Multiplicación de números naturales. *Producto de números de una cifra. Producto de un número de una cifra por otro de varias. Producto de números acabados en ceros. Producto de dos números de varias cifras cada uno. Prueba de la multiplicación. Uso del paréntesis en la multiplicación.* División de números naturales. *Práctica de la división. Prueba de la división.* Potenciación de números naturales. Producto de potencias de igual base. Cociente de potencias de igual base. Cuadrados. *De una suma de números naturales. De una diferencia de números naturales.* Producto de una suma de dos números por la diferencia de los mismos. Cubo de una suma y diferencia de números naturales. Potencias. *De un producto. De un cociente.* — **Radicación de números naturales :** Práctica de la raíz cuadrada. Prueba de la raíz cuadrada. — **Operaciones con fracciones :** Definición. Equivalencia de fracciones. Propiedad fundamental. Simplificación. Reducción a común denominador. Comparación. Adición. Sustracción. Producto. División. — **Números decimales :** Unidades decimales. Propiedades de los números decimales. Suma. Sustracción. Multiplicación. División. Potenciación de números racionales. Radicación de números racionales. Raíz cuadrada de un número decimal. — Magnitudes absolutas y relativas. Números positivos y negativos. Valor absoluto. Números opuestos. Desigualdad de números racionales. Suma de números de distinto signo. Sustracción de números racionales. Multiplicación de dos números racionales. Producto de más de dos factores. División de números racionales. Potenciación de números racionales. Propiedades de las potencias. Radicación de números racionales. Potencias de números racionales con exponentes negativos. Cálculo con radicales cuadráticos. Notación potencial de una raíz. Multiplicación de radicales homogéneos. Introducción de factores bajo el signo radical. División de radicales del mismo índice. Racionalización de denominadores.

Operaciones aritméticas fundamentales

Hemos estudiado la estructura algebraica de los números naturales y definido, claro está, las operaciones fundamentales en dicho conjunto; sin embargo la práctica de dichas operaciones es una actitud y obligación diaria para la inmensa mayoría de la población humana y por ello hemos creído de necesidad incluir después del estudio de N, Z y Q la práctica de dichas operaciones.

Las dos operaciones fundamentales que podemos realizar en dichos conjuntos son la adición o suma y el producto o multiplicación. Operaciones inversas de ellas son la resta o sustracción y la división, respectivamente.

Llamaremos algoritmo a toda combinación de operaciones fundamentales efectuadas con números cualesquiera que dan origen a un nuevo número.

Numeración. — La necesidad de representar gráficamente los números naturales, para poder operar con ellos por una parte, y el número infinito que hay de ellos por otra, han sido las causas de que, desde tiempos inmemoriales, el hombre haya buscado la forma de poder representarlos todos, mediante la combinación de unos pocos signos o guarismos que denominaremos *cifras* o signos fundamentales de numeración.

La actual numeración escrita con los signos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, es obra de los matemáticos árabes.

Numeración hablada. — El objeto de la numeración hablada es designar todo número natural o entero con un número limitado de palabras, de manera que en dicho enunciado quede perfectamente claro el número de orden de dicho número en la sucesión natural de los números naturales o de los enteros.

Los primeros diez signos de la sucesión de los números naturales se han designado con las palabras : *cero, uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve.*

El número siguiente es el *diez,* y se dice que forma una *decena.* Posteriormente, hay cinco números llamados *once, doce, trece, catorce, quince,* y los demás números hasta completar dos decenas se forman añadiendo al prefijo diez algunos signos de los primeros; así tendremos *dieciséis* (diez y seis), *diecisiete, dieciocho, diecinueve* y *veinte* o dos decenas.

Luego vendrán tres decenas o *treinta,* cuatro decenas o *cuarenta,* cinco decenas o *cincuenta,* seis decenas o *sesenta,* siete decenas o *setenta,* ocho decenas u *ochenta,* nueve decenas o *noventa,* y diez decenas o *cien,* que llamaremos también una *centena.*

Después agruparemos las centenas para formar otros números que designaremos : agrupación de dos centenas, *doscientos;* agrupación de tres centenas, *trescientos;* etc. La agrupación de diez centenas se denomina *mil* o *millar,* y agrupando los millares, encontraremos *dos mil, tres mil, diez mil, veinte mil...* La colección de mil millares forma un *millón,* y a su vez un millón de grupos de un millón de unidades forman un *billón* (1), etc.

Órdenes y clases de unidades. — Los diez primeros números naturales se llaman unidades de primer orden, el número diez es una unidad de segundo orden, el número cien es de tercer orden, el mil de cuarto orden, etc.

Agrupando los órdenes sucesivos de tres en tres, formamos las clases de unidades; de esta manera tenemos : 1. *clase de las unidades,* formada por las unidades, decenas y centenas; 2. *clase de los millares,* formada por las unidades, decenas y centenas de millar; 3. *clase de los millones,* formada por las unidades, decenas, y centenas de millón. De esta manera se continúa sucesivamente.

Enunciado de un número natural. — En la práctica, el modo natural de contar es la agrupación de las diversas unidades en órdenes y clases de numeración. Si, por ejemplo, para contar una cierta cantidad x, hemos contado los órdenes y clases y obtenido dos centenas de millar, cinco decenas de millar, cuatro centenas y cinco unidades, el número será el *doscientos cincuenta mil cuatrocientos cinco.*

Como se ve, los órdenes que no poseen el número los hemos suprimido de su enunciado. De esta manera no hemos escrito «cero millares, cero decenas», etc.

(1) En Estados Unidos el *billón* corresponde al millar de millones. Advertimos al lector acerca de esta particularidad, ya que frecuentemente, y sin justificación matemática alguna, ciertos traductores utilizan este término en castellano para denominar a la colección de mil grupos de un millón de unidades.

Numeración escrita. — Como el título indica, la numeración escrita nos enseña a representar gráficamente los números mediante signos que llamaremos cifras, y de los que antes hemos visto existen diez.

En la numeración escrita hemos de cumplir el siguiente convenio de importancia fundamental : toda cifra escrita a la izquierda de otra representa unidades de orden inmediatamente superior al de esta última. Así, al escribir 72, queremos decir : dos unidades de primer orden y siete decenas o unidades de segundo orden.

En el caso de que el número no posea unidades de un cierto orden, escribiremos el cero en el lugar correspondiente a dichas unidades. De esta manera, si encontramos escrito el número 765 032, queremos con esto significar : dos unidades de primer orden, tres unidades de segundo orden, cero unidades de tercer orden, cinco unidades de millar, seis unidades de decenas de millar y siete unidades de centenas de millar.

Para leer un cierto número escrito, lo que hacemos es dividirlo en grupos de tres unidades empezando por la derecha. Cada grupo representa una clase de unidades, y después leeremos cada grupo como si estuviera solo, indicando el nombre de la clase a que corresponde.

De esta manera, el número 132, 304, 526 lo leeremos : *cientro treinta y dos millones, trescientos cuatro mil quinientos veinte y seis* (132 millones 304 mil 526).

Numeración romana. — Las cifras romanas, representadas por letras, en la actualidad son siete.

Cifra romana						
I	V	X	L	C	D	M
Valor decimal						
uno	cinco	diez	cincuenta	cien	quinientos	mil

Para escribir cualquier número en dicha numeración, adoptaremos los siguientes criterios :

a) si a la derecha de una cifra se escribe otra igual o menor, el valor de la primera cifra queda aumentado en el de la segunda, y el número total se obtiene haciendo la suma de todas las cifras :

VIII = 5 + 1 + 1 + 1 = 8,
LXV = 50 + 10 + 5 = 65;

b) si a la izquierda de una cifra se escribe otra menor, la primera queda disminuida en el valor de la segunda :

XL = 50 − 10 = 40,
CM = 1 000 − 100 = 900;

c) el valor de una cifra queda multiplicado por mil si se coloca una raya horizontal encima de ella, y por un millón si se colocan dos trazos. Ejemplo :

$\overline{XV}$ = quince mil
$\overline{\overline{XV}}$ = quince millones.

Práctica de la suma o adición. — Ya hemos visto, a través de los axiomas de Peano, qué es la suma; ahora nuestro propósito es enseñar a efectuar de manera fluida y correcta dicha operación; para ello vamos a distinguir dos casos.

1. Los números a sumar, en total de dos, son menores que diez.

Dados dos números menores que diez, para sumarlos se añadirá a uno de ellos tantas unidades como nos indique el otro. Esta operación ha de realizarse de forma mecánica e inmediata, pues nos es completamente necesario para realizar el otro caso. Aunque es de todos conocida la suma de números de dos cifras, escribimos a continuación la tabla de sumar.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

La utilización es sencilla : si queremos hallar por ejemplo 6 + 7, buscaremos el número 6 en la fila vertical y el siete en la horizontal, la intersección de ambas nos dará el número deseado 6 + 7 = 13.

2. Suma de varios números cualesquiera.

Para este caso se opera de la forma siguiente : los números a sumar se escriben uno debajo del otro, de modo que coincidan en la misma columna las unidades del mismo orden, sumándose entonces dichas unidades del mismo orden, empezando por la derecha.

Si el número resultado de la suma de la primera columna es menor que diez, se escribe dicho número. Si el número hallado fuese mayor que nueve y menor que cien, se añade la cifra de las decenas de dicho número a la primera cifra de la segunda columna de la derecha, y se suma ésta con el mismo criterio que la primera, continuando así sucesivamente, hasta llegar a la última columna donde se escribe su suma tal como se haya obtenido.

En el caso de que en la suma de alguna de las columnas hayamos encontrado un número mayor que noventa y nueve, escribiremos al final la cifra de las unidades y añadiremos a la siguiente columna el número restante de dicha suma, suprimiendo las cifras de las unidades. De esa manera, si hemos obtenido como suma parcial de una de las columnas el número 135, escribiremos 5 y añadiremos a la siguiente columna 13, continuando así sucesivamente.

Ejemplo : efectuar la suma

$$\begin{array}{r} 3751 \\ 402 \\ 51305 \\ 9 \\ 7692 \\ \hline 63159 \end{array}$$

Sustracción de números naturales. — La operación resta la definimos mediante las siguientes relaciones : $a - b = c \iff b + c = a \iff a - c = b$; de la propia definición deducimos que se ha de cumplir : $a > b$, $a > c$. En la relación $a - b = c$, al número a le llamaremos *minuendo*, al b *sustraendo* y al c *diferencia*. El signo − se lee menos.

Práctica de la sustracción. — Para restar de un número (minuendo) otro número (sustraendo), escribiremos uno debajo del otro, haciendo corresponder las unidades del mismo orden de uno con las del mismo orden del otro. Posteriormente, actuaremos como sigue :

1.er caso : todas las cifras del minuendo son mayores que las correspondientes del sustraendo.

De cada cifra del minuendo a, si la cifra del sustraendo es b, escribiremos en el resto otro número c tal que $c + b = a$. De esta forma operaremos con todas las cifras de los distintos órdenes hasta terminar con la última.

2.º caso : el minuendo y el sustraendo son números cualesquiera.

En este caso puede ocurrir que algunas de las cifras del minuendo sean menores que las correspondientes del sustraendo. Cuando esto ocurre, lo que se hace es sumar a dicha cifra del minuendo diez unidades de dicho orden que restaremos del orden inmediato superior, operando así sucesivamente.

Ejemplo : efectuar 375 390 − 89 116,

$$\begin{array}{r} 375390 \\ -\ 89116 \\ \hline \end{array}$$

375 390 = 3 centenas de millar, 7 decenas de millar, 5 millares, 3 centenas, 9 decenas y 0 unidades.

89 116 = 8 decenas de millar, 9 millares, 1 centena, 1 decena, 6 unidades.

3 cent. de mil, 7 dec. de mil, 5 millares, 3 centenas, 9 decenas y 0 unidades
8 dec. de mil, 9 millares, 1 centena, 1 decena y 6 unidades

Como observamos, debemos restar de cero unidades, 6 unidades; como eso no es posible, lo que hacemos es quitar de las 9 decenas 1 decena, con lo que tendremos :

375 390 = 3 cent. de mil, 7 dec. de mil, 5 millares, 3 centenas, 8 decenas, 10 unidades
89 116 = 8 dec. de mil, 9 millares, 1 centena, 1 decena, 6 unidades.

En los millares y decenas de millar ocurre exactamente igual, por lo que actuaremos de la siguiente manera para realizar la operación :

2 cent. de mil, 16 dec. de mil, 15 millares, 3 centenas, 8 decenas, 10 unidades
0 cent. de mil, 8 dec. de mil, 9 millares, 1 centena, 1 decena, 6 unidades

y operamos como en el primer caso; la diferencia será :

286 274 = 2 cent. de mil, 8 dec. de mil, 6 millares, 2 centenas, 7 decenas, 4 unidades.

En la práctica corriente, esto se hace de manera automática : cuando nos encontramos con una cifra del minuendo menor que la correspondiente del sustraendo, automáticamente sumamos diez a la cifra del minuendo, y esa misma cantidad se la añadimos a la cifra siguiente del sustraendo.

Prueba de la sustracción. — Para conocer si hemos realizado correctamente la operación resta, nos atenemos a la misma definición : $a - b = c \iff b + c = a$. O sea que, si sumamos el resto con el sustraendo, nos habrá de dar el minuendo. Así, en el ejemplo anterior :

$$\begin{array}{r} 286274 \\ +\ 89116 \\ \hline 375390 \end{array}$$

Propiedad asociativa y uso del paréntesis. — Cuando estudiamos la suma como operación interna en el conjunto N, vimos también sus propiedades, entre las que recordaremos :

1. *Asociativa :* $(a + b) + c = a + (b + c)$.
2. *Conmutativa :* $a + b = b + a$.

La correcta combinación de ambas propiedades nos resuelve operaciones o conjuntos de operaciones que de otra manera serían muy complicadas de resolver.

Ejemplo : resolver la siguiente combinación :

$$8 + 5 - 4 - 3 + 1 - 8 + 9.$$

Si operásemos número por número, no encontraríamos solución, puesto que al llegar a la diferencia $(8 + 5 - 4 - 3 + 1) - 8$ no podríamos efectuarla, ya que el paréntesis vale 7, y nos veríamos en la situación de restar de un número otro mayor que él, 8. Para evitar este inconveniente, lo que hacemos es aplicar las propiedades asociativa y conmutativa, y operar después :

$$8 + 5 - 4 - 3 + 1 - 8 + 9 = 8 + 5 + 1 + 9 - 4 - 3 - 8$$
$$= (8 + 5 + 1 + 9) - 4 - 3 - 8 = 23 - 4 - 3 - 8 = 8.$$

Todavía podemos simplificar aún más el cálculo. Para ello observemos que a la suma $(8 + 5 + 1 + 9)$ le hemos restado sucesivamente 4, después 3 y finalmente 8. En total lo que hemos restado a 23 ha sido 15.

Pero $15 = 4 + 3 + 8$. O sea que podríamos haber escrito $(8 + 5 + 1 + 9) - (4 + 3 + 8)$.

De la misma manera en el ejemplo siguiente, $3 - 2 + 1 - 7 + 15 - 9 + 4 - 17 + 16$, escribiremos :

$$(3 + 1 + 15 + 4 + 16) - 2 - 7 - 9 - 17$$
$$= (3 + 1 + 15 + 4 + 16) - (2 - 7 - 9 - 17) = 39 - 35 = 4.$$

Inversamente, si nos encontramos con una expresión aritmética entre paréntesis, con el signo menos (−) delante del mismo, podemos suprimir dicho paréntesis cambiando de signo a todos los términos de su interior.

Ejemplo : $a - (b + c - d + f - t)$
$$= a - b - c + d - f + t.$$

Ejemplo :

$$3 + 2 - 5 - (4 + 3 - 2) + 8 - (4 + 5) + (19 + 1 - 4) - 3$$
$$= 3 + 2 - 5 - 4 - 3 + 2 + 8 - 4 - 5 + 19 + 1 - 4 - 3$$
$$= (3 + 2 + 2 + 8 + 19 + 1) - 5 - 4 - 3 - 4 - 5 - 4 - 3$$
$$= 35 - (5 + 4 + 3 + 4 + 5 + 4 + 3) = 7.$$

Multiplicación de números naturales. — De forma rigurosa hemos definido ya la multiplicación; ahora, para realizar la práctica de dicha operación vamos a adoptar otra definición más útil a nuestros fines.

La multiplicación de números naturales es una operación que tiene por objeto, dados dos números llamados multiplicando y multiplicador, hallar un tercero llamado producto que es la suma de tantos números iguales al multiplicando como unidades indica el multiplicador; y escribimos $a \times b = c$ o $a \cdot b = c$.

Los números a y b se llaman *factores*, c es el *producto* y el aspa se lee « por » así como el punto de separación. Ambos signos (× y ·) son los signos de la multiplicación.

Tal como está definida la multiplicación, para efectuarla, podemos reducir su práctica a la de la suma, pero este modo de obtener el producto es muy dificultoso, especialmente cuando los factores tienen más de una cifra. Distinguiremos varios casos.

Producto de números de una cifra. — Estos productos se obtienen fácilmente y se aprenden de memoria después de reunidos en una *tabla de multiplicar* o *pitagórica*.

Una disposición cómoda de dicha tabla consiste en hacer un cuadro para formar el producto de los diez primeros números por sí mismos, y en cada cuadro, representante de un par, escribir el producto de estos números :

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	0	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	0	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	0	9	18	27	36	45	54	63	72	81

PROPIEDADES DEL PRODUCTO. — Recordamos algunas de las propiedades del producto, por ser necesarias para efectuar la práctica del mismo.

1. *Asociativa :* $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
2. *Conmutativa :* $a \cdot b = b \cdot a$.
3. *Distributiva :* $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$;
   $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$.

Producto de un número de una cifra por otro de varias. — Sea el producto $1\,579 \times 8$.

Descompongamos el número de varias cifras en las unidades de todos sus órdenes :

1 579 =
1 unidad de millar, 5 centenas, 7 decenas, 9 unidades
Multiplicado por ... 8 unidades

Ahora multiplicamos el número 8 por las cifras de los distintos órdenes, resultando : 8 unidades de millar, 40 centenas, 56 decenas, 72 unidades.

Para escribir este número lo que hacemos es agrupar los órdenes correspondientes, así 72 unidades de primer orden hacen 7 unidades de segundo orden o decenas y 2 unidades de primer orden.

56 decenas hacen 5 centenas y seis unidades.

40 centenas hacen 4 millares.

Operando de esta manera obtenemos finalmente.

12 unidades de millar, 6 centenas, 3 decenas, 2 unidades,

$$1\,579 \times 8 = 12\,632.$$

Producto de números acabados en ceros. — Sean los números 139 y 700, y hallemos su producto.

Aplicando la propiedad asociativa tenemos :

$$139 \times 700 = 139 \times 7 \times 100 = (139 \times 7) \times 100 = 973 \times 100.$$

De esta manera hemos reducido la operación a un producto de un número por la unidad seguida de ceros. Veamos cómo se realiza dicho producto.

9 centenas, 7 decenas, 3 unidades.

Multiplicando por 100 :

900 centenas, 700 decenas, 300 unidades o, lo que es lo mismo, 9 decenas de millar, 7 millares, 3 centenas = 97,300.

De esta manera, el producto por 100 lo que ha hecho es convertir cada unidad de un orden determinado en otra unidad de orden dos veces superior.

Del mismo modo, el producto por diez lo que hace es convertir cada unidad de un orden determinado en otra unidad de un orden superior.

En este mismo orden, el producto por 1 000 hace avanzar tres órdenes a cada unidad.

Claro está que, si el producto por 100 convierte a las unidades de primer orden en unidades de tercer orden, habrá 0 decenas y 0 unidades.

Resumiendo, podemos decir que, *para multiplicar un número cualquiera por la unidad seguida de ceros, basta añadir a la derecha de ese número tantos ceros como tenga el multiplicador.*

En el caso que nos ocupa, en que uno de los dos números a multiplicar está seguido de *n* ceros, se multiplican ambos números como si no estuviesen los ceros y al producto final se añaden posteriormente dichos *n* ceros.

Producto de dos números de varias cifras cada uno. — Sean los números 321 y 4 795. Para multiplicarlos, escribamos uno de ellos, por ejemplo el 4 795, de la siguiente manera.

$4\,795 = 4\,000 + 700 + 90 + 5$, y apliquemos ahora la propiedad distributiva :

$$(4\,000 + 700 + 90 + 5) \cdot 321$$
$$= 321 \cdot 4\,000 + 321 \cdot 700 + 321 \cdot 90 + 321 \cdot 5 =$$

```
    1,284 000
      224 700
+      28 890
        1 605
  -----------
    1,539·195
```

y, simplificando, podemos deducir la regla siguiente :

Para multiplicar dos números cualesquiera, escribiremos el multiplicador debajo del multiplicando y trazaremos bajo éste una línea horizontal. Después multiplicaremos cada una de las cifras del multiplicador por todo el multiplicando, escribiendo los productos parciales de modo que la primera cifra de la derecha de cada uno esté situada debajo de la correspondiente cifra del multiplicador, para finalmente sumar todos los productos sucesivos, obteniendo de este modo el producto total :

```
      321
×    4795
---------
     1605
    28890
   224700
  1284000
---------
  1539195
```

Aún podemos simplificar algo la operación, suprimiendo los ceros, y obtendremos :

```
      321
×    4795
---------
     1605 ........ = 5 × 321
    2889  ........ = 9 × 321
   2247   ........ = 7 × 321
  1284    ........ = 4 × 321
---------
  1539195
```

Prueba de la multiplicación. — La comprobación de la certeza o corrección del producto puede hacerse de dos maneras :

a) invirtiendo el orden del producto, cosa que puede hacerse en virtud de la propiedad conmutativa; el resultado al invertir el producto ha de ser el mismo;

b) dividiendo el producto total por uno de los factores, el cociente ha de ser el otro factor, y el resto 0.

a)

```
   4795
 ×  321
-------
   4795
  9590
14385
-------
1539195
```

b)

```
1539195 | 4795
 10069  |------
 04795  | 321
  0000  |
```

Uso del paréntesis en la multiplicación. — La propiedad asociativa, que no es más que la introducción del paréntesis en el producto, nos dice que $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$. Veamos algunas consecuencias y aplicaciones de dicho uso.

1. Producto de factores que a su vez son sumas.

Sea el producto $a \cdot (b + c)$ que sabemos por la propiedad distributiva es $a \cdot b + a \cdot c$. Generalizando, podemos escribir : $a \cdot (b + c + d + e) = a \cdot b + a \cdot c + a \cdot d + a \cdot e$ y $a \cdot (b - c - d + e) = a \cdot b - a \cdot c - a \cdot c + a \cdot e$, resultados que nos llevan a considerar la siguiente regla :

Para multiplicar un número ***a*** por un producto que a su vez es una suma o diferencia de varios sumandos, se multiplica ***a*** por cada uno de los sumandos, y después se suman o restan, atendiendo en cada caso al signo que cada uno de los sumandos tenga dentro del paréntesis.

Ejemplo : resolver $9 \cdot (5 + 3 - 1 - 4 + 7 - 2)$.

Aplicando la regla anterior encontramos :
$9 \cdot (5 + 3 - 1 - 4 + 7 - 2) = 9 \cdot 5 + 9 \cdot 3 - 9 \cdot 1 - 9 \cdot 4 + 9 \cdot 7 - 9 \cdot 2$.

Ejemplo : resolver $3 \cdot (-4 - 7 + 5) = -3 \cdot 4 - 3 \cdot 7 + 3 \cdot 5$.

Supongamos ahora que los dos factores son a su vez sumas $(a + b - c) \cdot (d - f)$.

Para resolver esta operación, tengamos en cuenta que cada paréntesis lo podemos considerar como un solo número, y obtendremos entonces : $(a + b - c) \cdot (d - f) = (a + b - c) \cdot d - (a + b - c) \cdot f = a \cdot d + b \cdot d - c \cdot d - (a \cdot f + b \cdot f - c \cdot f) = a \cdot d + b \cdot d - c \cdot d - a \cdot f - b \cdot f + c \cdot f$.

Si observamos el resultado, nos daremos cuenta de que podíamos haberlo obtenido directamente sin más que ir multiplicando cada sumando del primer paréntesis por todos y cada uno del siguiente paréntesis. El producto resultante de multiplicar un sumando por otro tiene el signo más (+) o menos (−), según el siguiente convenio :

$$+ \times + = +$$
$$+ \times - = -$$
$$- \times + = -$$
$$- \times - = +.$$

De esta forma nos sale :

$$(+a) \times (-f) = -a \times f$$
$$(+a) \times (+d) = +a \times d$$
$$(-c) \times (+d) = -c \times d$$
$$(-c) \times (-f) = +(c \times f).$$

Ejercicio : resolver $(5 - 3 + 4 - 2) \cdot (-1 + 5 - 3)$
$-(5 - 3 + 4 - 2) \cdot (-1 + 5 - 3) = 5 \cdot (-1) + 5 \cdot 5 - 5 \cdot 3 - 3 \cdot (-1) - 3 \cdot 5 - 3 \cdot (-3) + 4 \cdot (-1) + 4 \cdot 5 + 4 \cdot (-3) - 2 \cdot (-1) - 2 \cdot 5 - 2 \cdot (-3) = -5 + 25 - 15 + 3 - 15 + 9 - 4 + 20 - 12 + 2 - 10 + 6.$

2. En un producto de varios factores puede reemplazarse cualquier número de ellos por su producto efectuado. Veamos que $a \times b \times c \times d = (a \times b) \times c \times d \Longrightarrow 5 \times 4 \times 3 \times 2 = (5 \times 4) \times 3 \times 2$.
En efecto, $5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$ y $(5 \times 4) \times 3 \times 2 = 20 \times 3 \times 2 = 120$.

Según la regla anterior, para multiplicar un número por un producto de varios factores basta multiplicar dicho número por uno cualquiera de dichos factores.

Ejercicios :

1.° Multiplicar el número 23, por el producto $(3 \times 2 \times 5)$:
$23 \times (3 \times 2 \times 5) = 23 \times 3 \times 2 \times 5 = 69 \times 2 \times 5$.

2.° Multiplicar el número 5 por el producto $8 \times 7 \times 6$: $5 \times (8 \times 7 \times 6) = 5 \times 8 \times (7 \times 6) = (5 \times 7) \times 8 \times 6 = (5 \times 6) \times 7 \times 8 = 30 \times 7 \times 8 = 30 \times 56$.

3.° El producto de varios números, que a su vez son productos de varios factores, es otro número obtenido multiplicando cada factor uno a continuación del otro.

Ejemplo :
hallar el producto $(a \cdot b \cdot c) \times (m \cdot n \cdot p \cdot q)\ t \cdot r$.
$(a \cdot b \cdot c) \times (m \cdot n \cdot p \cdot q) \times (t \cdot r) = a \cdot b \cdot c \cdot m \cdot n \cdot p \cdot q \cdot t \cdot r$.

División de números naturales. — Llamaremos división entera de naturales a una *operación que tiene por objeto, dados dos números llamados dividendo y divisor, hallar el mayor número posible, llamado cociente, que multiplicado por el divisor sea menor que el dividendo.*

Un ejemplo nos aclarará dicha definición : tratemos de dividir 17 entre cinco. Como es inmediato comprobar, el 1 no es cociente, pues aunque $1 \cdot 5 < 17$, $2 \cdot 5 = 10$, $10 < 17$, y 2 es menor que 1, aunque tampoco 2 es el cociente. Los próximos productos $3 \cdot 5 = 15 < 17$ y $4 \cdot 5 = 20 > 17$ nos señalan claramente que el cociente buscado es 3. La diferencia entre el dividendo D y el producto del divisor por el cociente $d \cdot c$ se llama resto de dicha división. $17 = 5 \cdot 3 + 2$. El resto en este ejemplo es, por tanto, 2.

De la relación que nos define la división $D = d \cdot c + r$, observamos que el resto r ha de ser menor que el divisor d, pues, en el caso de que fuese mayor, el cociente aumentaría.

El cociente de una división es único; en efecto, si hubiese dos cocientes c y c', las relaciones fundamentales serían : $D = d \cdot c + r$ y $D = d \cdot c' + r'$; restando ambas expresiones se tiene :
$0 = d \cdot c + r - d \cdot c' - r' \Longrightarrow 0 = d \cdot (c - c') + (r - r')$.

Para que la suma de dos números sea 0, es necesario que ambos sean 0, luego $d \cdot (c - c') = 0$, y $(r - r') = 0$. Como $d \neq 0$, entonces ha de ser $(c - c') = 0 \Longrightarrow c = c'$. Y hemos llegado a la conclusión de que el cociente y el resto de una división son únicos.

Cuando el resto es cero, la división se llama exacta, y la definiremos como la operación que consiste en, dados dos números, dividendo D *y divisor* d, *hallar otro llamado cociente* c, *que multiplicado por el divisor nos dé el dividendo.*

El signo de la división, tanto entera como exacta, lo podemos indicar mediante dos puntos (:) colocados entre el dividendo y el divisor.

Práctica de la división. — Distinguiremos varios casos :

1. El divisor es un número cualquiera y el cociente tiene una sola cifra.

Ejemplo : efectuar 321 : 79. Para efectuar esta operación, consideraremos los productos de 79 por los sucesivos números naturales 1, 2, 3, ... hasta encontrar uno que sea el primero mayor que 321. El primer natural que verifica esta relación es 5, puesto que $79 \cdot 5 = 395$. Entonces comprobamos el producto de $79 \cdot 4 = 316$, que es menor que 321. El cociente ya lo hemos encontrado : 4, y el resto es $321 - 316 = 5$.

En el desarrollo de la práctica hemos podido comprobar que necesitamos conocer el número de cifras del cociente; según esto, afirmamos que el número de cifras del cociente es igual al número de ceros que hay que escribir a la derecha del divisor para obtener un número mayor que el dividendo.

2. El divisor y el cociente son números cualesquiera.

Ejemplo : efectuar 95 341 : 845. El cociente tiene tres cifras, pues tres es el mínimo número de ceros que hemos de añadir al divisor para obtener un número mayor que el dividendo, por lo tanto la primera cifra del cociente serán las centenas.

Dado que el dividendo contiene 953 centenas, son éstas las que hemos de dividir entre 845, que nos cabe a 1 centena, sobrándonos un total de 108 centenas, que no podemos repartir como tales, dado que el divisor es 845 :

953,41	845
108	1

Lo que hacemos ahora es convertir las 108 centenas de resto en decenas, que sumadas con las decenas del divisor nos darán el número total de decenas a repartir.

108 centenas = 1 080 decenas.
1 080 decenas + 4 decenas = 1 084 decenas.

Ahora tenemos 1 084 decenas a dividir entre 845, que caben a 1 decena, sobrándonos un total de 239 decenas que forman el resto. Dicho resto, 239, no podemos dividirlo como decenas entre 845, pero lo convertimos en unidades, dándonos 2390, que sumadas a 1 unidad del dividendo nos dan un total de 2 391 a dividir entre 845 :

95341	845	⟶	95341	845
1084	11		1084	112
239			2391	
			701	

239 decenas = 2 390 unidades.
2 390 + 1 = 2 391 unidades.

El cociente es 2 y el resto 701.

La división ha acabado, dado que el cociente tiene las tres cifras que ya previmos debería tener.

En resumen podemos dar la siguiente regla para este caso.

Para dividir dos números naturales cualesquiera D y d, siendo $D > d$, separaremos a la izquierda del dividendo tantas cifras como sean necesarias para obtener un número mayor que el divisor, sin que nunca dichas cifras formen un número diez veces mayor que el divisor.

El número obtenido con esta separación lo dividimos entre el divisor, y su cociente nos dará la primera cifra del cociente de la división, obteniéndose un resto que escribiremos inmediatamente debajo del dividendo. A la derecha del resto se escribe la siguiente cifra del dividendo, y el número obtenido se divide entre el divisor inicial, obteniéndose de esta manera la segunda cifra al cociente y otro resto. Este proceso se continúa hasta acabar con la última cifra del dividendo, obteniendo en este momento la última del cociente y el resto final de la división.

Ejemplo : efectuar

3459876	946
6218	3657.
5427	
6976	
354	

Prueba de la división. — Dado el dividendo D y el divisor d, y obtenidos el cociente c y el resto r, la prueba consiste en hallar el producto $d \cdot c$ y sumarle el resto obtenido r. Dicha suma nos habrá de dar el dividendo.

Ejemplo : en la división anterior $3\,657 \cdot 946 + 354 = 3\,459\,876$.

Potenciación de números naturales. — Dado un número natural a, llamaremos potencia enésima de a a otro número natural obtenido multiplicando el número a por sí mismo n veces. Es decir $a^n = \overbrace{a \cdot a \cdot a \dots a}^{n \text{ veces}}$.

El número a^n lo leeremos « a elevado a n ». El número a recibe el nombre de *base* de la potencia y n el de exponente.

Producto de potencias de igual base. — Dado un número natural a y dos potencias suyas, a^m y a^n, nuestro problema es hallar $a^m \cdot a^n$.

$$a^m \times a^n = \overbrace{a \cdot a \dots a}^{m \text{ veces}} \times \overbrace{a \cdot a \dots a}^{n \text{ veces}} = \overbrace{a \dots a}^{m+n} = a^{m+n}$$

y se puede entonces afirmar : *el producto de potencias de la misma base es otra potencia de la misma base, que tiene por exponente la suma de los exponentes.*

Ejemplo : $5^4 \cdot 5^9 = 5^{13}$.

Cociente de potencias de igual base. — Dadas dos potencias de la misma base, a^m, a^n, nuestro problema es hallar el cociente $\frac{a^m}{a^n}$.

Desarrollando las potencias, encontramos :

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{\overbrace{a \times a \times \dots \times a}^{m \text{ veces}}}{\underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ veces}}};$$ ahora bien, sabemos que

$a^n \cdot a^{m-n} = a^{m-n+n} = a^m$; por definición de división exacta, $\Longrightarrow \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, y podemos decir : *el cociente de potencias de la misma base es otra potencia de la misma base, que tiene por exponente la diferencia de los exponentes del numerador y el denominador.*

En virtud del resultado anterior vamos a hallar cuanto vale a^0. Sabemos que $a^0 = a^{n-n} = \frac{a^n}{a^n} = 1; \Longrightarrow \quad a^0 = 1$.

TEOREMA. — Cualquier número elevado a cero vale 1.

La demostración de este teorema es consecuencia inmediata del desarrollo anterior.

Cuadrados. — *De una suma de números naturales.* — Sea la suma de dos números naturales $a + b$, tratemos de hallar $(a + b) \cdot (a + b) = (a + b)^2$.

$$(a + b) \cdot (a + b) = a \cdot (a + b) + b \cdot (a + b) =$$
$$a^2 + a \cdot b + b \cdot a + b^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2,$$

relación que se conoce como cuadrado de un binomio, y que se debe aprender de memoria por su extraordinaria frecuencia.

De una diferencia de números naturales. — Sea la diferencia $a-b$, y tratemos de hallar el producto: $(a-b)\cdot(a-b)$.

$$(a-b)\cdot(a-b)=a\cdot(a-b)-b\cdot(a-b)=a^2-a\cdot b-(b\cdot a-b^2)=a^2-a\cdot b-b\cdot a+b^2=a^2+b^2-2\cdot a\cdot b$$

con lo que definitivamente tenemos:

$$(a-b)^2=a^2+b^2-2\cdot a\cdot b.$$

Producto de una suma de dos números por la diferencia de los mismos. — Sean las suma y diferencia $(a+b)$ y $(a-b)$ de dos números naturales. Hallemos su producto:

$$(a+b)\cdot(a-b)=a\cdot(a-b)+b\cdot(a-b)=a^2-a\cdot b+b\cdot a-b^2=a^2-b^2.$$

Resultado que podemos sintetizar escribiendo: *suma por diferencia es igual a diferencia de cuadrados.*

Cubo de una suma y diferencia de números naturales. — Se trata ahora de hallar el desarrollo de cada una de las expresiones $(a+b)^3$ y $(a-b)^3$.

$$(a+b)^3=(a+b)^2\cdot(a+b)=(a^2+2\cdot a\cdot b+b^2)\cdot(a+b)=a^3+a^2\cdot b+2\cdot a^2\cdot b+2a\cdot b^2+b^2\cdot a+b^3=a^3+3\cdot a^2\cdot b+3\cdot a\cdot b^2+b^3,$$

expresión que para recordarla podemos enunciar: *el cubo de una suma de dos números es igual al cubo del primero más el triple del cuadrado del primero por el segundo más el triple del primero por el cuadrado del segundo más el cubo del segundo.*

De igual manera encontraríamos para la expresión

$$(a-b)^3=(a-b)^2\cdot(a-b)=a^3-3\cdot a^2\cdot b+3\cdot a\cdot b^2-b^3.$$

Resultado que enunciamos así: *el cubo de una diferencia de dos números es igual al cubo del primero menos el triple del cuadrado del primero por el segundo más el triple del primero por el cuadrado del segundo menos el cubo del segundo.*

Ejemplo: $(5-2)^2=5^2-2\cdot5\cdot2+2^2=25-20+4=9$

$(2+3)^3=2^3+3\cdot2^2\cdot3+3\cdot2\cdot3^2+3^2(x+3)^2=x^2+2x\cdot3+3^2.$

Potencias. — *De un producto.* — *Dado un producto de números naturales* $a\cdot b\cdot c\ldots m$, *para elevar dicho producto a una potencia cualquiera se elevan cada uno de los factores a dicha potencia, multiplicándose los resultados obtenidos.* En efecto:

$$(a\cdot b\cdot c\cdot\ \ \cdot m)^n=\overbrace{(a\cdot b\cdot\ldots\cdot m)\cdot(a\cdot b\cdot\ldots\cdot m)\cdot(\cdot\ldots\cdot(a\cdot b\cdot\ldots\cdot m)}^{n\text{ veces}},$$

aplicando la propiedad conmutativa se tiene:

$$\overbrace{a\cdot a\cdot\ldots a}^{n\text{ veces}}\ \overbrace{b\cdot b\cdot\ldots b}^{n\text{ veces}}\cdots\overbrace{m\cdot m\cdot\ldots m}^{n\text{ veces}}=a^n\cdot b^n\cdot\ldots m^n.$$

De un cociente. — *Dado un cociente de números naturales* $\frac{a}{b}$, *para elevar dicho cociente a una potencia se elevan el numerador y el denominador independientemente, dividiéndose después los resultados obtenidos* $\Longleftrightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$. En efecto:

Llamemos $\frac{a}{b}=c \Longrightarrow a=b\cdot c \Longrightarrow a^n=b^n\cdot c^n \Longrightarrow \frac{a^n}{b^n}=c^n$, pero $c=\frac{a}{b} \Longrightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$, como queríamos demostrar.

Radicación de números naturales

Dado un número $a\in\mathbb{N}$, *llamaremos raíz* n*-sima de* a *y la representaremos por* $\sqrt[n]{a}$, *a un número* b, *tal que se verifique que* $b^n=a$.

—A a se le denomina *radicando*, a n *índice* de la raíz, a b la *raíz* y el símbolo $\sqrt{\ }$ es el *radical.*

Para nosotros tiene especial importancia el caso en que $n=2$, que llamaremos *raíz cuadrada.*

Práctica de la raíz cuadrada. — 1.º caso: el número es menor que 100.

Para hallar $\sqrt[2]{a}$, que escribiremos simplemente por $\sqrt{a}$, siendo $a<100$, habremos de conocer los cuadrados de los diez primeros números; si a es un cuadrado perfecto $a=b^2$, y su raíz cuadrada será b que llamaremos raíz cuadrada *exacta*. Ejemplos: $\sqrt{81}=9$; $\sqrt{49}=7$.

Si el número a no es un cuadrado perfecto, su raíz cuadrada, que se llamará *entera*, la efectuaremos del siguiente modo:

a estará comprendido entre los cuadrados de dos números consecutivos b y $b+1$; verificándose $b^2<a<(b+1)^2$ y diremos que $\sqrt{a}=b$ y que su resto es $a-b^2$. Ejemplos: $\sqrt{71}$ | 8, resto 7; $\sqrt{37}$ | 6, resto 1.

2.º Caso: el número es mayor que 100.

Supongamos que queremos extraer la raíz cuadrada de 2 329. Sabemos que se verifica que $10^2<2\,329<100^2 \Longrightarrow$ la raíz tendrá dos cifras: una cifra de las decenas y otra de las unidades.

Si llamamos b a la raíz y r al resto, se verificará que $2\,329=b^2+r$; y el número 2 329 podremos considerarlo como suma de los cuatro números siguientes:

1. Cuadrado de las decenas de b.
2. Doble producto de las decenas de b por las unidades de b.
3. Cuadrado de las unidades de b.
4. Resto de la raíz cuadrada.

Las decenas de b, al elevarlas al cuadrado, nos darán las centenas de 2 329, o sea 23, o el número de centenas más cercano a 23. ¿Qué número es el que elevado al cuadrado se acerca por defecto más a 23? Claramente es el 4, puesto que $4^2<23<5^2$.

Así, pues, la cifra de las decenas del número b buscado es 4, y no puede ser otro, puesto que $40^2<2\,329<50^2$.

Ya tenemos una cifra, 4, que elevada al cuadrado es 16 centenas, o sea 1 600 unidades.

$\sqrt{2\,329}$ | 4
729

El resto, 729 unidades, representa:

1) El doble producto de las decenas por las unidades.
2) El cuadrado de las unidades.
3) El resto de la operación.

La raíz tiene 4 decenas, y el doble del producto de las decenas por las unidades son decenas; dado que tenemos que dividir 72 decenas, para hallar las unidades dividiremos dicha cantidad 72 por el doble de 4, o sea 8. El número encontrado en dicha división es 8 y el resto 25.

$\sqrt{2329}$	4
729	
25	88×8

⟶

$\sqrt{2329}$	48
729	
25	88×8

Con lo cual podemos definitivamente afirmar: b tiene como decenas a 4 y como unidades a 8.

Prueba de la raíz cuadrada. — Para conocer si hemos obtenido con certeza la raíz cuadrada del número a, de la misma definición observamos que $a = b^2 + r$. Que representa la prueba buscada.

En el ejemplo anterior tendríamos : $48 \times 48 = 2\,304$; $2\,304 + 25 = 2\,329$.

Del anterior desarrollo podemos deducir la siguiente regla de obtención.

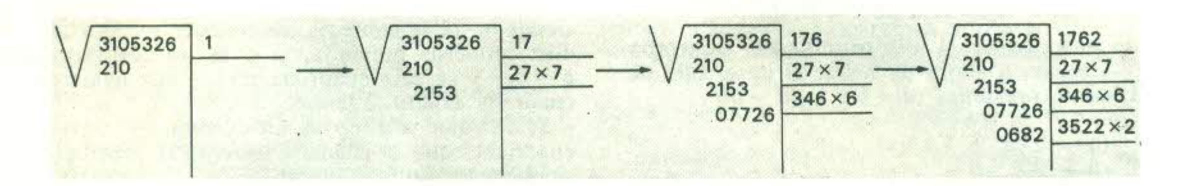
Se divide el número del que queremos extraer su raíz cuadrada en grupos de dos cifras, empezando por la derecha, obteniendo de este modo un primer grupo a la izquierda, que puede constar de una o de dos cifras.

Hallando la raíz cuadrada de dicho primer grupo habremos obtenido la primera cifra de la raíz.

Esta primera cifra se eleva al cuadrado y se resta del primer grupo de la izquierda, operación ésta que nos dará una diferencia. Al lado de esta diferencia escribiremos el siguiente grupo de dos cifras, que dividiremos en el doble de la primera cifra de la raíz obtenida. El cociente hallado es la segunda cifra de dicha raíz. Al resto obtenido de esta división se le añade el siguiente grupo de dos cifras del radicando, que dividiremos nuevamente entre el doble de las dos primeras cifras ya obtenidas de la raíz.

Continuando con este proceso, llegaremos hasta acabar con los grupos de dos cifras del radicando. Si el último resto es 0 la raíz es exacta, en caso contrario será entera.

Ejemplo : Hallar la raíz cuadrada de 3 105 326 :



Operaciones con fracciones

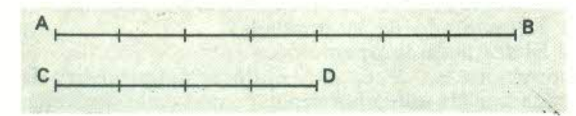
Definición. — Supongamos que queremos medir el segmento AB tomando como unidad de medida el segmento CD.

Inmediatamente nos damos cuenta que la unidad de medida CD no cabe un número entero de veces en AB, sino que cabe solamente una vez y sobra un trozo pequeño del segmento AB.

Ahora bien, podemos observar que, dividiendo la unidad CD en cuatro partes iguales, cada una de ellas cabe exactamente 7 veces en AB. Si a cada una de las partes en que hemos dividido el segmento CD se le llama $\frac{1}{4}$ CD, entonces $AB = \frac{7}{4}CD$.

Decimos también que la medida de AB con dicha unidad es el número fraccionario, que puede ser el quebrado o la fracción $\frac{7}{4}$.

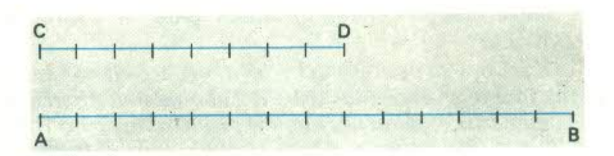
El numerador 7 designa el número de partes que contiene la cantidad medida; el denominador 4 representa el número de partes en que se divide la unidad. Ambos, numerador y denominador, son los términos de la fracción, y definimos «*fracción es un par ordenado de números enteros, llamados numerador y denominador*».



Equivalencia de fracciones. — Supongamos que la unidad CD se divide en ocho partes iguales. Veremos que cada una de ellas cabe exactamente 14 veces en AB. Luego la medida de AB es $\frac{14}{8}$CD.

Pero, como dicha medida ha de ser única, es decir la misma de antes, resulta que $\frac{7}{4} = \frac{14}{8}$.

Y ambas fracciones reciben el nombre de *equivalentes*



Propiedad fundamental. — *Si a los dos términos de una fracción, numerador y denominador, se les multiplica o divide por un mismo número, la fracción obtenida es equivalente a la primera.*

Ejemplo : la fracción $\frac{7}{4}$ es equivalente a la $\frac{7 \times 2}{4 \times 2} = \frac{14}{8}$ y escribimos $\frac{7}{4} = \frac{14}{8}$. De la misma forma $\frac{1}{3} = \frac{3}{9} = \frac{4}{12} = \ldots = \frac{n}{3n}$.

Simplificación. — Aplicando la propiedad fundamental de las fracciones, nos encontramos con que en algunos casos, aquellos en que el numerador y denominador tienen algún divisor común, la fracción se convierte en otra u otras cuyo numerador y denominador son menores que los de la primera. Una de estas fracciones tiene la propiedad de que sus dos términos son primos entre sí : esta fracción se denomina *irreducible*.

De lo anterior deducimos que, para convertir una fracción en otra equivalente pero irreducible, se dividen los dos términos de dicha fracción por el máximo común divisor de ambos. Ejemplo : Hacer irreducibles las fracciones $\frac{14}{8}$ y $\frac{30}{10}$.

M.C.D. $(14, 8) = 2 \Longrightarrow \frac{14:2}{8:2} = \frac{7}{4}$, que es irreducible.

M.C.D. $(30, 10) = 10 \Longrightarrow \frac{30}{10} = \frac{30:10}{10:10} = \frac{3}{1}$, que es irreducible.

Reducción a común denominador. — Este problema consiste en, dadas unas fracciones $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2} \ldots \frac{a_n}{b_n}$, hallar otras fracciones $\frac{A_1}{B}, \frac{A_2}{B}, \ldots, \frac{A_n}{B}$ equivalentes a las primeras $\frac{a_1}{b_1} = \frac{A_1}{B}, \ldots, \frac{a_n}{b_n} = \frac{A_n}{B}$, tal que verifican que todas ellas tienen el mismo denominador.

Para encontrar dichas fracciones, lo más sencillo es multiplicar los dos términos de cada una por el producto de los denominadores de las demás.

Sin embargo, es conveniente que el denominador buscado sea el mínimo posible (mínimo común denominador) en cuya búsqueda se procederá como en el siguiente ejemplo :

Reducir al mínimo común denominador las fracciones siguientes : $\frac{3}{8}, \frac{9}{14}, \frac{10}{24}$.

Convirtiendo estas fracciones en irreducibles, queda :

$$\frac{3}{8} = \frac{3}{8}; \quad \frac{9}{14} = \frac{9}{14}; \quad \frac{10}{24} = \frac{5}{12}.$$

m.c.m. (8, 14, 12) = 168; 168 : 8 = 21; 168 : 14 = 12; 168 : 12 = 14.

$$\frac{3}{8} = \frac{3 \times 21}{8 \times 21} = \frac{63}{168}.$$
$$\frac{9}{14} = \frac{9 \times 12}{14 \times 12} = \frac{108}{168}.$$
$$\frac{5}{12} = \frac{5 \times 14}{12 \times 14} = \frac{70}{168}.$$

REGLA. — Para reducir fracciones a un mínimo denominador común, se procede del siguiente modo :

1) Se convierten estas fracciones en irreducibles.
2) Se halla el mínimo común múltiplo de los denominadores.
3) Se divide el m.c.m. por el denominador de cada fracción, multiplicándose los dos términos de la fracción por el cociente correspondiente.

Comparación. — A veces interesa conocer cuál entre varias fracciones es la mayor; o construir la sucesión decreciente de dichas fracciones.

Para conocer cuál de dos fracciones es mayor que la otra, se reducen ambas a un mismo denominador y, dado que una fracción es un cociente exacto, la que tenga mayor numerador será la mayor de ambas.

Ejemplo : comparar las fracciones $\frac{5}{3}$ y $\frac{6}{4}$.

m.c.m. $(3, 4) = 12$; $\quad \frac{5}{3} = \frac{20}{12}; \quad \frac{6}{4} = \frac{18}{12}$

$$\Longrightarrow \frac{20}{12} > \frac{18}{12} \Longrightarrow \frac{5}{3} > \frac{6}{4}.$$

Análogamente, dadas dos fracciones que tienen igual numerador y distinto denominador, la mayor de ambas es la que tiene menor denominador.

Ejemplo : comparar las fracciones $\frac{17}{9}$ y $\frac{17}{4}$.

Dado que $9 > 4 \Longrightarrow \frac{17}{9} < \frac{17}{4}$.

DEFINICIÓN. — Dos fracciones $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ se dicen iguales si se verifica que $a \cdot d = b \cdot c$.

Ejemplo : $\frac{7}{4} = \frac{14}{8}$ puesto que $7 \times 8 = 14 \times 4$.

Adición. — *La suma de dos fracciones* $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ *es otra fracción que tiene por numerador el producto del numerador de una de ellas por el denominador de la otra, más el producto del numerador de esta última por el denominador de la primera, y por denominador el producto de los denominadores de ambas fracciones* :

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}.$$

Si las fracciones tienen el mismo denominador, para sumarlas, únicamente sumaremos los numeradores :

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a + c}{b}.$$

Ejemplos :

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \frac{2 \times 5 + 3 \times 1}{3 \times 5} = \frac{13}{15}.$$
$$\frac{12}{3} + \frac{7}{3} = \frac{19}{3}.$$

De la misma manera, si en vez de dos fracciones tenemos que sumar tres o más fracciones, operaremos así :

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{m}{n} = \frac{adn + cbn + mbd}{bdn}.$$

REGLA. — Para sumar varias fracciones con distintos denominadores, se opera del siguiente modo :

1) La suma es una nueva fracción que tiene por denominador el producto de los denominadores de cada una de las fracciones.
2) El numerador es una suma de tantos sumandos como fracciones a sumar, siendo cada sumando el producto de cada numerador por el producto de los denominadores de las demás fracciones.

Ejemplo : $\frac{1}{3} + \frac{5}{6} + \frac{2}{4} = \frac{1 \times 6 \times 4 + 5 \times 3 \times 4 + 2 \times 6 \times 3}{3 \times 6 \times 4} =$

$$\frac{24 + 60 + 36}{72} = \frac{120}{72} = \frac{5}{3}.$$

Aún podemos simplificar más el proceso de sumar fracciones utilizando el concepto de mínimo común denominador.

REGLA. — Para sumar varias fracciones con distinto denominador, se procede de la manera siguiente :

1) La suma de dichas fracciones es otra fracción que tiene por denominador el mínimo común denominador de las fracciones.
2) El numerador de la fracción suma es una suma de tantos sumandos como fracciones a sumar, siendo cada sumando el producto del numerador de cada fracción por el cociente de dividir el mínimo común denominador entre el numerador de esa fracción.

Ejemplo : hallar la suma de $\frac{1}{3} + \frac{5}{6} + \frac{2}{4}$.

m.c.m. $(3, 6, 4) = 12 \Longrightarrow \frac{1}{3} + \frac{5}{6} + \frac{2}{4} =$

$$\frac{4 \times 1 + 2 \times 5 + 3 \times 2}{12} = \frac{20}{12} = \frac{5}{3}.$$

Sustracción. — Dadas dos fracciones $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, definimos su diferencia como : *una nueva fracción que tiene por denominador el producto de los denominadores y como numerador una diferencia cuyo minuendo es el producto del numerador de la primera fracción por el denominador de la segunda, y como sustraendo el producto del numerador de la segunda por el denominador de la primera* :

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\times d-b\times c}{b\times d}.$$

En el caso de que ambas fracciones tengan igual denominador, su diferencia es otra fracción que tiene por denominador el mismo de las fracciones y por numerador la diferencia de los numeradores.

Ejemplos :

$$\frac{5}{3}-\frac{4}{5}=\frac{5\times 5-4\times 3}{3\times 5}=\frac{25-12}{15}=\frac{13}{15}$$

$$\frac{5}{3}-\frac{2}{3}=\frac{3}{3}.$$

En el caso de que tengamos que operar combinadamente con sumas y diferencias de fracciones, indicamos a continuación la manera de proceder :

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}-\frac{m}{n}=\frac{adn+cbn-mbd}{bdn}.$$

Ejemplo : resolver la suma $\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{9}{4}-\frac{5}{3}$.

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{9}{4}-\frac{5}{3}=\frac{1\times 5\times 4\times 3-1\times 3\times 4\times 3+9\times 3\times 5\times 3-5\times 3\times 5\times 4}{180}$$

$$=\frac{60-36+405-300}{180}=\frac{105}{180}.$$

Producto. — *Dadas dos fracciones* $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, *su producto es otra fracción que tiene por numerador el producto de los numeradores y por denominador el producto de los denominadores :*

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}.$$

Ejemplos :

$$\frac{3}{4}\times\frac{1}{9}=\frac{3\times 1}{4\times 9}=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$$

$$\frac{7}{3}\times\frac{2}{5}=\frac{7\times 2}{3\times 5}=\frac{14}{15}.$$

Si el producto se extiende a más de dos factores, se operará de igual modo :

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\times\frac{m}{n}\times\frac{t}{q}=\frac{a\times c\times m\times t}{b\times d\times n\times q}.$$

En el caso de que queramos multiplicar un número entero por una fracción, operaremos como si el número entero fuese una fracción cuyo denominador es 1 :

$$a\times\frac{m}{n}=\frac{a}{1}\times\frac{m}{n}=\frac{a\times m}{1\times n}.$$

Ejemplo : $2\times\frac{5}{4}=\frac{2}{1}\times\frac{5}{4}=\frac{10}{4}.$

División. — *Dadas dos fracciones* $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, *su cociente es otra fracción, cuyo numerador es el producto del numerador de la primera fracción por el denominador de la segunda y cuyo denominador es el producto del denominador de la primera por el numerador de la segunda :*

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a\times d}{c\times b}.$$

En el caso de que queramos obtener el producto de un número entero por una fracción operaremos como si el número entero fuese una fracción cuyo denominador es 1 :

$$a:\frac{b}{d}=\frac{a}{1}:\frac{b}{d}=\frac{a\times d}{b\times 1}.$$

Ejemplos :

$$\frac{1}{3}:\frac{4}{5}=\frac{5\times 1}{4\times 3}=\frac{5}{12};\quad \frac{2}{9}:\frac{30}{17}=\frac{2\times 17}{30\times 9}=\frac{34}{270};\quad 3:\frac{1}{7}=\frac{3}{1}:\frac{1}{7}=\frac{21}{1}.$$

Números decimales

Definición. — *Se llama fracción decimal aquella fracción ordinaria cuyo denominador es la unidad seguida de ceros.* Ejemplo : las fracciones $\frac{2}{10}$, $\frac{25}{100}$, $\frac{3}{1\,000}$ son fracciones decimales.

Unidades decimales. — Consideremos la sucesión de fracciones $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1\,000}$, $\frac{1}{10\,000}$ ... que llamaremos : una décima, una centésima, una milésima, una diezmilésima, etc. Cada una de ellas representa la décima parte de la anterior y la primera es la décima parte de 1.

Con esta notación, una fracción cualquiera puede considerarse como la suma de una parte entera y de las unidades decimales de diversos órdenes. Por ejemplo, la fracción $\frac{43\,536}{1\,000}=\frac{40\,000}{1\,000}+\frac{3\,000}{1\,000}+\frac{500}{1\,000}+\frac{30}{1\,000}+\frac{6}{1\,000}=$ $43+\frac{500}{1\,000}+\frac{30}{1\,000}+\frac{6}{1\,000}=43+\frac{5}{10}+\frac{3}{100}+\frac{6}{1\,000}.$

En notación decimal, el número 43 536 lo escribimos también en la forma 43,536 ó 43'536.

La fracción $\frac{374}{10\,000}$ se escribirá en notación decimal como 0'037 4. En general, dada una fracción decimal, para ponerla en forma decimal se escribirá el numerador, y a continuación se separarán con una coma tantas cifras como ceros tenga el denominador, empezando por la derecha.

Definición. — *Llamaremos número decimal a toda fracción decimal escrita en la forma últimamente indicada.*

Para leer un número decimal, se enuncia la parte entera y a continuación la parte decimal, como si fuese un número entero, añadiendo después la denominación de las unidades que representan su última cifra. De esta manera el número 43,536 lo leeríamos : 43 unidades 536 milésimas, aunque se acostumbra abreviar y entonces se dice sólo : cuarenta y tres coma quinientos treinta y seis.

El número 0'018 lo leeríamos : cero coma dieciocho milésimas.

Propiedades de los números decimales. — 1. El valor de un número decimal no se altera al añadir o suprimir a la derecha de la última cifra de la coma un número cualquiera de ceros.

Ejemplo : los números 0'025 y 0'02500 representan el mismo número decimal, pues las fracciones decimales correspondientes son equivalentes.

En efecto, $\frac{25}{1\,000} = \frac{2\,500}{100\,000}$.

2. Si en un número decimal se corre la coma a la derecha o a la izquierda n lugares, el número queda respectivamente multiplicado o dividido por 10^n ; e inversamente, para multiplicar o dividir un número decimal o entero por una potencia de 10, se corre la coma a la derecha tantos lugares como ceros tenga dicha potencia de 10.

Ejemplos :

435'01 × 1 000 = 435 010
435'01 : 1 000 = 0'435 01
23'701 × 100 = 2 370'1.

Suma. — *Para sumar varios números decimales se operará como si fuesen enteros, colocando siempre los sumandos de tal manera que las comas se correspondan todas entre sí. Una vez efectuada la suma, la coma se colocará en la misma columna en que se encuentren todas las comas de los sumandos.*

Ejemplo : sumar 4'005 + 0'0137 + 945'9 + 374,

```
   4'005
+  0'0137
+ 945'9
+ 374
----------
1 323'9187.
```

Sustracción. — *Para restar dos números decimales se escribe el minuendo encima del sustraendo, haciendo coincidir las comas de dichos números. Posteriormente se añaden tantos ceros como hagan falta a la derecha de uno o de otro para que ambos tengan el mismo número de cifras. Una vez hecho esto, se efectúa la operación como si fuesen números enteros.*

Ejemplos : efectuar 0'01 − 0'00573 y 8'539 − 7'6,

```
  0'01000      8'539
− 0'00573    − 7'600
---------    -------
  0'00427      0'939.
```

Multiplicación. — *Dados dos números decimales cualesquiera, para multiplicarlos se opera exactamente igual que si fuesen enteros, separando después de la derecha del producto tantas cifras decimales como suma de las que haya en ambos factores.*

Ejemplos :

```
  45'79        89'01
× 0'005       × 7'6
-------      -------
0,22895       53406
             62307
             -------
             676'476.
```

División. — Vamos a analizar cuatro casos diferentes.

1. División de un decimal por un entero.

Para dividir un número decimal por un entero se opera igual que si fuesen enteros, y después se toman en el cociente tantas cifras decimales como tenga el dividendo.

Ejemplo : efectuar las siguientes divisiones,

```
348'21 | 1 231        21'300 | 456
10201  | 0'28          3060  | 0'046.
0353   |                324  |
```

2. División de un entero por un decimal.

Para dividir un número entero por un número decimal se añaden al dividendo tantos ceros como cifras decimales tenga el divisor, suprimiendo después de haber hecho esto la coma del divisor. Posteriormente la división queda reducida a dividir números enteros. Ejemplo :

```
893 : 4'51  ⟺  89300 | 451
                4420 | 197.
                 3610 |
                  453 |
```

3. Dividir un número entero por otro entero que sea mayor que él.

Para dividir un número entero (dividendo) entre otro mayor que él (divisor), se añaden al dividendo tantos ceros como sean necesarios hasta conseguir que éste sea mayor que el divisor. Posteriormente se dividen como si fueran enteros, para al final tomar en el cociente tantas cifras decimales como ceros hayamos añadido al dividendo.

Ejemplos : efectuar 37 : 591 y 453 : 3 331,

```
37000 | 591        45300 | 3 331
 1540 | 0'062      11990 | 0'13.
  358 |
```

4. Dividir un número decimal por otro número decimal.

Para efectuar la división se suprimen las cifras decimales del divisor, multiplicando el dividendo por la unidad seguida de tantos ceros como unidades decimales hayamos suprimido en el divisor, y se efectúa entonces la división como en el caso 1. Ejemplos :

efectuar : 437'001 : 54'32 y 89'01 : 375'2,

```
43700'10 | 5432       890'1 | 3752
 024410  | 8'04       1397  | 0'2.
   2682  |
```

Potenciación de números racionales. — *Dado un número racional* $\frac{a}{b}$, *su potencia n-ésima* $\left(\frac{a}{b}\right)^n$ *es otro número racional que tiene como numerador* a^n *y como denominador* b^n *:*

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Ejemplo : $\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{2^5}{3^5}$.

Radicación de números racionales. — *Dado un número racional* $\frac{a}{b}$, *que verifique* $\frac{a}{b} = \left(\frac{m}{p}\right)^n$, *diremos que* $\frac{m}{p}$ *es la raíz n-ésima de* $\frac{a}{b}$.

Dado que $\left(\frac{m}{p}\right)^n = \frac{m^n}{p^n}$ y que además

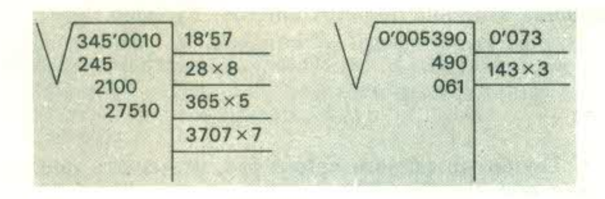
$\frac{m^n}{p^n} = \frac{a}{b} \iff \begin{cases} m^n = a \\ p^n = b \end{cases}$, o lo que es igual,

$$m = \sqrt[n]{a};\, p = \sqrt[n]{b}.$$

Ejemplo : $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}$.

Raíz cuadrada de un número decimal. — *Dado un número decimal cualquiera, la extracción de su raíz cuadrada es como sigue : se separan las cifras de dos en dos, a partir de la coma hacia la izquierda, efectuando posteriormente la operación como si no hubiera decimales. Después se toman en la raíz tantas cifras decimales como la mitad del número de cifras decimales del dividendo.*

Ejemplos : efectuar las raíces cuadradas siguientes,

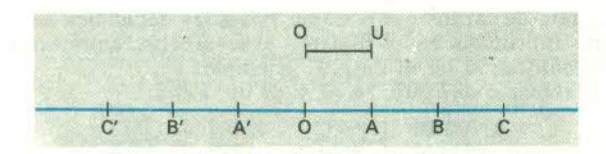


Magnitudes absolutas y relativas

Los números que hasta ahora hemos utilizado, y que llamaremos positivos, nos permiten medir muchas magnitudes, como áreas, volúmenes, tiempos, etc. Existen, sin embargo, otras magnitudes para cuyas medidas son insuficientes los números positivos, dado que pueden variar en dos sentidos.

Veamos un ejemplo de tal tipo de magnitudes :

consideremos una recta r y un punto O de ella. A partir de O hay dos sentidos de movimiento sobre la recta : el de izquierda a derecha y el de derecha a izquierda, que llamaremos opuesto al primero.



Si tomamos un segmento arbitrario OU como unidad, y decimos por ejemplo que un punto dista 3 unidades de O, el punto no queda determinado, ya que existen dos puntos de la recta, el C y el C', que distan tres unidades de O.

Esto nos lleva a la conclusión de que no es suficiente dar la distancia hasta el punto O, sino que es preciso añadir algo que nos permita conocer en cual de las dos semirrectas de origen O hemos de tomar la distancia.

Normalmente, podríamos decir que C está a 3 unidades a la derecha de O, y que C' está a 3 unidades a la izquierda de O.

En lenguaje matemático, los conceptos derecha e izquierda los vamos a sustituir por los *positivo* y *negativo* respectivamente, que designaremos mediante los signos $+$ y $-$. En nuestro ejemplo, diremos que C dista $+3$ unidades de O y que C' dista -3 unidades de O.

Ejemplos : 1. En la escala centígrada de temperaturas, se consideran dos sentidos : según sean mayores o menores que la temperatura de fusión del hielo, y que designaremos por grados positivos o negativos, respectivamente. De esta manera, a la temperatura de ebullición del agua le llamamos $+100\,^{0}$C, y al cero absoluto de temperaturas le llamaremos $-273\,^{0}$C.

2. Tomando el nivel del mar como origen de alturas, podemos decir que el Pico Mulhacén (España) está a $+3\,478$ metros o también a 3 478 metros sobre el nivel del mar. En este caso el signo $+$ ha sustituido a la partícula « sobre ». De la misma manera, si decimos que un submarino está a -300 metros, queremos decir que se encuentra a 300 metros bajo la superficie del mar.

3. El saldo de una persona en su cuenta corriente del banco lo convierte en acreedor o deudor. En el primer caso la cantidad que posee la designaremos mediante números positivos, y en el segundo la cantidad que debe al banco la designaremos mediante números negativos.

Consecuentes con estas definiciones, si en una cuenta corriente aparece escrita la cantidad $-1\,000$, quiere decir que debemos 1 000 unidades monetarias al banco; sin embargo, si la cantidad escrita es $+4\,000$, esto significa que el banco nos adeuda 4 000.

Números positivos y negativos. — En los ejemplos anteriores hemos antepuesto el signo $+$ a las medidas de las cantidades correspondientes a uno de los sentidos de una magnitud relativa, y el signo $-$ a las medidas correspondientes al sentido opuesto. La atribución del signo a uno u otro sentido es completamente arbitraria, pues sólo sirve para indicar que ambos sentidos son distintos.

Valor absoluto de un número. — *Valor absoluto de un número es el número positivo que resulta de suprimirle el signo.*

El valor absoluto de un número a se representa mediante la notación $|a|$.

Ejemplos : $|4| = 4; \quad |-4| = 4.$

Números opuestos. — *Números opuestos aquellos que tienen igual valor absoluto pero distinto signo.*

Así, si a es un número positivo se tiene :

El opuesto de $+a$ es $-a$.

El opuesto de $-a$ es $+a$.

Consecuentes con esta definición estableceremos el siguiente convenio :

$$-(+a) = a.$$
$$-(-a) = +a.$$

Ejemplos :

el opuesto de $+\frac{3}{4}$ es $-\frac{3}{4}$, el de $-\frac{1}{3}$ es $+\frac{1}{3}$.

Desigualdad de números racionales. — Una vez hemos visto que existen números enteros negativos y fracciones negativas, y que todo número entero podemos considerarlo como un número racional cuyo denominador es la unidad, vamos a establecer las siguientes propiedades importantes :

a) de dos números positivos, es mayor el de mayor valor absoluto;

b) todo número positivo es mayor que todo negativo :

$$a > -b \quad a \text{ y } b \text{ positivos;}$$

c) el cero es mayor que todo número negativo :

$$0 > -b \quad b \text{ positivo;}$$

d) de dos números negativos, es menor el de mayor valor absoluto :

$$-b < -a \quad \text{si} \quad |-b| > |-a|.$$

Ejemplo : ordenar de mayor a menor la siguiente sucesión de números racionales :

$$\frac{1}{3}, -2, -\frac{1}{5}, +\frac{1}{7}, -7, +5, 0$$

$$+5 > \frac{1}{3} > \frac{1}{7} > 0 > -\frac{1}{5} > -2 > -7.$$

Suma de números de distinto signo. — *La suma de dos números de distinto signo es otro número cuyo valor absoluto es la diferencia de los valores absolutos de los*

sumandos, y cuyo signo es el del sumando de mayor valor absoluto.

Simbólicamente, si a y b son números racionales positivos, se tiene:

$$(+a)+(+b)=+(a+b)$$
$$(-a)+(-b)=-(a+b).$$

Si es $a>b$, se tiene:

$$+a+(-b)=+(a-b)$$
$$+b+(-a)=-(a-b).$$

En particular si es $a=b$ resulta: $(+a)+(-a)=0$.

Ejemplos:

1. $+3+(-5)=-(5-3)=2$ 2. $(+4)+(+3)=+7$.
3. $(-8)+(-5)=-(8+5)=-13$ 4. $-3+(+3)=0$.

En particular, si hemos de sumar varios números de distinto signo, se suman por un lado los positivos y por otro los negativos. De la suma mayor, se resta la menor y a la diferencia se le pone el signo de la mayor.

Ejemplos:

1. $1+3-5-4+5-8+13=(1+3+5+13)$
$-(5+4+8)=22-17=5.$
2. $-3-2-1+7-4+2=-(3+2+1+4)+(7+2)=$
$-10+9=-(10-9)=-1.$

Sustracción de números racionales. — *Dados dos números racionales* a *y* b, *su diferencia es el número racional que hay que sumar a* b *para obtener* a.

Veamos cómo la existencia de números opuestos reduce el cálculo de una diferencia al de una suma. Llamemos $b'=-b$; es decir $b'+b=0$. Sumando miembro a miembro las igualdades $\begin{cases} a=b+d \\ b'=b' \end{cases}$ donde d es $a=-b$, obtenemos: $a+b'=d+b+b'$, dado que $b+b'=0 \Longrightarrow a+b'=d$, o sea $d=a+b'$ o también $d=a+(-b)$ y obtenemos la siguiente regla: *para restar dos números, se suma al minuendo el opuesto al sustraendo.*

Si a y b son dos números positivos, los casos que pueden presentarse son los siguientes:

$$(+a)-(-b)=a+b$$
$$(+a)-(+b)=a+(-b)$$
$$(-a)-(+b)=(-a)+(-b)$$
$$(-a)-(-b)=(-a)+(+b).$$

Con la aparición de los números negativos hemos superado un problema que no era posible resolver en el conjunto de los números naturales, a saber, la diferencia entre dos números naturales o fraccionarios en los que el minuendo era menor que el sustraendo. Con los números negativos la resta no es más que una suma, y por lo tanto poseerá sus mismas propiedades.

Ejemplos:

1. $(-5)-(-3)=-5+(+3)=-5+3=$
$=-(5-3)=-2.$
2. $+5-(-3)=+5+(+3)=+8.$
3. $-5-(+3)=-5+(-3)=-8.$
4. $+5-(+3)=+5+(-3)=+(5-3)=+2.$

Multiplicación de dos números racionales. — *El producto de dos números racionales es otro número racional cuyo valor absoluto es el producto de los valores absolutos de los factores y cuyo signo es + o −, según que los factores sean del mismo o de distinto signo.*

El signo del producto se recuerda fácilmente por medio de la siguiente regla, que llamaremos *regla de los signos* para la multiplicación.

$$+ \times + = +$$
$$+ \times - = -$$
$$- \times + = -$$
$$- \times - = +$$

Ejemplos:

1. $\frac{4}{5}\times\frac{7}{3}=\frac{4\times7}{5\times3}=\frac{28}{15}.$ 2. $\frac{4}{5}\times-\frac{7}{3}=-\frac{28}{15}.$
3. $-\frac{4}{5}\times\frac{7}{3}=-\frac{28}{15}.$ 4. $-\frac{4}{5}\times-\frac{7}{3}=\frac{28}{15}.$

Producto de más de dos factores. —*Aplicando la propiedad asociativa de la multiplicación, podemos hallar el producto de varios factores. Éste es el resultado de calcular el producto de los dos primeros; este producto se multiplica por el tercer factor, el resultado por el cuarto factor, y así sucesivamente. El valor absoluto del producto es, por tanto, el producto de los valores absolutos de los factores y su signo es + o − según que el número de factores negativos sea par o impar.*

Ejemplos:

1. $\frac{8}{3}\times-\frac{5}{4}\times-\frac{1}{2}=\frac{40}{24}.$ 2. $-\frac{1}{3}\times\frac{5}{9}\times\frac{1}{4}=-\frac{5}{108}.$
3. $-\frac{1}{4}\times\frac{1}{9}\times-\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}=\frac{2}{360}.$ 4. $(-1)\times(-5)\times(-7)$
$=-35.$

División de números racionales. — *Dados dos números racionales, llamados dividendo y divisor, siendo el divisor distinto de cero, su cociente es un número racional que verifica la propiedad que multiplicado por el divisor es igual al dividendo.*

Si llamamos a al dividendo, b al divisor, el valor absoluto del cociente c es tal que verifica: $|c|\cdot|b|=|a|$. El signo del cociente queda establecido mediante la siguiente regla de los signos:

+ entre + igual a +
+ entre − igual a −
− entre + igual a −
− entre − igual a +.

Potenciación de números racionales. — *Potencia entera de un número racional es un producto de factores iguales a este número.* Dicho número es la *base* de la potencia. *Exponente* es el número de veces que se toma la base como factor.

Para calcular la potencia natural de un número racional se halla la potencia del valor absoluto de la base. Si la base es positiva, la potencia también lo es; pero si la base es negativa, la potencia es positiva o negativa según que el exponente sea par o impar.

El resultado anterior acerca de los signos queda establecido en la siguiente tabla:

$$(+a)^n=+a^n$$
$$(-a)^n=\begin{cases} +a^n, \text{ si } n \text{ es par} \\ -a^n, \text{ si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Propiedades de las potencias. — Las propiedades de las potencias de números racionales (positivos y negativos) son idénticas a las propiedades ya dadas para las potencias de bases positivas. Recordamos, no obstante, dichas propiedades acompañadas de algunos ejemplos:

1. Para multiplicar dos potencias de la misma base se eleva dicha base a la suma de los exponentes.

Ejemplos:

a) $\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\left(\frac{1}{3}\right)^3=\left(\frac{1}{3}\right)^{2+3}=\frac{1}{3^5};$

b) $(-1)^2\times(-1)^3=(-1)^5=-1$, y

c) $(0'5)^2\times(0'5)^3=0'5^{2+3}=0'5^5.$

2. Para dividir dos potencias de la misma base, se eleva dicha base a la diferencia de los exponentes.

Ejemplos :

a) $4^2 : 4^1 = 4$;

b) $\frac{4^3}{4^0} = 4^{3-0} = 4^3$, y

c) $\left(\frac{1}{3}\right)^5 : \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{3^3}$.

3. Para elevar una potencia a otro exponente, se eleva la base al producto de los exponentes.

Ejemplos :

a) $[(2)^3]^2 = 2^{3\times 2} = 2^6$, y

b) $\left[\left(\frac{1}{3}\right)^2\right]^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^{2\times 2} = \frac{1}{3^4}$.

4. El producto de dos potencias del mismo exponente es igual al producto de las bases elevado a dicho exponente.

Ejemplos :

a) $5^3 \times 4^3 = (5 \times 4)^3 = 20^3$;

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 \times 2^3 = \left(\frac{1}{2} \times 2\right)^3 = 1^3 = 1$, y

c) $\left(\frac{4}{3}\right)^2 \times \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \left(\frac{4}{3} \times \frac{1}{5}\right)^2 = \left(\frac{4}{15}\right)^2$.

5. Para elevar un producto a un exponente, se eleva a dicho exponente cada factor, multiplicándose después las potencias obtenidas.

Ejemplos :

a) $\left(3 \times 5 \times \frac{1}{4}\right)^2 = 3^2 \times 5^2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 3^2 \times 5^2 \times \frac{1}{4^2}$, y

b) $[4 \times (-1) \times 5]^3 = 4^3 \times (-1)^3 \times 5^3 = 4^3 \times 5^3 \times (-1)$
$= (4 \times 5)^3 \times (-1) = -20^3 = -8\,000$.

6. El cociente de dos potencias del mismo exponente es igual al cociente de las bases elevado a dicho exponente.

Ejemplos :

a) $\frac{(-4)^3}{2^3} = \left(-\frac{4}{2}\right)^3 = (-2)^3 = -2^3 = -8$, y

b) $\frac{2^5}{\left(\frac{1}{3}\right)^5} = \left(\frac{2}{1}\right)^5 : \left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{2^5}{1} : \frac{1}{3^5} = 2^5 \times 3^5 = (2 \times 3)^5 = 6^5$.

7. Para elevar un cociente a un exponente se elevan a dicho exponente ambos términos, y se dividen las potencias obtenidas.

Ejemplos :

a) $\left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{4^3}{5^3}$;

b) $\left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{(-2)^2}{3^2} = \frac{4}{9}$, y

c) $\left(\frac{7}{4} : \frac{1}{2}\right)^3 = \left(\frac{7}{4}\right)^3 : \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{7^3}{4^3} : \frac{1^3}{2^3} = \frac{7^3 \times 2^3}{4^3 \times 1^3} = \frac{(7 \times 2)^3}{4^3} = \frac{14^3}{4^3}$.

Radicación de números racionales. — *Se llama raíz de índice* n *de un número racional* a *a otro número* b *(si existe), cuya potencia de exponente* n *sea igual a* a :

$$\sqrt[n]{a} = b \iff b^n = a.$$

Decimos si existe, pues no todo número racional tiene raíces; por ejemplo el número -4 no tiene raíz cuadrada, ya que si la tuviese ésta habría de ser un número positivo o un número negativo. En ambos casos, aplicando la definición de raíz cuadrada, el cuadrado de dicha raíz habría de ser -4; pero esto es imposible pues ningún número elevado al cuadrado es -4.

Observemos también que la raíz de un número racional no es única, en efecto $\sqrt{4} = \pm 2$, puesto que $(+2)^2 = 4$, y $(-2)^2 = 4$.

Recordando, podemos afirmar :

1. Las raíces de índice par y radicando positivo tienen dos valores opuestos.
2. Las raíces de índice impar tienen un solo valor, del mismo signo que el radicando.
3. Las raíces de índice par de números negativos son imposibles de calcular.

Ejemplos :

a) $\sqrt{16} = \pm 4$;

b) $\sqrt[4]{16} = \pm 2$, puesto que $(+2)^4 = 16$ y $(-2)^4 = 16$;

c) $\sqrt{\frac{1}{4}} = \pm \frac{1}{2}$;

d) $\sqrt[3]{8} = 2$;

e) $\sqrt[3]{-8} = -2$, y

f) $\sqrt{-8}$ no existe.

Potencias de números racionales con exponentes negativos.

TEOREMA. — $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

En efecto, tenemos que $a^n \cdot a^{-n} = a^{n+(-n)} = a^0 = 1$; ahora bien, si el producto de dos números racionales distintos de 1 es 1, ello quiere decir que los números son inversos, o sea, que si uno es x, el otro es $\frac{1}{x}$. Consecuentes con esto, tendremos que $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$; $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$ que es lo que queríamos demostrar.

Ejemplos :

1. $a^{-1} = \frac{1}{a^1} = \frac{1}{a}$, resultado importante que nos dice que el inverso de cualquier número a, puede ponese en la forma a^{-1};
2. $3^{-1} = \frac{1}{3^1} = \frac{1}{3}$;
3. $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{1}{1} : \frac{1}{4^2} = \frac{4^2 \times 1}{1 \times 1} = 4^2$;
4. $(-5)^{-2} = \frac{1}{(-5)^2} = \frac{1}{5^2}$;
5. $(-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = \frac{1}{-8} = -\frac{1}{8}$.

Cálculo con radicales cuadráticos. — Dado un número cualquiera a entero o racional, llamaremos raíz enésima de a a otro número b, tal que se verifique que $b^n = a$ y escribiremos $\sqrt[n]{a} = b$.

Dos raíces $\sqrt[n]{a}$, $\sqrt[m]{a}$ se llaman homogéneas si $m = n$, y heterogéneas si $m \neq n$.

Notación potencial de una raíz. — Definiremos la potencia racional $a^{\frac{1}{n}}$ como : $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$. Dado que $(\sqrt[n]{a})^m = (a^{\frac{1}{n}})^m$, y como para elevar una potencia a otra potencia se multiplican los exponentes, entonces $(\sqrt[n]{a})^m = (a^{\frac{1}{n}})^m = a^{\frac{m}{n}}$. De esta manera todo el cálculo de raíces queda reducido al cálculo de potencias :

1. $\dfrac{\sqrt[n]{A^m}}{\sqrt[p]{A^q}} = \dfrac{A^{\frac{m}{n}}}{A^{\frac{q}{p}}} = A^{\frac{m}{n}-\frac{q}{p}} = \sqrt[pn]{A^{mp-qn}}$;

2. $\sqrt[n]{A^m} \times \sqrt[p]{A^q} = A^{\frac{m}{n}} \times A^{\frac{q}{p}} = A^{\frac{m}{n}+\frac{q}{p}}$;

3. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{A}} = \left(A^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}} = A^{\frac{1}{m}\times\frac{1}{n}} = A^{\frac{1}{m\cdot n}} = \sqrt[m\cdot n]{A}$;

4. $(\sqrt[m]{A})^n = (A^{\frac{1}{m}})^n = A^{\frac{n}{m}}$.

Ejemplos :

1. $\dfrac{\sqrt[5]{4^2}}{\sqrt{4}} = \dfrac{4^{\frac{2}{5}}}{4^{\frac{1}{2}}} = 4^{\frac{2}{5}-\frac{1}{2}} = 4^{-\frac{1}{10}} = \dfrac{1}{\sqrt[10]{4}}$;

2. $\sqrt[5]{4^2} \times \sqrt{4} = 4^{\frac{2}{5}} \times 4^{\frac{1}{2}} = 4^{\frac{2}{5}+\frac{1}{2}} = 4^{\frac{10}{9}} = \sqrt[9]{4^{10}}$;

3. $\sqrt[n]{\dfrac{1}{\sqrt[m]{A}}} = \sqrt[n]{A^{-\frac{1}{m}}} = (A^{-\frac{1}{m}})^{\frac{1}{n}} = A^{-\frac{1}{m}\times\frac{1}{n}} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{\sqrt[m]{A}}} = \dfrac{1}{\sqrt[mn]{A}}$;

3'. $\sqrt[4]{\sqrt[5]{7}} = \left(7^{\frac{1}{5}}\right)^{\frac{1}{4}} = 7^{\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}} = 7^{\frac{1}{20}}$;

4. $\sqrt{3^4} = 3^{\frac{4}{2}} = 3^2$;

4'. $\sqrt[4]{3^{12}} = 3^{\frac{12}{4}} = 3^3$;

4''. $\sqrt[8]{2^4} = 2^{\frac{4}{8}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$.

Multiplicación de radicales homogéneos. — Dadas dos raíces del mismo índice $\sqrt[m]{A}$ y $\sqrt[m]{B}$, su producto es otra raíz del mismo índice cuyo radicando es el producto de los radicandos, es decir : $\sqrt[m]{A} \times \sqrt[m]{B} = \sqrt[m]{A \times B}$.

En efecto, sea $\sqrt[m]{A} = a$ y $\sqrt[m]{B} = b$; esto significa que $a^m = A$, $b^m = B \Longrightarrow a^m \cdot b^m = A \cdot B \Longrightarrow (a \cdot b)^m = A \cdot B \Longrightarrow \sqrt[m]{A \cdot B} = a \cdot b \Longrightarrow \sqrt[m]{A \cdot B} = \sqrt[m]{A} \cdot \sqrt[m]{B}$.

Ejemplos. Hallar los productos siguientes :

1. $8\sqrt{3} \times 5\sqrt{2} = 40\sqrt{3 \cdot 2} = 40\sqrt{6}$;
2. $3\sqrt{8} \times 4\sqrt{2} = 12\sqrt{16} = 12 \cdot 4 = 48$;
3. $5 \times \sqrt{\dfrac{1}{8}} \times 4\sqrt{2} = 20\sqrt{\dfrac{2}{8}} = 20\sqrt{\dfrac{1}{4}} = \dfrac{20}{2} = 10$.

Inversamente, podemos extraer algunos factores del radicando, aplicando la relación $\sqrt[m]{A} \cdot \sqrt[m]{B} = \sqrt[m]{A \cdot B}$, cuando alguno de los factores A o B tienen raíz m-ésima exacta.

Ejemplos :

1. $\sqrt[3]{250} = \sqrt[3]{125 \cdot 2} = \sqrt[3]{125} \cdot \sqrt[3]{2} = 5 \cdot \sqrt[3]{2}$;
2. $\sqrt{32} = \sqrt{2^5} = \sqrt{2^4 \times 2} = \sqrt{2^4} \times \sqrt{2} = 2^{\frac{4}{2}} \times \sqrt{2} = 2^2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$.

Introducción de factores bajo el signo radical. — *Dado el producto de un factor* A *por una raíz n-ésima* $\sqrt[n]{B}$, *para introducir* A *dentro del radicando se opera multiplicando el radicando* B *por* A^n.

Ejemplos :

1. $a \cdot \sqrt{40} = \sqrt{a^2 \cdot 40} = \sqrt{40a^2}$;
2. $5 \cdot 3\sqrt{6} = \sqrt{5^2 \cdot 3^2 \cdot 6} = \sqrt{900} = 30$;
3. $\dfrac{1}{7}\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{\dfrac{5}{7^3}} = \sqrt[3]{\dfrac{5}{343}}$.

División de radicales del mismo índice. — *Dados dos radicales del mismo índice* $\sqrt[n]{A}$ *y* $\sqrt[n]{B}$, *su cociente es una raíz del mismo índice n, cuyo radicando es el cociente de los radicandos :*

$$\frac{\sqrt[n]{A}}{\sqrt[n]{B}} = \sqrt[n]{\frac{A}{B}}.$$

Ejemplos :

1. $\frac{\sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[3]{\frac{25}{5}} = \sqrt[3]{5}$;

2. $\frac{\sqrt{813}}{\sqrt{116}} = \sqrt{\frac{8}{3} : \frac{1}{6}} = \sqrt{16} = 4.$

Racionalización de denominadores. — *Racionalizar el denominador de una fracción es transformar ésta en otra equivalente cuyo denominador sea racional.* Pueden ocurrir dos casos :

1. Que el denominador tenga un solo término. En este caso, para racionalizar la fracción, se multiplican numerador y denominador por un mismo número (una raíz), hasta conseguir que el denominador no tenga raíz.

Ejemplos :

1. $\frac{A}{\sqrt[n]{B}} = \frac{A \cdot \sqrt[n]{B^{n-1}}}{\sqrt[n]{B} \cdot \sqrt[n]{B^{n-1}}} = \frac{A \cdot \sqrt[n]{B^{n-1}}}{\sqrt[n]{B^n}} = \frac{A\sqrt[n]{B^{n-1}}}{B}$;

2. $\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{3 \cdot \sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = \frac{3 \cdot \sqrt{2}}{2}$;

3. $\frac{5 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt[3]{3}} = \frac{5 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3^2}}{\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{3^2}} = \frac{5 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{9}}{3}.$

2. Que el denominador tenga varios términos.

Si el denominador es un binomio irracional, cuyos radicales son raíces cuadradas, se multiplicarán el numerador y denominador de la fracción por otro binomio, llamado conjugado del denominador, que verifique que su producto por dicho denominador sea una expresión sin raíces.

Ejemplos : racionalizar las siguientes expresiones,

1. $\frac{4}{\sqrt{2} + \sqrt{5}} = \frac{4(\sqrt{2} - \sqrt{5})}{(\sqrt{2} + \sqrt{5})(\sqrt{2} - \sqrt{5})} = \frac{4(\sqrt{2} - \sqrt{5})}{(\sqrt{2})^2 - (\sqrt{5})^2} = \frac{4(\sqrt{2} - \sqrt{5})}{2 - 5} = -\frac{4}{3}(\sqrt{2} - \sqrt{5})$;

2. $\frac{7}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \frac{7(\sqrt{3} + \sqrt{2})}{(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})} = \frac{7(\sqrt{3} + \sqrt{2})}{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{7(\sqrt{3} + \sqrt{2})}{3 - 2} = 7(\sqrt{3} + \sqrt{2})$;

3. $\frac{1}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}} = \frac{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{b^2}}{(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{b^2})} = \frac{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{a \cdot b} + \sqrt[3]{b^2}}{a - b}.$

En este último ejemplo, hemos multiplicado numerador y denominador por el conjugado de $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$ que es

$$\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{b^2}.$$



10. — Número concreto, sistema métrico y proporcionalidad concreta

Número concreto : Concepto de número concreto. Reducción de números incomplejos a complejos, y viceversa. Operaciones con números complejos. — **Sistema Métrico :** Reseña histórica. Múltiplos y submúltiplos. Medidas de longitud. *Unidad fundamental. Características de las unidades de longitud. Otras medidas de longitud.* Medidas de superficie. Medidas de volumen. Medidas de masa. Medidas de ángulos. Medidas de tiempo. Sistemas monetarios. — **Proporcionalidad numérica :** Comparación de números y magnitudes. Razón aritmética. Proporción aritmética. *Propiedad fundamental de las proporciones aritméticas.* Razón geométrica de dos números. Razón de dos cantidades homogéneas. *Proporción fundamental de las razones geométricas.* Proporción geométrica. *Teorema fundamental de las proporciones.* Series de razones iguales. Magnitudes. *Directamente proporcionales. Inversamente proporcionales.* Regla de tres. *Regla de tres simple directa. Regla de tres simple inversa. Regla de tres compuesta.* Sucesión de estados. Repartimientos proporcionales. *Directo. Inverso. Compuesto.* Regla de compañía. Regla de interés. *Fórmula de interés simple.* Descuento, rentas y valores comerciales. *Pagaré. Letra de cambio. Descuento. Valores.* Sociedades mercantiles. Acciones. Obligaciones. Fondos públicos. *Títulos de la deuda.* Negociación de valores. Pignoración de valores.

Número concreto

Concepto de número concreto. — El estudio que hemos realizado de los números y las operaciones definidas con ellos, lo ha sido haciendo abstracción de los objetos a que podían referirse dichos números. Vamos a referirnos, además, a números que pueden hacer referencia a dichos objetos. Ejemplos : 5 coches y 9 casas. Esta clase de números se denominan números **concretos.**

Ahora bien; es claro que las operaciones usuales entre los números no siempre pueden efectuarse entre números concretos. La diferencia 7 niños menos 3 bolígrafos carece de sentido; por ello vamos a hacer la siguiente clasificación.

Números homogéneos son aquellos números concretos que hacen referencia a objetos de la misma especie.

Los números homogéneos a su vez pueden subdividirse en dos clases :

1) Sabemos que al referirse a objetos de la misma especie, esta referencia se hará a través de unas unidades que el hombre ha fijado convencionalmente. Cuando decimos « esta carretera tiene 100 km y 150 metros », nos referimos a un ente matemático : la longitud de la carretera, aunque para ello hemos utilizado dos unidades diferentes, los kilómetros y los metros. Cuando decimos que faltan 3 horas, 2 minutos y 1 segundo para el lanzamiento de un proyectil, tratamos con números homogéneos, aunque complejos.

Diremos que un número homogéneo es complejo, cuando viene expresado en diversas clases de unidades, aunque todas ellas están referidas a la misma magnitud.

2) *Un número homogéneo es incomplejo, cuando viene expresado en órdenes de la misma clase de unidades.* Por ejemplo, cuando decimos que un trozo de pan pesa justo 2 kg, nos expresamos mediante un número homogéneo incomplejo.

Reducción de números incomplejos a complejos, y viceversa. — En muchos casos, se nos presenta el problema de convertir un número complejo en incomplejo o recíprocamente. Un ejemplo nos ilustrará rápidamente : supongamos que en la solución de un problema de móviles viene expresado el tiempo por el número 3/5 de hora. ¿Qué fracción de tiempo representan realmente dichos 3/5 de hora?

Podemos razonar como sigue : 3/5 de hora = 1/5 de hora × 3. Ahora bien 1/5 de hora son 12 minutos. Como hemos de hallar 3 × 1/5 de hora, resolveríamos : 12 × 3 = 36 minutos, que directamente podríamos haber resuelto mediante la siguiente división :

```
        3          |5
  3 horas =         0 horas 36 minutos
= 180 minutos
       30
        0
```

Dicha división la razonamos escribiendo : 3/5 de hora, es lo mismo que hallar 1/5 de hora y multiplicar por 3, o dividir directamente 3 entre 5.

El cociente de 3 entre 5 es 0, y el resto 3 horas, equivalentes a 180 minutos, que podemos dividir entre 5, dándonos un cociente exacto, es decir, 36 minutos.

Ejemplo : tratemos de saber exactamente qué representan 5/7 de día.

a) 5/7 de día = 1/7 de día × 5 = 24/7 de hora × 5 = (3 + 3/7) horas × 5 = 15 horas + 15/7 de hora;
15/7 de hora = (2 + 1/7) horas = 2 horas + 1/7 hora;
1/7 hora = 60/7 minuto = (8 + 4/7) minuto = 8 minutos; 4/7 minuto;
4/7 minuto = 240/7 de segundo = (34 + 2/7) segundos.

Sumando las cantidades obtenidas encontramos :
5/7 de día = 17 horas 8 minutos 34 segundos 2/7 de segundo.

b) El anterior desarrollo lo podíamos haber sustituido por la siguiente división única.

5 |7

0 días 17 horas 8 minutos 34 segundos $\frac{2}{7}$ de segundo

La división única nos evita el tener que calcular las fracciones de cada una de las unidades tratadas.

```
5 días = 5 × 24 horas = 120 horas
                         50
                          1 hora × 60 minutos =
                     =   60 minutos
                          4 minutos × 60 = 240 segundos
                        240 segundos
                         30
                          2
```

El ejemplo que hemos resuelto nos permite dar la siguiente regla general : para transformar un incomplejo

en complejo de orden inferior, obtenemos en primer lugar las cifras enteras del número dado. Los restos sucesivos en la división, al convertirlos en unidades de menor orden y dividirlos por el divisor, nos darán las correspondientes unidades del cociente.

Si, por el contrario, queremos convertir un número incomplejo en un complejo de grado superior, lo que haremos será dividir el complejo entre el número entero que representa el número de veces que la unidad de orden superior contiene a la inferior. Si queremos hallar varias unidades superiores, seguiremos el mismo proceso anterior, hasta alcanzar los órdenes deseados.

Ejemplo : convertir 8 435 minutos en días.

a) 8 435 minutos = 8 435/60 horas = $\dfrac{8\,435}{60 \times 24}$ días = $\dfrac{8\,435}{1\,440}$ días.

b)
```
8435 | 60
243  | 140 horas | 24
035  |  20 horas | 5 días
```

8 435 minutos = 5 días, 20 horas, 35 minutos.

Si tratamos de reducir un complejo a incomplejo de orden inferior, se multiplican los órdenes de grado superior de aquél por las veces que una de ellas contiene a la inmediata inferior, sumando a este producto las unidades del mismo orden que haya en el número dado; se hace lo mismo con las unidades totales obtenidas por este método, y así sucesivamente hasta el orden en que el incomplejo buscado quiere expresarse.

Si tratamos de convertir el complejo en un incomplejo de orden superior, lo que hacemos es convertir el complejo en un incomplejo de orden inferior, dividiendo este resultado entre el número de veces que el orden del incomplejo buscado contiene al incomplejo de orden inferior que hemos encontrado.

Ejemplos : 1) Complejo a incomplejo de orden inferior.
Convertir en minutos, 2 días 7 horas 28 minutos.
2 días × 24 horas cada día = 48 horas
48 horas × 60 minutos cada hora = 2 880 minutos
7 horas × 60 minutos cada hora = 420 minutos
2 días 7 horas 28 minutos = 3 328 minutos.
2) Complejo a incomplejo, de orden superior.
Convertir en horas 127 minutos 69 segundos.
127 minutos × 60 segundos cada minuto = 7 620 segundos.
Total segundos... 7 620 + 69 = 7 689 segundos.

```
 7689 | 3600
04890 | 2' 13 horas
12900 |
```

Operaciones con números complejos. — 1) Adición de complejos :

Para sumar números complejos, se escriben unos debajo de otros cuidando de hacer coincidir en la misma columna las unidades del mismo orden y sumando después independientemente cada columna.

Ejemplo : sumar los ángulos 73º 4′; 59º 3′ 85″; 45′ 37″.

```
 73º  4′
 59º  3′  85″
     45′  37″
-------------------------
132º 52′ 122″ = 132º 54′ 2″
```

2) Sustracción de complejos :

Dados dos complejos que tratamos de restar, A y B, A minuendo y B sustraendo, se escribe uno debajo de otro haciendo coincidir en la misma columna las unidades del mismo orden. En el caso de que en el minuendo exista algún orden cuyas unidades sean inferiores a las del sustraendo, entonces se añadirán a dicho orden un número entero de veces de las unidades de orden superior, hasta que las unidades del orden que tratamos sean mayores en el minuendo que en el sustraendo. Las unidades que hemos añadido a un orden deberemos, claro está, sustraerlas de las de orden superior. Una vez realizado esto, se efectuará la operación como si cada una de las columnas fuese una resta independiente de las demás.

Ejemplo : *a*) Restar 47º 51′ 37″ de 54º 81′ 62″

```
54º 81′ 62″
47º 51′ 37″
-----------
 7º 30′ 25″
```

b) Restar 5º 27′ 35″ de 81º

81º = 80º 60′ = 80º 59′ 60″

```
80º 59′ 60″
 5º 27′ 35″
-----------
75º 32′ 25″
```

3) Multiplicación de un número complejo por un número entero :

Dado un número complejo con las unidades de los distintos órdenes, para multiplicarlo por un número entero cualquiera, se multiplican cada uno de los distintos órdenes por dicho número entero.

Ejemplo : la amplitud de un ángulo es 31º 5′ 47″. Hallar la amplitud de un ángulo triple que el anterior

31º 5′ 47″ × 3 = 93º 15′ 141″.

4) División de un complejo por un número entero : al igual que en la división normal, se dividen cada uno de los órdenes entre dicho número, teniendo en cuenta convertir cada resto parcial en unidades de orden inferior.

Ejemplo : dividir el ángulo 85º 37′ 41″ en cuatro ángulos iguales

```
85º        37′          41″        | 4
05                                 | 21º 24′ 25″
 1 grado = 60 minutos              |
          +37                      |
           97 minutos
           17
            1 minuto = 60 segundos
                       41
                      101
                       21
                        1
```

Sistema Métrico

El Sistema Métrico es el conjunto de unidades aceptadas convencionalmente para medir longitudes, superficies, volúmenes, masas, monedas, etc.

Reseña histórica. — La adopción del sistema métrico se hizo necesaria, debido a la expansión y desarrollo de las relaciones entre los pueblos, fundamentalmente las comerciales, que obligan a adoptar sistemas comunes de unidades para facilitar de ese modo el comercio, la industria, los viajes, etc. De esta manera nació en la mente de algunos gobernantes la adopción de un sistema uniforme, estable y de fácil manejo; así nació el *Sistema Métrico Decimal*.

Cuando en 1790 la Asamblea Constituyente Francesa aprobó un proyecto de unificación de medidas, no conocían aquellos legisladores la importancia y trascendencia ulterior de su decisión. Un equipo de hombres de ciencia fue encargado de estudiar el proyecto y elegir en

consecuencia un sistema coherente. El equipo científico decidió iniciar el nuevo sistema en las medidas de longitud, adoptando como unidad de longitud una fracción simple de la longitud del Meridiano Terrestre. Las conclusiones elevadas por el citado equipo, constituido en Comisión (entre cuyos nombres podemos citar los inmortales de Lagrange, Laplace, Lavoisier, Monge y Condorcet), a la Asamblea Nacional, fueron aprobadas por ésta, que encargó a la Academia de Ciencias la medición del arco del meridiano terrestre comprendido entre Dunkerque y Barcelona, labor que realizaron Delambre y Méchain, y el grado del meridiano terrestre en el Perú, medida efectuada por La Condamine y los españoles Jorge Juan y Antonio de Ulloa.

Una vez establecidas dichas medidas, la Convención Francesa decretó la adopción como unidad de longitud del *metro*, equivalente a la diezmillonésima parte del meridiano terrestre que pasa por París. Se establecieron también otras medidas para las magnitudes de masa, superficie, volumen, etc. en el año 1795. En España fue aceptado el Sistema Métrico Decimal y declarado obligatorio en 1849, y pronto se adhirieron al nuevo sistema numerosas naciones.

En 1870 y 1872 se reunió en París la Comisión Internacional del Metro, integrada por representantes de 24 Estados, creándose entonces la Oficina Internacional de Pesos y Medidas, que quedó encargada de la conservación y fabricación de prototipos de cada una de las medidas patrón.

Más tarde, en 1881, un Congreso de científicos reunidos, también en París, con objeto de fijar sistemas de medidas para las unidades físicas, decidió que las unidades físicas fundamentales se derivaran de las ya existentes en el Sistema Métrico Decimal. Así nació el sistema C. G. S. o Cegesimal (de centímetro, grado y segundo). También derivado del Sistema Métrico es el Sistema Giorgi, utilizado especialmente en los trabajos científicos y de enseñanza, cuyas unidades-base son el metro, el kilogramo y el segundo.

Múltiplos y submúltiplos. — La medida de una magnitud cualquiera, por ejemplo la longitud o la masa, necesita una unidad tipo, que en estos casos serán el metro y el gramo, pero además de estas unidades se usan otras, fundamentalmente para hacer más fáciles las medidas en la vida real. Pensemos que sólo existiese como unidad de longitud el metro. ¿Cómo ibamos a medir longitudes microscópicas? ¿Qué unidades utilizaríamos? Esto nos lleva a la utilización de otras unidades, de todas las magnitudes, que sean múltiplos y submúltiplos de las unidades fundamentales.

A continuación escribimos una tabla con las notaciones comunes a todas las magnitudes de los múltiplos y submúltiplos de las unidades fundamentales.

Tabla de los múltiplos y submúltiplos decimales

PREFIJOS	SÍMBOLO	RELACIÓN CON LA UNIDAD FUNDAMENTAL
mega		10^6
miria	M	10^4
kilo	k	10^3
hecto	h	10^2
deca	da	10^1
deci	d	10^{-1}
centi	c	10^{-2}
mili	m	10^{-3}
micro	μ	10^{-6}

Medidas de longitud. — ***Unidad fundamental.*** — El *metro* se define como *la longitud existente entre dos trazos de una barra de platino iridiado à* 0^0 C *y que se conserva en el Museo de Pesas y Medidas de París.* Esta definición del metro fue reemplazada por una nueva, adoptada por la Conferencia Internacional de Pesas y Medidas reunida en 1960, para mayor precisión y en evitación de contingencias en el prototipo patrón.

Nueva definición : *el metro es igual a 1 650 767'73 veces la longitud de onda en el vacío de la radiación anaranjada del criptón 86.*

A partir de las unidades de longitud (centímetro, metro, etc.), se definen las unidades de otras medidas muy utilizadas, fundamentalmente las de superficie y volumen, unidades que se denominan utilizando como base la unidad fundamental de longitud, el metro. Así se obtiene el metro cuadrado, el metro cúbico, etc.

Tabla de los múltiplos y submúltiplos del metro

NOMBRE	SÍMBOLO	RELACIÓN CON EL METRO
kilómetro	km	$10^3 = 1\,000$
hectómetro	hm	$10^2 = 100$
decámetro	dam	$10^1 = 10$
METRO	m	1
decímetro	dm	$10^{-1} = 0'1$
centímetro	cm	$10^{-2} = 0'01$
milímetro	mm	$10^{-3} = 0'001$
micra	μ	$10^{-6} = 0'000001$
milimicra	mμ	$10^{-9} = 0'000000001$
angström	Å	$10^{-10} = 0'0000000001$

Características de las unidades de longitud. — Las unidades de longitud pasan de un orden a otro mediante la multiplicación o división por 10. Los números concretos que expresan unidades de longitud se leen igual que los números enteros, ateniéndose en su transformación de un orden o unidad a otro a las reglas ya estudiadas para números complejos e incomplejos.

Otras medidas de longitud. — Como macromedidas, son hoy utilizadas, especialmente en Astronomía, no como útil común de trabajo, sino para dar idea de la magnitud de la distancia, las siguientes : el año-luz, que es *la longitud que recorrería un móvil a la velocidad de 300 000 km por segundo durante un año y que equivale a* $9{,}45 \cdot 10^{22}$ *m;* el parsec, que es *la distancia desde la que un observador vería al radio de la órbita que describe la Tierra alrededor del Sol bajo el ángulo de 1 segundo y que equivale a 3,26 años-luz.*

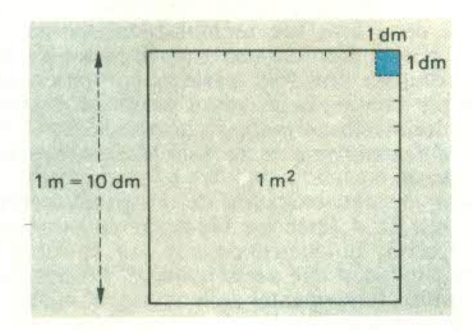
Como micromedidas, el angström que equivale a 10^{-10} m, utilizado en Biología, Geología, Química y Física.

Otra medida de longitud, también muy utilizada, es la milla marina, que es *la longitud media de un arco de meridiano de un segundo sexagesimal, equivalente a 1 852 m.*

Medidas de superficie. — Estas medidas son utilizadas para las áreas; su unidad fundamental es el *metro cuadrado* (m^2), que definiremos como la superficie de un cuadrado de un metro de lado.

Las unidades de superficie pasan de una a otra multiplicando o dividiendo por 100. Esta relación proviene de la misma definición de unidades cuadradas. Veamos, en efecto, que considerando una unidad cuadrada como la

superficie de un cuadrado de la correspondiente unidad de longitud de lado, dicha relación es inmediata :



$1\ m^2 = (10 \times 10)\ dm^2 = 100\ dm^2$; dado que son 100 los cuadrados de lado 1 dm que contiene un cuadrado de 1 metro de lado.

Múltiplos y submúltiplos del metro cuadrado

NOMBRE	SÍMBOLO	RELACIÓN CON EL METRO CUADRADO
kilómetro c.	km^2	10^6
hectómetro c.	hm^2 ó ha	10^4
decámetro c.	dam^2 ó a	10^2
METRO C.	m^2 ó ca	1
decímetro c.	dm^2	10^{-2}
centímetro c.	cm^2	10^{-4}
milímetro c.	mm^2	10^{-6}

La conversión de complejos a incomplejos y viceversa se lleva a cabo teniendo en cuenta esta relación de conversión (100). Sea, por ejemplo, el número complejo 1 321 km^2, 3 hm^2, 4 dam^2.

Pasémoslo a incomplejo tomando como unidad el m^2 :

$1\,321\ km^2 = 1\,321\,000\,000\ m^2 =$

$3\ hm^2 = 30\,000\ m^2$

$4\ dam^2 = 400\ m^2$

$$\begin{array}{r} 1\,321\,000\,000 \\ 30\,000 \\ 400 \\ \hline 1\,321\,030\,400\ m^2 \end{array}$$

La medida de tierras ha asignado nombres particulares a algunas de las unidades de superficie ya estudiadas. Éstas son : la hectárea (ha) que equivale a 10 000 m^2, el área (a) que equivale a 100 m^2 y la centiárea (ca) equivalente al m^2.

Medidas de volumen. — El volumen o espacio ocupado por un cuerpo es el objeto de la creación de estas medidas, cuya unidad fundamental es el *metro cúbico* (m^3), que podemos definir como el espacio ocupado por un cubo de un metro de arista.

Múltiplos y submúltiplos del metro cúbico

NOMBRE	SÍMBOLO	RELACIÓN CON EL METRO CÚBICO
METRO CÚBICO	m^3	1
decímetro cúbico	dm^3	10^{-3}
centímetro cúbico	cm^3	10^{-6}
milímetro cúbico	mm^3	10^{-9}

Las unidades de volumen aumentan y disminuyen de 1 000 en 1 000, lo que hay que tener en cuenta en las conversiones de unidades.

Ejemplo : Reducir a dm^3 el siguiente número complejo : 5 m^3, 45 dm^3 y 1 947 cm^3.

$5\ m^3 = 5 \times 1\,000\ dm^3 = 5\,000\ dm^3$

$45\ dm^3 = 45\ dm^3$

$1\,947\ cm^3 = 1\,947/1\,000\ dm^3 = 1'947\ dm^3$

$5\ m^3,\ 45\ dm^3,\ 1\,947\ cm^3 = 5\,046'947\ dm^3$.

Las unidades de volumen definidas se utilizan en la medida de grandes masas de líquido, así como en el uso científico (Física, Química, Matemáticas, etc.).

Para la medida de volúmenes de uso corriente se usan otras unidades que llamaremos de *capacidad*, cuya unidad fundamental es el *litro* que se define como *el volumen ocupado por una masa de un kilogramo de agua pura a la temperatura de 4 °C y 760 mm de presión*. Así definido el litro, equivale exactamente a 1'000 028 dm^3, que es aproximadamente 1 dm^3. Antiguamente, las dos medidas litro y dm^3 eran equivalentes, dependiendo entonces la medida del litro de la del metro.

Múltiplos y submúltiplos del litro

NOMBRE	SÍMBOLO	RELACIÓN CON EL LITRO
hectolitro	hl	$10^2 = 100$
decalitro	dal	$10^1 = 10$
LITRO	l	1
decilitro	dl	$10^{-1} = 0'1$
centilitro	cl	$10^{-2} = 0'01$
mililitro	ml	$10^{-3} = 0'001$

Las unidades de capacidad, al igual que las de longitud, aumentan y disminuyen de 10 en 10, y sus relaciones con las unidades de volumen vienen inmediatamente dadas por la indicada equivalencia litro-decímetro cúbico.

Medidas de masa. — Su objeto es medir la masa de los cuerpos. La unidad fundamental es el *kilogramo*, que definiremos como la masa de un cilindro de platino iridiado que se conserva en el Museo de Pesas y Medidas de París.

Dicho cilindro, cuyo diámetro es igual a su altura, excede aproximadamente en $27 \cdot 10^{-6}$ kilogramos a la masa de un litro de agua pura a 4 °C, en el vacío, a la latitud de París y al nivel del mar.

En las medidas prácticas (no de laboratorio) se toman como equivalentes dichas medidas.

Múltiplos y submúltiplos del kilogramo

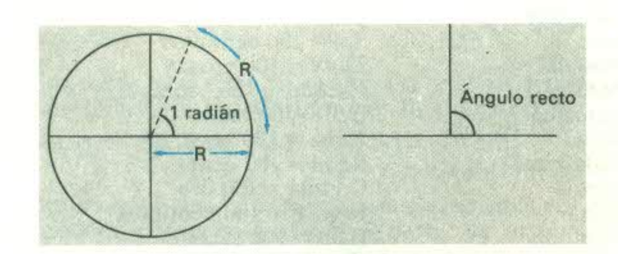
NOMBRE	SÍMBOLO	RELACIÓN CON EL KILOGRAMO Y EL GRAMO
tonelada métrica	tm	$1\,000\ kg = 10^6\ g$
quintal métrico	qm	$100\ kg = 10^5\ g$
KILOGRAMO	kg	$1\ kg = 10^3\ g$
hectogramo	hg	$10^{-1}\ kg = 10^2\ g$
decagramo	dag	$10^{-2}\ kg = 10\ g$
GRAMO	g	$10^{-3}\ kg = 1\ g$
decigramo	dg	$10^{-4}\ kg = 10^{-1}\ g$
centigramo	cg	$10^{-5}\ kg = 10^{-2}\ g$
miligramo	mg	$10^{-6}\ kg = 10^{-3}\ g$

Las medidas de masa aumentan y disminuyen de 10 en 10.

Los aparatos utilizados para medir las masas de los cuerpos se llaman balanzas, de las que hay diferentes tipos. La medida de la masa de un cuerpo es diferente de la medida del peso de dicho cuerpo, pues ambas magnitudes son físicamente diferentes. La masa de un cuerpo es invariable respecto de su posición en la Tierra, mientras que el peso del mismo es una magnitud física que varía con la posición del cuerpo en la Tierra (latitud y altura sobre el nivel del mar).

Medidas de ángulos. — El ángulo o región angular, como ente matemático que definimos en Geometría, también es susceptible de medida. Como unidades tomaremos dos : el *radián* y el *ángulo recto*.

El radián, o medida natural de ángulos, lo definimos como *la medida del ángulo central cuyo arco es igual al radio de la circunferencia a la que pertenece dicho ángulo*.



Acorde con esta definición, encontramos que una circunferencia completa (4 rectos) mide 2 radianes.

La otra unidad de medida también muy utilizada es el ángulo recto, que definimos como el ángulo formado por dos rectas adyacentes que se cortan según ángulos iguales.

Un ángulo recto es, por tanto, la cuarta parte del ángulo central completo de una circunferencia. Como submúltiplo más importante del ángulo recto tenemos el *grado*, que es su noventava parte. El *minuto* es 1/60 de grado y el *segundo* 1/60 de minuto.

Teniendo en cuenta que una circunferencia mide 360 grados, y por otra parte 2π radianes, la equivalencia entre grado y radián viene definida por :

1 radián $= 360/2\pi = 180/\pi$ grados

1 grado $= \pi/180$ radianes.

La tabla de unidades será :

NOMBRE	SÍMBOLO	EQUIVALENCIA
radián	R	$\frac{180}{\pi}$ grados
grado	^{0}	$\frac{\pi}{180}$ radianes
minuto	′	$\frac{1}{60}$ grado
segundo	″	$\frac{1}{3\,600}$ grado $= \frac{1}{60}$ minuto

Además de las unidades de ángulos ya definidas, es utilizado en términos militares el *Mil*, que es *la medida del ángulo central determinado por un arco igual a 1/6 400 de circunferencia*. El nombre de esta unidad proviene de que un Mil es aproximadamente 1/1 000 radián.

La relación entre el Mil y las unidades ya expresadas será :

1 Mil $= 360^{0}/6\,400 = 9^{0}/160$; $1^{0} = 160/9$ Miles.

Medidas de tiempo. — En todos los sistemas de unidades físicas, se toma como unidad fundamental de tiempo el *segundo* que definimos como la 1/86 400 parte del día solar medio.

Dado que el día solar verdadero, o tiempo transcurrido entre dos pasos superiores consecutivos del Sol por el mismo meridiano, varía a lo largo del año, se define el día solar medio como el promedio de duración de los días solares verdaderos a lo largo de un año.

El año civil tiene 365 días, excepto los llamados *años bisiestos*, cada cuatro años, que constan de 366 días. Este aumento es la acumulación de unas 6 horas anuales, ya que el tiempo efectivo empleado por la Tierra en girar alrededor del Sol es de 365 días y 6 horas, aproximadamente. Son bisiestos los años cuyas dos últimas cifras sean divisibles por 4, a excepción de los seculares, que sólo lo serán si son divisibles por 400 (así, el año 2000 será bisiesto, pero no lo fue el 1900).

Múltiplos del segundo

NOMBRE	SÍMBOLO	RELACIÓN CON EL SEGUNDO
día	d	86 400
hora	h	3 600
minuto	min	60
SEGUNDO	s	1

Como submúltiplos del segundo se utilizan las sucesivas fracciones decimales de éste : 1/10, 1/100, 1/1 000, 1/10 000 ..., etc. que denominaremos respectivamente una décima de segundo, una centésima de segundo, una milésima de segundo, etc.

Otras unidades de tiempo utilizadas en la vida diaria son :

La *semana*, que consta de 7 días.

El *mes*, cuya duración es variable. Un año posee 12 meses :

Enero	31 días
Febrero	28 ó 29 días
Marzo	31 días
Abril	30 días
Mayo	31 días
Junio	30 días
Julio	31 días
Agosto	31 días
Septiembre	30 días
Octubre	31 días
Noviembre	30 días
Diciembre	31 días

El *año*, cuya duración es de 365 días, se define como el tiempo que tarda la Tierra en efectuar su movimiento elíptico de rotación alrededor del Sol.

El *lustro*, que dura 5 años.
El *siglo*, que dura 100 años.
El *milenio*, que dura 1 000 años.

Sistemas monetarios. — Se llama *sistema monetario* al conjunto de los diferentes tipos de monedas que satisfacen determinadas condiciones de peso, diámetro, ley, valor, etc. Cada país tiene su propio sistema monetario, y en el mismo se define la *unidad legal* adoptada convencionalmente. Además de las monedas propiamente dichas, los bancos nacionales suelen emitir también papel moneda, consistente en billetes al portador.

A continuación escribimos una relación de las principales monedas del mundo.

Afganistán	Afganí = 100 puls	Holanda	Gulden (Florín) = 100 céntimos
Albania	Franco = 100 quintars	Honduras	Lempira = 100 centavos
Alemania	Marco = 100 pfennig	Hungría	Forint = 100 filler
Arabia Saudita	Rial = 20 quruch	India	Rupia = 16 annas
Argelia	Dinar = 100 céntimos	Indonesia	Rupia = 100 sen
Argentina	Peso = 100 centavos	Irak	Dinar = 1 000 fils
Australia	Dólar = 100 centavos	Irán	Rial = 100 dinars
Austria	Schelling = 100 groschen	Irlanda (Eire)	Libra = 100 peniques
Bélgica	Franco = 100 céntimos	Israel	Libra = 100 agorot
Bolivia	Boliviano = 100 centavos	Italia	Lira = 100 céntimos
Brasil	Cruzeiro = 100 centavos	Japón	Yen = 100 sen
Bulgaria	Lev = 100 stotinki	Marruecos	Dirham = 100 francos
Canadá	Dólar = 100 centavos	México	Peso = 100 centavos
Colombia	Peso = 100 centavos	Nicaragua	Córdoba = 100 centavos
Costa Rica	Colón = 100 céntimos	Noruega	Corona = öre
Cuba	Peso = 100 centavos	Panamá	Balboa = 100 centavos
Checoslovaquia	Corona = 100 haler	Paquistán	Rupia = 100 paisas
Chile	Peso = 100 centavos	Paraguay	Guaraní = 100 centavos
China	Yen min piao	Perú	Sol = 100 centavos
Dinamarca	Corona = 100 öre	Polonia	Zloty = 100 groszy
Rep. Dominicana	Peso = 100 centavos	Portugal	Escudo = 100 centavos
Ecuador	Sucre = 100 centavos	Rumania	Leu = 100 bani
Egipto	Libra egipcia = 100 piastras	Siria	Libra = 100 piastras
El Salvador	Colón = 100 centavos	Sudáfrica	Rand = 100 cent
España	Peseta = 100 céntimos	Suecia	Corona = 100 öre
Estados Unidos	Dólar = 100 centavos	Suiza	Franco = 100 céntimos
Filipinas	Peso = 100 centavos	Tailandia	Baht = 100 satang
Finlandia	Marco = 100 pennia	Túnez	Dinar = 1 000 milésimos
Francia	Franco = 100 céntimos	Turquía	Libra = 100 piastras
Gran Bretaña	Libra = 100 peniques	U. R. S. S.	Rublo = 100 kopeks
Grecia	Dracma = 100 lepta	Uruguay	Peso = 100 céntimos
Guatemala	Quetzal = 100 centavos	Venezuela	Bolívar = 100 céntimos
Haití	Gourde = 100 céntimos	Yugoslavia	Dinar = 100 paras



Proporcionalidad numérica

Comparación de números y magnitudes. — La comparación entre dos números o magnitudes cualesquiera se presenta espontáneamente no sólo en la resolución de problemas matemáticos, sino en la vida normal como consecuencia del más simple análisis. Cuando decimos que la correlación de fuerzas entre dos ejércitos A y B es de 2 a 1 no estamos sino comparando de manera inconsciente ambos ejércitos.

Razón aritmética. — *Dados dos números* a *y* b *cualesquiera, su razón aritmética es su sustracción que nos va a dar un criterio de cuantas veces uno contiene al otro.*

Ejemplo : cuando comparamos 5 y 2, lo hacemos a través de su razón aritmética $5 - 2 = 3$.

El primer término de la razón (5) se llama *antecedente*, al segundo término (2) se le denomina *consecuente* y a la diferencia entre ambos *razón*.

Una razón aritmética no se altera si se suma o resta un mismo número a los dos términos de dicha razón :

$$a - b = c \iff (a+n)-(b+n) = c \iff (a-n)-(b-n) = c.$$

Observemos que, como consecuencia inmediata de esta propiedad, podemos construir a partir de una misma razón aritmética, infinitas razones equivalentes.

Ejemplo : a partir de la razón $5 - 2 = 3$, obtenemos las siguientes :

$$5+1-(2+1) = 3 \equiv 6-3 = 3$$
$$5+4-(2+4) = 3 \equiv 9-6 = 3$$
$$5-2-(2-2) = 3 \equiv 3-0 = 3.$$

Esta última característica es la que nos va a facilitar la definición de *proporción aritmética*.

Proporción aritmética. — Se denomina así la igualdad de dos razones aritméticas. Ejemplo : las razones $5-2$ y la $11-8$ son equivalentes, definiendo por tanto una proporción que representaremos como $5-2:11-8$, y en general escribiremos $a-b:c-d$.

Toda proporción consta, por tanto, de cuatro términos que llamaremos *extremos* y *medios*. Son extremos el antecedente de la primera razón y el consecuente de la segunda, y medios el consecuente de la primera razón y el antecedente de la segunda.

Propiedad fundamental de las proporciones aritméticas. — *En toda proporción aritmética, la suma de los términos extremos es igual a la suma de los términos medios.*

En efecto : si $a - b = c - d$, sumando a los dos miembros de la igualdad el número d, resulta : $a - b + d = c - d + d \iff a + d - b = c$. Si sumamos b a los dos miembros tenemos : $a + d - b + b = c + b \implies a + d = c + b$.

Razón geométrica de dos números. — *Razón geométrica de dos números es el cociente de la división del primero por el segundo.*

La diferencia entre fracción y razón estriba en que, mientras en la definición de fracción el numerador y el denominador han de ser números enteros, en la de razón, el numerador y denominador, que se llaman antecedente y consecuente respectivamente, pueden ser números cualesquiera : enteros, decimales, fraccionarios, etc. Así por ejemplo podemos comparar los números 3'95 y 4'01, que escribiremos $\frac{3'95}{4'01}$.

Razón de dos cantidades homogéneas. — Supongamos dos montones de naranjas, A y B, que queremos comparar. Para ello, la mejor idea será contarlos; supongamos que una vez contados arrojan las cantidades A = 6 naranjas y B = 12 naranjas.

Ahora podemos decir que la razón de A a B es de 6 a 12 o de 1 a 2, o sea, $\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$.

También podemos decir que la razón de B a A es de 12 a 6 ó de 2 a 1, o sea, $\frac{12}{6} = \frac{2}{1}$.

En general definimos : *razón de dos cantidades homogéneas* A *y* B *es la razón de los números que resultan de medirlas con la misma unidad.*

Propiedad fundamental de las razones geométricas. — *Una razón geométrica no se altera cuando se multiplican o dividen sus dos términos por un mismo número.*

Ejemplo : la razón $\frac{1}{2}$ es equivalente a las $\frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{20}{40}$, etc.

Al igual que en las razones aritméticas, esta propiedad nos permite definir el concepto de *proporción geométrica*.

Proporción geométrica. — *Se denomina así a la igualdad de dos razones geométricas* $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ *que leeremos* «a *es a* b, *como* c *es a* d».

Los cuatro números que se comparan se llaman términos de la proporción. El primero y el último (a y d) se llaman *extremos*, y los segundo y tercero (b y c) se llaman *medios*.

Asimismo el primero y tercero (a y c) se denominan *antecedentes* y el segundo y cuarto (b y d) *consecuentes*.

El cuarto término (d) de una proporción también se llama *cuarta proporcional* de los otros tres.

Una proporción se dice *continua* cuando sus medios son iguales ; el término medio se llama entonces *media proporcional*, y cualquiera de los extremos *tercera proporcional*.

Teorema fundamental de las proporciones. — *En una proporción, el producto de los extremos es igual al producto de los medios.* Y recíprocamente, dados cuatro números cualesquiera a, b, c, d, tales que verifiquen que $a \cdot c = b \cdot d$, estos cuatro números forman una proporción : la $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

En efecto, sea la proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; multiplicando los dos miembros de la misma por b, nos queda $\frac{a \cdot b}{b} = \frac{c \cdot b}{b} \iff a = \frac{c \cdot b}{d}$. Multiplicando ahora por d los dos nuevos miembros, obtenemos : $a \cdot d = \frac{c \cdot b \cdot d}{d} \iff a \cdot d = c \cdot b$.

Recíprocamente, si se verifica que $a \cdot d = b \cdot c$, dividiendo ambos miembros por d, se tiene $\frac{a \cdot d}{d} \equiv \frac{b \cdot c}{d} \iff a = \frac{b \cdot c}{d}$. Dividiendo ahora por b :

$$\frac{a}{b} = \frac{b \cdot c}{b \cdot d} \iff \frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Como consecuencia fundamental de este teorema, deducimos que en una proporción puede alterarse el lugar de sus términos formando otras proporciones, siempre que se verifique la propiedad de que el producto de sus extremos sea igual al de sus medios.

Series de razones iguales. — *Dada una serie de razones iguales, la suma de antecedentes es a la de consecuentes como un antecedente es a un consecuente.*

En efecto, sea la serie de razones $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$, y llamenos m al valor del cociente común $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = m$, que llamaremos razón de proporcionalidad :

$$\frac{a}{b} = m \iff a = bm$$

$$\frac{c}{d} = m \iff c = dm$$

$$\frac{e}{f} = m \iff e = fm.$$

Sumando miembro a miembro las tres igualdades, obtenemos : $a + c + e = m(b + d + f)$. Dividiendo los dos términos de esta última igualdad por $b + d + f$ se tiene :

$$\frac{a + c + e}{b + d + f} = m \iff \frac{a}{b} = \frac{a + c + e}{b + d + f} = m.$$

Esta propiedad la podemos aplicar al caso particular de una proporción. En efecto, sea la proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; cambiando los medios nos queda : $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$, y, aplicando la propiedad antes demostrada, se tiene : $\frac{a + b}{c + d} = \frac{a}{c}$ $\iff \frac{a + b}{b} = \frac{b + d}{a}$. Y escribimos : en toda proporción, la suma o diferencia de los dos primeros términos es al primero como la suma o diferencia de los últimos es al tercero.

Ejercicios : 1) Hallar la media proporcional entre los números 2 y 7.

Llamando x a la media se tiene : $\frac{2}{x} = \frac{x}{7} \iff$ $x^2 = 14 \implies x = \sqrt{14}$ y resulta $\frac{2}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{14}}{7}$.

2) Hallar la cuarta proporcional de 5, 7 y 15.

Llamando x a dicha cuarta proporcional, obtenemos :

$$\frac{5}{7} = \frac{15}{x} \implies x = \frac{7 \times 15}{5} = 21.$$

Magnitudes. — *Directamente proporcionales.* — *Dadas dos magnitudes* A *y* B, *diremos que son directamente proporcionales cuando a cada cantidad de* A *le corresponde una sola cantidad de* B *y recíprocamente.* Y *además, al multiplicar* A *por un número fijo* k, B *también queda multiplicada por dicho número.*

Ejemplos : el espacio recorrido por un móvil es directamente proporcional a su velocidad.

Si un móvil lleva una velocidad v, el espacio recorrido en el tiempo t será vt.

Si el mismo móvil lleva una velocidad $2v$, el espacio recorrido en el tiempo t será $2vt$.

Inversamente proporcionales. — *Dos magnitudes son inversamente proporcionales cuando a cada cantidad de una de ellas le corresponde una sola cantidad de la otra, y además, al multiplicar la primera por un número, la segunda queda dividida por dicho número.*

Magnitudes inversamente proporcionales son, por ejemplo, el número de obreros y el tiempo que tardan en hacer un trabajo, la fuerza de atracción o repulsión entre dos partículas eléctricas y el cuadrado de la distancia que las separa.

TEOREMA. — *Cuando una magnitud variable es proporcional a otras varias, el número que la mide es proporcional al producto de los números que miden las otras magnitudes.*

En efecto, supongamos que el coste total del carburante gastado por un tren sea proporcional a su velocidad y al cargamento que lleva. Nuestro problema es hallar la relación entre los costes de carburante de un mismo tren en dos viajes distintos, 1 y 2, suponiendo conocidas sus velocidades y cargas en cada uno de los viajes.

Para hallar la relación entre el coste C_1 y las variables v_1 y p_1 (velocidad y peso total respectivamente en el viaje 1), vamos a considerar que inicialmente el tren lleva una carga unidad (1 kg). Entonces el coste será :

$$C_1 = k \cdot v_1$$
$$C_2 = k \cdot v_2.$$

Ahora bien, si llevando 1 kg de carga el coste es $C = k \cdot v_1$, transportando p_1 kilogramos el coste será $C_1 = k \cdot v_1 \cdot p_1$ y $C_2 = k \cdot v_2 \cdot p_2$.

Hallando la razón geométrica $\frac{C_1}{C_2}$ tenemos :

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{k \cdot v_1 \cdot p_1}{k \cdot v_2 \cdot p_2} = \frac{v_1 \cdot p_1}{v_2 \cdot p_2} = \frac{v_1}{v_2} \times \frac{p_1}{p_2}.$$

Que nos demuestra el enunciado del teorema.

De idéntica forma podemos demostrar que :

1) Si una magnitud es inversamente proporcional a otras, el número que la mide es proporcional al producto de los inversos de los números que miden las restantes magnitudes.

2) Si una magnitud es directamente proporcional a unas magnitudes e inversamente proporcional a otras, el número que la mide es proporcional al producto de los números que miden las magnitudes proporcionales por los inversos de los que miden las magnitudes inversamente proporcionales.

Regla de tres. — *Se denomina así el método aritmético que nos permite resolver problemas en que, dadas dos o más cantidades correspondientes de dos o más magnitudes, directa o inversamente proporcionales, y una nueva cantidad de una de las dos (o* n − 1 *cantidades nuevas), hay que hallar el valor que le corresponde a la magnitud que queda.*

Si en el problema intervienen únicamente dos magnitudes, el método se llama regla de tres simple y, si intervienen más de dos, se llama regla de tres compuesta.

Además, si las magnitudes son directamente proporcionales, diremos que la regla de tres es directa y, si son inversamente proporcionales, la regla de tres se llama inversa.

Regla de tres simple directa. — Ejemplo : si 6 litros de gasolina cuestan 150 pesetas, ¿cuánto costarán 15 litros de la misma gasolina?

Solución : es claro que el coste de la gasolina y su volumen en litros son magnitudes directamente propor-

cionales. Por lo tanto, si llamamos p al coste de 15 litros de gasolina, tendremos : $\frac{6}{150}=\frac{15}{x}$; $x=\frac{150\times 15}{6}=$ 375 ptas.

Otra manera de resolver el problema, la podemos abordar por el llamado método de reducción a la unidad.

En el ejemplo anterior, su aplicación práctica ya razonada sería :

si 6 litros de gasolina cuestan 150 pesetas, 1 litro costará $150/6=25$ pesetas. Si 1 litro cuesta 25 pesetas, 15 litros costarán ... $25\times 15=375$ pesetas.

Cualquiera de los métodos antes expuestos es igualmente aceptable para resolver los tipos de problemas que hemos considerado.

Regla de tres simple inversa. — Problema : si 12 obreros hacen un trabajo determinado en 20 días, ¿cuánto tiempo tardarán en realizar el mismo trabajo 8 obreros?

Solución : es claro que la relación existente entre el número de obreros que trabajan y el tiempo que tardan en realizar el trabajo es inversamente proporcional, es decir « a más obreros trabajando, menos tiempo utilizado » y « a menos obreros trabajando más tiempo utilizado ».

Con esta premisa, la relación que nos resuelve el problema es : $\frac{12}{8}=\frac{x}{20} \Longrightarrow x=\frac{12\times 20}{8}=30$ días.

Al igual que hacíamos con la regla de tres directa, podemos aplicar el método de reducción a la unidad para resolver el problema. En efecto, podemos razonar :

1) Si 12 obreros tardan en realizar un trabajo 20 días, 1 solo obrero tardará $12\times 20=240$ días.

2) Si un obrero tarda 240 días en hacer un trabajo, 8 obreros tardarán $240/8=30$ días.

Problema : si un coche tarda en recorrer un trayecto 2 horas, yendo a 90 km/hora, ¿cuánto tardará en recorrer el mismo trayecto, si su velocidad es de 120 km/hora?

Solución : las magnitudes tiempo que tarda en recorrer un espacio determinado y velocidad del móvil durante ese tiempo son inversamente proporcionales, luego podemos escribir :

$$\frac{90}{120}=\frac{x}{2} \Longrightarrow x=\frac{90\times 2}{120}=\frac{180}{120}=\frac{18}{12} \text{ horas} = 1^h\,30^m.$$

Regla de tres compuesta. — Supongamos las magnitudes A, B, C, D y unos valores primitivos cualesquiera de dichas magnitudes a_0, b_0, c_0, d_0. Nuestro problema es conocer el valor de la magnitud A (puede ser cualquiera de ellas), en un segundo estado, conocidos los valores de las restantes magnitudes para este segundo estado b_1, c_1, d_1.

El problema se resuelve inmediatamente, suponiendo conocidas las relaciones, directa o inversamente proporcionales, que ligan la magnitud A con las restantes B, C, D.

Supongamos que las magnitudes A y C son inversamente proporcionales, y que las A y B, así como las A y D, son directamente proporcionales.

Llamando x al valor de A en el estado 1, para resolver el problema vamos a considerar el paso del estado 0 al estado 1, en los que las variables pasan de los valores $a_0 b_0 c_0 d_0$ a los valores $x\, b_1 c_1 d_1$, como una sucesión de estados intermedios en los que las magnitudes varían una a una independientemente.

Sucesión de estados. —

$$(a_0 b_0 c_0 d_0) \xrightarrow{\text{Cambio}\,(a_0 a')} (a' b_1 c_0 d_0) \xrightarrow{\text{Cambio}\,(a' a'')} (a'' b_1 c_1 d_0) \xrightarrow{\text{Cambio}\,(a'' a''')} (a''' b_1 c_1 d_1) \equiv (x\, b_1 c_1 d_1)$$

Dado que en cada paso intermedio sólo varían dos magnitudes, permaneciendo constantes las demás, podemos considerar el paso de un estado a otro como una regla de tres simple, bien directa o inversa :

Cambio $(a_0 a')$.

Varían las magnitudes A y B, que son directamente proporcionales.

$$\frac{a_0}{a'}=\frac{b_0}{b_1} \Longleftrightarrow a'=a_0\times\frac{b_1}{b_0} : \textit{Cambio } (a'a'').$$

Varían las magnitudes A y C, que suponemos son inversamente proporcionales.

$$\frac{a'}{a''}=\frac{c_1}{c_0} \Longleftrightarrow a''=a'\times\frac{c_0}{c_1} \Longrightarrow a''=a_0\times\frac{b_1}{b_0}\times\frac{c_0}{c_1} :$$

Cambio $(a''a''')$.

Varían las magnitudes A y B, que suponemos son directamente proporcionales.

$$\frac{a''}{a'''}\frac{d_0}{d_1} \Longleftrightarrow a'''=x=a''\cdot\frac{d_1}{d_0}.$$

Sustituyendo en esta última expresión el valor encontrado para a'', se tiene :

$x=a_0\times\frac{b_1}{b_0}\times\frac{c_0}{c_1}\times\frac{d_1}{d_0}$, fórmula que nos resuelve el problema completamente.

Problema : la cuota de racionamiento de gasolina para 100 vehículos existe para 30 días, a razón de 10 litros diarios. Calcular cuál deberá ser la cuota diaria para que las existencias duren 50 días, aumentando el número de vehículos hasta 150.

Solución : llamemos al número de vehículos magnitud C, al tiempo magnitud B y a la cuota diaria de gasolina magnitud A.

	A	B	C
Valores del estado 0	10	30	100
Valores del estado 1	x	50	150

Las magnitudes A y C así como las A y B son inversamente proporcionales, luego se verificará :

$$x=10\times\frac{30}{50}\times\frac{100}{150}=4\,l \text{ de cuota diaria.}$$

Problema : si 10 hombres en 5 días, trabajando 8 horas cada día, pueden hacer una zanja de 100 metros de largo, 1 m de ancho y 2 m de profundidad. ¿En cuántos días trabajando 10 horas diarias, harán 15 hombres una zanja de 150 m de largo, 2 m de ancho y 0'5 m de profundidad?

	A	B	C	D	E	F
Valores del estado 0	5 días	8 horas	100 m l.	1 m a.	2 m prof.	10 hombres
Valores del estado 1	x días	10 horas	150 m l.	2 m a.	0'5 m prof.	15 hombres

A y B son inversamente proporcionales.
A y C son directamente proporcionales.
A y D son directamente proporcionales.
A y E son directamente proporcionales.
A y F son inversamente proporcionales.
De las cinco relaciones anteriores se deduce :

$$x = 5 \times \frac{8}{10} \times \frac{150}{100} \times \frac{2}{1} \times \frac{0'5}{2} \times \frac{10}{15} = 2 \text{ días}.$$

Repartimientos proporcionales. — *Directo.* — Dado un cierto número S y unos números a, b, c, repartir S en partes proporcionales a a, b, c es encontrar otros números S_a, S_b, S_c, tal que se verifique :

$$\frac{S_a}{a} = \frac{S_b}{b} = \frac{S_c}{c}$$

$$S_a + S_b + S_c = S.$$

De igual manera, si en vez de repartir S en partes proporcionales a a, b, c, se reparten proporcionalmente a a_1, a_2, ..., a_n, tendremos :

$$\frac{S_{a_1}}{a_1} = \frac{S_{a_2}}{a_2} = \ldots = \frac{S_{a_n}}{a_n}$$

$$S_{a_1} + S_{a_2} + \ldots + S_{an} = S.$$

Ejemplo : repartir proporcionalmente a 1, 2/3, 6/5, el número 100.

Solución : sean S_1, S_2 y S_3 las cantidades que corresponden respectivamente a los números 1, 2/3 y 6/5 :

$$\frac{S_1}{1} = \frac{S_2}{2/3} \iff S_2 = \frac{2\,S_1}{3}$$

$$\frac{S_1}{1} = \frac{S_3}{6/5} \iff S_3 = \frac{6}{5} S_1$$

$$\frac{S_2}{2/3} = \frac{S_3}{6/5} \iff \frac{6}{5} S_2 = \frac{2}{3} S_3 \iff S_2 = \frac{2}{3} \times \frac{5}{6} S_3$$

y además, $S_1 + S_2 + S_3 = 100$. Sustituyendo los valores encontrados más arriba para S_2 y S_3, se tiene :

$$S_1 + 2/3\,S_1 + 6/5\,S_1 = 100 \iff 15\,S_1 + 10\,S_1 + 18\,S_1 = 1\,500;\ S_1 = \frac{1\,500}{43};$$

$$S_2 = \frac{2}{3} \times \frac{1\,500}{43} = \frac{3\,000}{129};\ S_3 = \frac{6}{5} \times \frac{1\,500}{43} = \frac{9\,000}{215}.$$

Inverso. — Dado un cierto número S y otros números a, b, c, d, repartir S en partes inversamente proporcionales a a, b, c, d, es encontrar otros números S_a, S_b, S_c, S_d, tal que se verifique :

$$S_a + S_b + S_c + S_d = S$$

$$\frac{S_a}{\frac{1}{a}} = \frac{S_b}{\frac{1}{b}} = \frac{S_c}{\frac{1}{c}} = \frac{S_d}{\frac{1}{d}}.$$

Si en vez de cuatro números a, b, c, d, se tiene que repartir S en partes inversamente proporcionales a a_1, a_2, ..., a_n, tendremos :

$$S_{a_1} + S_{a_2} + \ldots + S_{a_n} = S$$

$$\frac{S_{a_1}}{\frac{1}{a_1}} = \frac{S_{a_2}}{\frac{1}{a_2}} = \ldots = \frac{S_{an}}{\frac{1}{a_n}}.$$

Ejemplo : repartir 100 en partes inversamente proporcionales a 2, 3, 4.

Solución :

$$S_2 + S_3 + S_4 = 100$$

$$\frac{S_2}{1/2} = \frac{S_3}{1/3} \iff 2\,S_2 = 3\,S_3 \iff S_3 = \frac{2}{3} S_2$$

$$\frac{S_2}{1/2} = \frac{S_4}{1/4} \iff 2\,S_2 = 4\,S_4 \iff S_4 = \frac{2}{4} S_2 = \frac{S_2}{2}.$$

Sustituyendo los valores encontrados para S_3 y S_4, en la expresión $S_2 + S_3 + S_4 = 100$, se tiene :

$S_2 + 2/3\,S_2 + 1/2\,S_2 = 100$; $6\,S_2 + 4\,S_2 + 3\,S_2 = 600 \Longrightarrow 13\,S_2 = 600 \Longrightarrow S_2 = 600/13$; $S_3 = 400/13$; $S_4 = 300/13$.

Compuesto. — El problema ahora es, dado un número N y dos conjuntos de números $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ y $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$, repartir N en partes directamente proporcionales a los números del conjunto A e inversamente proporcionales a los números del conjunto B.

El problema se resuelve fácilmente, sin más que tener en cuenta que el planteamiento es similar al siguiente.

Repartir N en partes directamente proporcionales a a_1, a_2, ..., a_n, y también directamente proporcionales a $1/b_1$, $1/b_2$, ..., $1/b_m$.

Ejemplo : un padre quiere repartir 3 000 000 pesetas entre sus tres hijos, en razón directamente proporcional al número de los nietos que tiene de cada hijo, 1, 2, y 4 respectivamente, y en razón inversamente proporcional a las edades, 30, 36 y 44 años respectivamente, de cada hijo.

Solución : el problema es similar a repartir 3 000 000 en partes proporcionales directamente a : $1 \times 1/30$, $2 \times 1/36$, y $4 \times 1/44$, o lo que es igual, a 1/30, 1/18, y 1/11.

$$\frac{S_a}{1/30} = \frac{S_b}{1/18} \iff S_b = \frac{30}{18} S_a;\ \frac{S_a}{1/30} = \frac{S_c}{1/11} \iff$$

$S_c = \dfrac{30}{11} S_a$; $S_a + S_b + S_c = 3 \cdot 10^6$. Operando :

$$S_a + 30/18\,S_a + 30/11\,S_a = 3\,000\,000.$$

$$198\,S_a + 330\,S_a + 540\,S_a = 594\,000\,000 \Longrightarrow$$

$$S_a = \frac{594}{1\,068} \cdot 10^6 \text{ ptas.}$$

Los valores para S_b y S_c (dinero recibido por los hijos de 36 y 44 años) se obtienen inmediatamente sin más que sustituir S_a en las relaciones : $S_b = 30/18\,S_a$, $S_c = 30/11\,S_a$.

Regla de compañía. — Es un caso particular de repartimientos proporcionales, que tiene por objeto el dividir entre varios socios los beneficios o pérdidas habidos en una empresa común.

Pueden presentarse varios casos :

1) Que los capitales de los socios sean diferentes, pero estén impuestos el mismo tiempo en la sociedad.

En este caso, la ganancia o pérdida se repartirá en partes directamente proporcionales al capital de cada socio.

2) Que los capitales sean iguales, pero los tiempos de imposición en el negocio sean diferentes.

Entonces, las pérdidas o ganancias se reparten proporcionalmente a los tiempos.

3) Que tanto los capitales como los tiempos de imposición sean diferentes.

En este caso, las ganancias o pérdidas se reparten proporcionalmente a los productos de los capitales por los tiempos, dado que es un repartimiento compuesto.

Problema : una industria empieza un negocio con 1 000 000 de pesetas, 10 meses después se une un socio a la compañía que aporta 500 000 pesetas. Al cabo de

20 meses de la unión se ha obtenido un beneficio de 1 000 000 de pesetas. Hallar cuánta ganancia corresponde a cada socio.

SOCIO 1.º	SOCIO 2.º
capital ...... 1 000 000 tiempo ...... 30 meses	capital ...... 500 000 tiempo ...... 20 meses

Habremos, por tanto, de repartir las ganancias en partes proporcionales a $30 \times 1\,000\,000$ y a $20 \times 500\,000$, o lo que es lo mismo, a 3 y 1.

$$\frac{S_1}{1} = \frac{S_3}{3};\ S_3 = 3\,S_1;\ S_1 + 3\,S_1 = 1\,000.000 \implies$$
$S_1 = 250\,000$ ptas; $S_3 = 3\,S_1 = 750\,000$.

Regla de interés. — DEFINICIONES. — Supongamos que el propietario de una cierta cantidad presta su dinero a otra persona, o lo coloca en un banco con ánimo de obtener un beneficio de tal préstamo.

Interés es el alquiler que paga al propietario del capital la persona al que lo ha prestado, o el banco depositario.

Capital es la cantidad prestada o colocada.

Rédito es el interés producido en un año por un capital de 100 pesetas.

Tiempo es la duración del préstamo.

Renta es el interés producido por el capital durante un año.

El interés puede ser SIMPLE O COMPUESTO. *Se llama* simple *cuando el interés acumulado por el deudor o depósito no produce a su vez otro interés. Y se llama* compuesto, *cuando se añade dicho interés acumulado al capital al fin de cada año para producir intereses durante los años siguientes.*

Adoptaremos, por convenio, que el interés simple es proporcional al capital y al tiempo; de lo que deducimos de manera inmediata que los problemas de este tipo son casos particulares de reglas de tres o repartimientos proporcionales.

Asimismo se ha adoptado, para facilitar los cálculos, que el año tiene 360 días divididos en 12 meses iguales de 30 días cada uno. Sin embargo, para determinar la duración de un empréstito, cuyas fechas de principio y final se indican, tendremos en cuenta :

1) Se dará a cada mes su número real de días.

2) No se cuenta el primer día, pero sí el último día de devolución del préstamo.

Ejemplos : de acuerdo con lo anterior, del 7 de diciembre al 9 de enero hay 33 días. Del 8 de abril al 22 de mayo hay 44 días, etc.

Fórmula del interés simple. — Dado que el interés simple es directamente proporcional al capital impuesto y al tiempo de imposición, para obtenerlo basta resolver la regla de tres compuesta siguiente.

CAPITALES	AÑOS	RÉDITOS
100 pesetas	1 año	producen r pesetas de interés
c pesetas	t años	producirán i pesetas de interés

$$\frac{100}{c} \times \frac{1}{t} = \frac{r}{i};\ \frac{100}{c \cdot t} = \frac{r}{i} \implies i = \frac{c \cdot r \cdot t}{100}.$$

A partir de esta fórmula general, podemos obtener cualquiera de las otras tres magnitudes que aparecen en ella :

$$c = \frac{100\,i}{t \cdot r};\quad r = \frac{100\,i}{c \cdot t};\quad t = \frac{100\,i}{c \cdot r}.$$

Teniendo en cuenta que el tiempo de empréstito no necesariamente ha de ser por años completos, debemos prever cuáles serán las fórmulas cuando nos sea dado en meses o en días.

Si el tiempo se da en meses (m), lo que hacemos es pasar este tiempo a años, mediante la transformación $\frac{m}{12}$, quedándonos la fórmula general del interés simple en la forma $i = \frac{c \cdot r \cdot m}{1\,200}$.

Si el tiempo de empréstito se diese en días (d), para pasar estos a años, se divide por 360 y la fórmula de interés simple se transformaría en :

$$i = \frac{c \cdot r \cdot d}{36\,000}.$$

Problemas : 1.º Hallar el interés producido por un capital de 100 000 ptas colocadas al 7'5 % durante 3 años y 10 meses.

Solución : 3 años y 10 meses = 46 meses,

$$i = \frac{crt}{1\,200} = \frac{100\,000 \times 7'5 \times 46}{1\,200} = 28\,750 \text{ ptas.}$$

2.º Un capital c ha producido en 2 años un interés de 50 000 ptas colocado al 5 %. Hallar dicho capital.

$$\text{Solución : } c = \frac{100\,i}{r \cdot t} = \frac{50\,000 \times 100}{5 \cdot 2} = 500\,000 \text{ ptas.}$$

3.º Hallar el tanto por ciento de interés al que ha sido colocado en un banco un capital de 100 000 ptas, sabiendo que en 15 meses ha producido un interés de 25 000 ptas :

$$r = \frac{1\,200\,i}{c \cdot t} = \frac{1\,200 \times 25\,000}{100\,000 \times 15} = 20\ \%.$$

4.º ¿Cuánto tiempo habrá estado impuesto al 5 % un capital de 100 000 ptas para que produzca un interés de 10 000 ?

$$t = \frac{100\,i}{c \cdot r} = \frac{100 \times 10\,000}{100\,000 \times 5} = \frac{10}{5} = 2 \text{ años.}$$

Descuento, rentas y valores comerciales. — Hoy en día, la gran parte de las compras que se realizan al por menor y la inmensa mayoría de las grandes transacciones comerciales se efectúan no al contado, sino que suele concedérsele al comprador un plazo determinado para pagar la deuda contraída, plazo que en lo general es previamente acordado entre el comprador y el vendedor (deudor y acreedor). La legalización de la transacción y del pago se realizan mediante un documento, que si lo extiende el deudor se llama *pagaré*, y si es extendido por el acreedor recibe el nombre de *letra de cambio*.

Pagaré. — Es un compromiso escrito y firmado por un deudor, por el cual éste se compromete a pagar al acreedor o persona designada por él, y a una fecha determinada e indicada en el pagaré, le cantidad en él escrita con todas sus letras.

Letra de cambio. — Es la invitación escrita del acreedor al deudor, para que éste pague a su orden (o a orden de un tercero), y en una fecha determinada en la letra, la cantidad en ella escrita con todas sus letras.

Descuento. — Una vez que el acreedor tiene en su poder un pagaré o una letra de cambio, éste puede hacer efectivo el valor en ellas consignado de dos formas : primera, si quiere cobrar la cantidad antes de su vencimiento, lo cede a un banco o a una tercera persona, que al pagarlo retiene para sí una parte de la cantidad escrita en el documento, y segunda, si por el contrario no quiere cobrar el valor de forma inmediata, pero quiere endosarlo

a una tercera persona para su cobro, no tiene más que escribir al dorso de la misma : *Páguese a la orden del Sr. ...*, y firmarla.

La cantidad escrita en el documento se llama *valor nominal*, la cantidad retenida por el banco, o tercera persona que compra la letra, se llama *descuento*, y la cantidad entregada por el banco al acreedor primitivo se denomina *valor efectivo* o *actual*. De las anteriores definiciones, deducimos que el *descuento es la diferencia entre valor nominal y valor efectivo de un documento*.

Si llamamos N al valor nominal, V al valor efectivo y D al descuento, se tiene : $N - V = D$.

El cálculo del descuento por el banco se hace en base a hallar un determinado interés del valor nominal señalado en el documento (descuento comercial).

En realidad, además del descuento comercial, el banco descuenta otras cantidades en concepto de corretaje y de cambio de plaza aunque nosotros no vamos a tomar en consideración estos últimos efectos.

Dado que el descuento comercial D no es más que el interés producido por un determinado capital (valor nominal del documento), los problemas de descuento quedan reducidos a problemas de interés simple.

Problemas : 1.° Hallar el valor actual de una letra de cambio de 10 000 ptas el día 5 de marzo si es pagadera al 7 de mayo al 7%.

$V = N - D$

$$t = 63 \text{ días.} \quad D = \frac{N \cdot r \cdot t}{36\,000} = \frac{10\,000 \times 7 \times 63}{36\,000} = 122 \text{ ptas}$$

$$\Longrightarrow \quad V = 10\,000 - 122 \quad \Longrightarrow \quad V = 9\,878 \text{ ptas.}$$

2.° Un acreedor ha llevado una letra de cambio a un banco el día 13 de junio, y ha recibido por ella 10 000 ptas. Hallar el valor nominal de la misma, sabiendo que era pagadera al 11 de septiembre al 5%.

$N = D + V$

$$D = \frac{(D + 10\,000) \times 5 \times 90}{36\,000}; \; D = \frac{D + 10\,000}{80}; \; V = 10\,000$$

$$t = 90 \text{ días.} \quad 80\,D = D + 10\,000; \quad D = \frac{10\,000}{79} = 126 \text{ ptas}$$

$$N = 10\,000 + 126 = 10\,126 \text{ ptas.}$$

3.° Un acreedor ha negociado con el banco el 6 de mayo una letra de 10 000 pesetas, habiendo cobrado por la misma 9 800 pesetas. Hallar el tanto por ciento del descuento sabiendo que la letra vencía el 25 de septiembre.

$D = N - V = 10\,000 - 9\,800 = 200$ ptas

$$t = 142 \text{ días.} \quad D = \frac{N \cdot r \cdot t}{36\,000} \Longrightarrow r = \frac{36\,000\,D}{N \cdot t} = \frac{36\,000 \times 200}{10\,000 \times 142} = 5\ \%.$$

4.° Hallar el tiempo de vencimiento de una letra de cambio de 10 000 ptas de valor nominal, sabiendo que se ha cobrado por ella un valor efectivo de 9 900 al 6%.

$D = N - V = 100$ ptas

$$D = \frac{N \cdot r \cdot t}{36\,000}; \; t = \frac{36\,000\,D}{N \cdot r} = \frac{36\,000 \times 100}{10\,000 \times 6} = 60 \text{ días.}$$

La letra vencía 60 días despues de negociada en el banco.

Valores. — Los valores son documentos que representan un crédito o derecho de propiedad. Son valores las *acciones*, *obligaciones* y *fondos públicos*.

Sociedades mercantiles. — La constitución de empresas, si éstas son de cierta envergadura, necesita de un capital inicial elevado, que generalmente una persona no puede aportar por sí sola. Por ello se forman las sociedades mercantiles, en las que se reúne el capital de varias personas, para formar el capital social.

Las sociedades mercantiles pueden ser *colectivas*, *comanditarias* y *anónimas*.

De ellas la más generalizada hoy, la era de las grandes empresas, es la sociedad anónima, que la podemos definir diciendo : *es la forma de asociación más apta para proporcionar el capital preciso sin que, por otra parte, las aportaciones de los socios impliquen ningún riesgo para sus bienes*.

La sociedad anónima se caracteriza por : 1) la responsabilidad se limita al capital aportado, 2) se puede ser socio únicamente aportando dinero, y 3) se rige democráticamente, porque todos los socios tienen unos derechos que los colocan en un pie de igualdad, y la sociedad se rige por la opinión de la mayoría.

El órgano de gobierno principal es la *Junta General de Accionistas*, en la que se expresa la voluntad colectiva, la cual se traduce automáticamente en directrices de la empresa.

Las funciones de gestión y administración corresponden al *Consejo de Administración*, cuyo nombramiento corresponde a la *Junta General*.

Acciones. — Los títulos de propiedad de un accionista de una sociedad anónima se llaman *acciones*. A través de la acción, el accionista participa en las ganancias y pérdidas proporcionalmente al capital invertido.

Las principales características de las acciones son : 1) representan cada una de las aportaciones en que se divide el capital social; 2) representan la participación en el reparto de beneficios, y 3) conceden el derecho al voto en las Juntas Generales.

A su vez las acciones se subdividen en *acciones al portador* y *acciones nominativas*. Acciones al portador son aquellas en las que no figura el nombre del socio, y son transmisibles por simple cesión.

Acciones nominativas son las expedidas a un sujeto determinado, cuyo nombre figura en la acción. La transmisión de este tipo de acciones ha de hacerse previa comunicación a la sociedad.

Obligaciones. — Si la aportación por acciones no resulta suficiente para lograr el capital deseado, se recurre a la búsqueda de dicho capital mediante el auxilio de préstamos. Esta operación se realiza con la emisión de títulos-valores llamados *obligaciones*.

Las obligaciones reembolsan un interés fijo, pagadero trimestral o semestralmente, a la presentación de unos cupones numerados que van adheridos al título.

Fondos públicos. — El Estado, para hacer frente a los gastos que se originan por el mantenimiento de los organismos, fuerzas armadas, obras públicas etc., necesita ingresos. Éstos los consigue mediante los diversos tipos de impuestos, patrimonios, contribuciones, etc.

Sin embargo, puede ocurrir que, en determinadas circunstancias, el erario público no tenga suficientes fondos para hacer frente a gastos extraordinarios (guerras, castástrofes, realización de grandes proyectos, etc.). En estos casos ha de recurrir a empréstitos de los particulares, que se realizan mediante la emisión de documentos de crédito que se denominan *fondos públicos* o *títulos de la deuda*.

Títulos de la deuda. — Los *títulos de la deuda* pueden ser amortizables o perpetuos. *Amortizables* son aquellos en los que el Estado devuelve en forma periódica el capital recibido y sus intereses, hasta llegar a anular la deuda pasado un cierto tiempo.

Títulos de deuda *perpetuos* son aquellos que no se amortizan, sino que el Estado se limita a pagar en fechas convenidas el interés acordado en la emisión de dichos títulos, interés que se denomina renta.

A su vez la deuda del Estado puede ser *interior* o *exterior*, según que el empréstito se haya realizado por particulares dentro de la nación o del extranjero.

Negociación de valores. — Los títulos-valores, dada su calidad de negociables, pueden comprarse o venderse. En relación con estas negociaciones, conviene tener en cuenta los siguientes conceptos :

Bolsas de comercio son las instituciones en que se procede a la negociación de valores.

Agentes de cambio y bolsa son las personas que actúan de intermediarios en la compra-venta de valores.

Corretaje es la comisión que los agentes de cambio perciben por su trabajo. Generalmente dicha comisión es del 1 por 1 000 del valor nominal de la transacción, y se cobra tanto al comprador como al vendedor.

Cotización : los precios de compra y venta de valores se fijan diariamente según la oferta y la demanda de los mismos.

Cotización o cambio es el número de pesetas efectivas que se pagan por 100 ptas nominales. Como consecuencia de la cotización, los títulos-valores tienen dos valores : valor nominal y valor efectivo. El valor nominal es el que figura en el título y valor efectivo es el que se abona por el título en un momento dado.

Pignoración de valores. — Pignorar un valor es ofrecerlo a un banco, como garantía de un préstamo.

Problemas : 1.° ¿Cuánto costarán 3 títulos de 10 000 ptas cada uno de la deuda amortizable, al cambio de 90 ?

Solución : el valor nominal de cada título es 10 000 ptas si el cambio es a 90, su valor efectivo será $\frac{90 \times 10\,000}{100} = 9\,000$ ptas, luego 3 títulos costarán 27 000 ptas.

2.° ¿Qué cantidad se obtendría por la venta de 10 títulos de 25 000 ptas de valor nominal de la deuda perpetua interior, estando el cambio a 80?

Valor efectivo de un título $= \frac{25\,000 \times 80}{100} = 20\,000$.

Venta total $= 20\,000 \times 10 = 200\,000$ ptas.

3.° Calcular la cotización de una transacción de 100 títulos de 1 000 ptas de nominal cada uno, sabiendo que se han pagado por ellos 133 000 ptas.

Valor nominal total = 100 000 al 100 de cambio :

$$\frac{100\,000}{100} = \frac{133\,000}{x} \implies x = \frac{133\,000 \times 100}{100\,000} = 133.$$

4.° Hallar la cantidad que se obtendrá pignorando 100 valores de 1 000 ptas cada uno al 127 de cotización, si el banco da el 70% del valor efectivo.

Valor efectivo de los títulos $= \frac{100 \times 1\,000 \times 127}{100} =$ 127 000 ptas.

Cantidad pignorada $= \frac{127\,000 \times 70}{100} = 88\,900$ ptas.

5.° Hallar el cambio de bolsa, sabiendo que por una acción al portador de nominal 1 000 ptas han sido abonadas 1 270 ptas :

$$\frac{1\,000}{1\,270} = \frac{100}{x}; \quad x = \frac{127\,000}{1\,000} = 127.$$

11. — Expresiones algebraicas

Expresión y valor numérico. Expresiones algebraicas equivalentes. Clasificación de las expresiones algebraicas. Monomios y polinomios. Ordenación de un polinomio. Operaciones con monomios y polinomios. Suma. Diferencia. Producto. *De monomios. De un monomio por un polinomio. De polinomios.* Cociente. *De monomios. De un polinomio por un monomio. Exacto de dos polinomios. Entero de dos polinomios.* — **Fracciones algebraicas :** Fracciones equivalentes. Simplificación de fracciones. Reducción de fracciones a un común denominador. Operaciones con fracciones. *Suma. Producto. Aplicación de la propiedad asociativa a la suma y producto. Cociente.* — **Ecuaciones e inecuaciones :** Ecuaciones equivalentes y principios de transformación. Teorema fundamental del Algebra. Ecuación de primer grado con una incógnita. Transformación de una ecuación irracional en una racional. — Inecuaciones : Resolución de una inecuación de primer grado con una incógnita. — Estudio geométrico de ecuaciones e inecuaciones : Aplicación lineal. Aplicación afín. Ecuaciones y aplicaciones afines. Inecuaciones y aplicaciones afines. Ecuación de primer grado con dos incógnitas. — **Sistemas de ecuaciones :** Ejemplo de resolución de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. Resolución general. — **Ecuación de segundo grado con una incógnita :** Obtención de raíces de una ecuación de segundo grado. Ecuaciones incompletas de segundo grado. Estudio particular de la ecuación completa $ax^2 + bx + c = 0$. Relaciones entre las raíces y los coeficientes de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$. Ecuaciones irracionales. — **Ecuación bicuadrada :** Raíces de una ecuación bicuadrada. — **Trinomio de segundo grado :** Transformación del trinomio de segundo grado en cuadrado perfecto. Transformación y signo del trinomio de segundo grado. Clasificación de un número con respecto a las raíces de una ecuación de segundo grado. Variación y representación del trinomio de segundo grado. Sistema de ecuaciones de segundo grado. *Resolución de sistemas de ecuaciones.* Resolución de problemas de ecuaciones de segundo grado.

Expresión y valor numérico. — En los capítulos precedentes hemos sustituido frecuentemente los números (naturales, enteros o racionales) por letras, con objeto de dar generalidad a los resultados.

En esos ejemplos y teoremas anteriores, hemos considerado a las letras como símbolos que representan números racionales cualesquiera. Conforme con este método, daremos la siguiente definición : se conoce por *expresión*

algebraica a un conjunto de letras y números ligados entre sí por los signos de las operaciones aritméticas.

Llamaremos valor numérico de una expresión algebraica al número que resulta de sustituir en dicha expresión las letras por números. Con esta definición deducimos que el valor numérico de una expresión no es único sino que existen infinitos, puesto que infinitas son las posibilidades de sustituir las letras por números cualesquiera.

Ejemplo : $x - 1$; $5x - 3y + 2$; 9; son expresiones algebraicas. Un valor numérico de la primera se obtiene por ejemplo dando a la variable x el valor $x = 2$, resultando entonces : $2 - 1 = 1$. Un valor numérico de la 2.ª expresión algebraica se obtendrá haciendo por ejemplo $x = 1$, $y = 0$, lo que dará $5 \cdot 1 - 3 \cdot 0 + 2 = 7$.

Notaciones : para designar una expresión algebraica, lo haremos mediante la expresión $P(x)$; el valor numérico de dicha expresión algebraica para el valor $x = 1$ lo representaremos mediante $P(1)$.

Con estas notaciones la expresión algebraica del ejercicio anterior $P(x) = x - 1$, para el valor $x = 2$ es $P(1) = 1$.

Expresiones algebraicas equivalentes. — Dos expresiones algebraicas se llaman equivalentes, si tienen iguales valores numéricos para cualesquiera valores de las letras.

Llamaremos *identidad algebraica* a la igualdad entre dos expresiones algebraicas equivalentes.

Ecuación algebraica es la igualdad entre dos expresiones algebraicas no equivalentes, es decir, es una igualdad que sólo se verifica para unos determinados valores de las letras que hay en las expresiones.

Ejemplo : la igualdad $(x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1$ es una identidad, puesto que, para cualquier valor que se le dé a la variable x, siempre se verifica que el primer miembro es igual al segundo. Sin embargo, la expresión $2x = 1$ es una ecuación puesto que sólo existe un número, en este caso el $\frac{1}{2}$, que verifica la relación anterior $2 \times \frac{1}{2} = 1$.

Clasificación de las expresiones algebraicas. — *Expresión algebraica* ENTERA *es aquella en que las letras están sometidas a las operaciones enteras (suma, resta, multiplicación).* Por tanto, ninguna letra figurará en un denominador ni bajo el signo radical.

Expresión algebraica RACIONAL *es aquella en que las letras están sometidas a las operaciones racionales (suma, resta, multiplicación y división), no pudiendo aparecer por lo tanto ninguna letra bajo un signo radical.*

Expresión algebraica IRRACIONAL *es aquella en que alguna letra aparece bajo el signo radical.*

Ejemplos : 1.° Expresiones enteras son $3ax + 5$; $4/3x - 1$; $8xy - x/2$.

2.° Expresiones racionales : $1/3x - y$; $\frac{xy - ab}{x^2}$; $\frac{1}{x} + 5$.

3.° Expresiones irracionales :

$$5\sqrt{x};\quad \frac{x - 1}{\sqrt{3x}};\quad \frac{x + y - x \cdot z}{\sqrt{xz}}.$$

Monomios y polinomios. — Una expresión algebraica formada por números y letras en la que sólo entra el signo de multiplicar se denomina *monomio*.

Polinomio es la expresión algebraica suma de monomios. Cada monomio de un polinomio recibe el nombre de término del mismo.

Coeficiente de un monomio es el número por el que está multiplicado el conjunto de letras que posee el mismo.

Signo de un monomio es el de su coeficiente.

Cada una de las letras que constituyen un monomio pueden estar elevadas a exponentes cualesquiera. *La suma de dichos exponentes recibe el nombre de grado del monomio.*

Se llama grado de un polinomio el máximo de los grados de cada uno de sus términos.

Polinomio homogéneo es aquel en que todos sus términos son del mismo grado.

Ejemplos : 1.° Las expresiones algebraicas x; 1; $2x^3$; $25xy$; son monomios de grado respectivamente 1, 0, 3, 2.

Los coeficientes de dichos monomios son respectivamente 1, 1, 2, 25.

2.° Son binomios las expresiones siguientes $1 - 2xy$; $x^4 - y^2$; $xy + 1/2xyz$; siendo sus grados respectivos : 2, 4, 3. Son trinomios las siguientes : $x - y - z$; $1 + x - xy^2$; $1/4 - xz + xyz^3$. Sus grados son respectivamente 1, 3, 5.

Ordenación de un polinomio. — Los términos de un polinomio se pueden ordenar según los exponentes crecientes o decrecientes de alguna de sus letras que recibe el nombre de letra ordenatriz. Por ejemplo $x^3 - 5x^2 + 1$ está ordenado respecto de la letra x. El polinomio $y^4x + y^3x^3 - 5y^2 + x$ está ordenado respecto de la letra o variable y, aunque no lo está respecto de la x.

Operaciones con monomios y polinomios. — Las operaciones que vamos a definir en el conjunto de las expresiones algebraicas han de ser de tal naturaleza que las operaciones entre números, aparecidas al sustituir en dichas expresiones las letras por números, sean las mismas que nosotros ya conocemos, manteniendo las propiedades formales de éstas.

Suma. — Dados dos polinomios $P_1(x)$, $P_2(x)$, se define su suma como el polinomio $P_1(x) + P_2(x)$ que tiene por términos la suma de los términos de $P_1(x)$ y $P_2(x)$.

Ejemplo : sumar los polinomios $P_1(x) = 1 - xy + zx$ y $P_2(x) = x - 10xz$.

$$P_1(x) + P_2(x) = 1 - xy + zx + x - 10xz = 1 - xy + x - 9zx.$$

Cuando los polinomios a sumar contienen uno o varios términos semejantes (son términos semejantes los que tienen la misma parte literal aunque distintos coeficientes), el polinomio suma contiene también un término semejante a los de los sumandos, término que tiene por coeficiente la suma de los coeficientes de los términos semejantes de los polinomios.

Ejemplos : 1.° Sumar los polinomios siguientes :

$p_1(x) = 4x^2 + 5x - 9$; $\quad p_2(x) = x^4 - 3x^2 + \frac{1}{3}x - 1$;

$p_3(x) = x^2 + 5$

$$\left.\begin{array}{rrrr} x^4 & -\,3x^3 & +\,\frac{1}{3}x & -\,1 \\ & 4x^2 & +\,5x & -\,9 \\ & x^2 & & +\,5 \\ \hline x^4 & +\,2x^2 & +\,\frac{16}{3}x & -\,10 \end{array}\right\} \quad p_1(x) + p_2(x) + p_3(x) = x^4 + 2x^2 + \frac{16}{3}x - 10$$

2.° Sumar $Q(x) = 6x^5 + yx^4 - 1$;
$T(x) = x^4y + 8x^3y^2 + 13$;
$M(x) = -x^5 - 3x^3y^2 - 6x^4y - 9$;
$Q(x) + T(x) + M(x) = 5x^5 + 5x^3y^2 - 4x^4y + 3$.

Diferencia. — Dados dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$, su diferencia es otro polinomio que representaremos mediante $P(x) - Q(x)$, que se obtiene sumando al polino-

mio $P(x)$ el opuesto al polinomio $Q(x)$. De esta manera, la diferencia entre expresiones algebraicas queda reducida a una suma entre las mismas.

Ejemplos : Hallar las diferencias siguientes $P(x) - Q(x)$, donde $P(x) = 1 - x^2$; $Q(x) = x^5 + 5x - 9$;

$$1 - x^2 - (x^5 + 5x - 9) = 1 - x^2 + [-x^5 - 5x + 9] = 1 - x^2 - x^5 - 5x + 9,$$

que ordenado es $-x^5 - x^2 - 5x + 10$.

$M(x) - N(x)$, donde $M(x) = 3x^5 + \frac{4}{3}x^4 + x^3 - 2x^2 + 7$

y $N(x) = x^6 + x^5 - x^4 + \frac{5}{3}x^3 - 7x + 9$.

$$M(x) - N(x) = 3x^5 + \frac{4}{3}x^4 + x^3 - 2x^2 + 7 - \left(x^6 + x^5 - x^4 + \frac{5}{3}x^3 - 7x + 9\right) =$$

$$3x^5 + \frac{4}{3}x^4 + x^3 - 2x^2 + 7 - x^6 - x^5 + x^4 - \frac{5}{3}x^3 + 7x - 9$$

$$= -x^6 + 2x^5 + \frac{7}{3}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - 2x^2 + 7x - 2.$$

Como hemos podido observar a través de los ejercicios anteriores, el suprimir un paréntesis que lleva delante el signo menos $(-)$ es equivalente a cambiar de signo a todos los monomios que hay dentro del paréntesis; inversamente para cambiar de signo a uno o varios monomios, sin que altere su valor, basta encerrarlos en un paréntesis que tenga delante el signo menos.

Ejemplos : si en el polinomio $3x^7 + 3x^6 + 8x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + 2x - 6$ queremos cambiar de signo a los términos de grado par, escribiríamos :

$$3x^7 + 3x^6 + 8x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + 2x - 6 = 3x^7 + 8x^5 + x^3 + 2x - (-3x^6 + x^4 + x^2 + 6).$$

Producto. — *De monomios.* — Dado que un monomio es el producto de varios factores, uno de los cuales es su coeficiente y los demás letras, para multiplicar dos monomios bastará multiplicar sus coeficientes, que forman el coeficiente del producto, y sus partes literales cuyo producto formará la parte literal del monomio producto.

Si la parte literal tiene letras comunes, habremos de tener en cuenta las reglas ya aprendidas para potencias de la misma base.

Ejemplos : 1.° $(3x^2yz) \cdot (8xy) = 24x^2yzxy = 24x^3y^2z$.

2.° $(-3a^2bx) \cdot \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{2}{7}x^2yz^3 = -3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{7} \cdot a^2bx^5yz^3 = -\frac{3}{7}a^2bx^5yz^3.$

3.° $(-ab) \cdot \left(-\frac{1}{3}5x^2\right) \cdot a^3b^2x = \frac{5}{3}a^4b^3x^3.$

De un monomio por un polinomio. — La propiedad distributiva de la suma respecto del producto nos permite definir dicho producto como un nuevo polinomio cuyos términos son el producto del monomio por cada uno de los términos del polinomio.

Ejemplos : 1.° $(3x^2 - 5x + 1) \cdot (abx) = 3x^2abx - 5 \times abx + 1 \cdot abx = 3abx^4 - 5abx^2 + abx$.

2.° $\left(-\frac{1}{2}a^2b\right) \cdot \left(\frac{x^3}{3} + 5x^2a\right) - xab = -\frac{1}{2}a^2b\frac{x^3}{3} - \frac{1}{2}a^2b \cdot 5x^2a + \frac{1}{2}a^2bxab = -\frac{1}{6}a^2bx^3 - \frac{5}{2}a^3x^2b + \frac{1}{2}a^3b^2x.$

De polinomios. — El producto de dos polinomios $P(x) \cdot Q(x)$ es otro polinomio cuyos términos se obtienen multiplicando todos y cada uno de los términos del primer polinomio $P(x)$ por todos y cada uno de los términos de $Q(x)$. El grado del polinomio producto, se deduce de inmediato, es la suma de los grados de los polinomios factores.

Ejemplos : 1.° $(x^2y + xy - 2x^3 + 1) \cdot (x^2y^2 - 5) = x^4y^3 - 5x^2y + x^3y^3 - 5xy - 2x^5y^2 + 10x^3 + x^2y^2 - 5.$

2.° $(3x^6 - 5x^4 + x^3 - 1)(x^2 + x - 1) =$

$$3x^8 + 3x^7 - 3x^6 - 5x^6 - 5x^5 + 5x^4 + x^5 + x^4 - x^3 - x^2 - x + 1 =$$

$$= 3x^8 + 3x^7 - 8x^6 - 4x^5 + 6x^4 - x^3 - x^2 - x + 1.$$

A estos mismos resultados hubiésemos llegado operando de la siguiente forma :

$3x^6$	$-5x^4$		$+ x^3$		-1
$x^2 + x - 1$					
$3x^8$	$-5x^6$	$+x^5$		$-x^2$	
$3x^7$		$-5x^5$		$-x$	
	$-3x^6$		$+5x^4 - x^3$		$+1$
$3x^8 + 3x^7$	$-8x^6$	$-4x^5$	$+6x^4 - x^3 - x^2 - x + 1$		

Cociente. — *De monomios.* — Dados dos monomios, dividendo y divisor, su cociente (cuando existe) es otro monomio cuyo producto por el divisor es igual al dividendo.

Dicho monomio cociente tiene su coeficiente igual al cociente de los coeficientes del dividendo y divisor, y cuya parte literal se obtiene afectando a cada letra de un exponente igual a la diferencia de los que tenga en el dividendo y divisor. Si una letra sólo figura en el dividendo, pasa sin alteración al cociente, y, si aparece con el mismo exponente en el dividendo y en el divisor, no se escribe en el cociente.

Para que el monomio cociente exista, todas las letras del divisor deberán figurar en el dividendo, y sus exponentes deberán ser menores o iguales que los correspondientes del dividendo.

Ejemplos : 1.° Dividir $8x^3y$ entre $2x$:

$$8x^3y : 2x = \frac{8}{2}x^{3-1}y^{1-0} = 4x^2y.$$

2.° Dividir $3x^2ya$ entre $5xy$.

El coeficiente del monomio cociente será $\frac{3}{5}$, y la parte literal $x^{2-1}y^{1-1}a^{1-0} = xy^0a^1 = x \cdot a$, ya que $y^0 = 1$.

3.° Dividir $7a^6b^4c^5x$ entre $-6ab^3c^5$.

El cociente es $\frac{-7}{6}a^{6-1}b^{4-3}c^{5-5}x^{1-0} = \frac{-7}{6}a^5bx.$

De un polinomio por un monomio. — El cociente de un polinomio por un monomio es un nuevo polinomio cuyos términos son los cocientes de los términos del polinomio dividendo por el monomio divisor.

Para que exista el polinomio cociente, cada uno de los términos del polinomio debe ser divisible por el monomio divisor.

Ejemplos : 1.° Dividir $7x^5y - 3x^2y^2 + xy$ por el monomio $2xy$. Dividiendo cada término del polinomio entre $2xy$, y sumando, tenemos : $\frac{7}{2}x^4 - \frac{3}{2}xy + \frac{1}{2}$.

2.° Dividir $8x^5y + x^4 - 3x^3$ por x^2.

Cociente $\equiv 8x^{5-2}y + x^{4-2} - 3x^{3-2} = 8x^3y + x^2 - 3x.$

Exacto de dos polinomios. — Dados dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$, su cociente, cuando existe, es otro polinomio que multiplicado por el divisor $Q(x)$ nos da el dividendo.

Hallemos en principio el cociente entre polinomios de una sola variable. Sean $P(x) = 2x^2 + 20x + 50$ y $Q(x) = x + 5$; su cociente, que en este caso existe, será de la forma $C(x) = ax + b$, donde a y b son números racionales cualesquiera.

Aplicando la definición de cociente exacto, tenemos :

$$C(x) \cdot Q(x) = P(x) \iff (ax + b) \cdot (x + 5) = 2x^2 + 20x + 50; \; ax^2 + 5ax + bx + 5b = x^2 + 10x + 25.$$

Agrupando términos semejantes :

$$ax^2 + (5a + b)x + 5b = 2x^2 + 20x + 50.$$

Ahora bien, el primer miembro de la igualdad es el dividendo $P(x)$; igualando sus términos a los del segundo miembro, encontramos :

$$\begin{aligned} ax^2 &= 2x^2 \\ (5a + b)x &= 20x. \\ 5b &= 50 \end{aligned}$$

El primer coeficiente del cociente, a, será el cociente entre el coeficiente del primer término del dividendo, 2, y el coeficiente del primer término del divisor 1; $a = 2/1 = 2$. Por otra parte, el término independiente b del cociente nos resultará como cociente entre los términos independientes del dividendo 50 y divisor 5. El proceso anterior se puede realizar haciendo los siguientes cálculos ordenadamente :

$$\begin{array}{lll|l} 2x^2 & +20x & +50 & x+5 \\ \cline{4-4} 2x^2 & +10x & & 2x+10 \\ \hline & 10x & +50 & \\ & 10x & +50 & \\ \hline & & 0 & \end{array}$$

que sintetizaremos en :

1.° Se divide el término de mayor grado del dividendo entre el término de mayor grado del divisor : el cociente obtenido es el término de mayor grado del cociente.

2.° Se multiplica dicho término obtenido por todo el divisor.

3.° Dicho producto se resta del dividendo.

4.° La diferencia obtenida se trata como un nuevo dividendo, y se continúa la operación como se indica en el punto primero.

5.° La operación habrá acabado cuando una de las diferencias obtenidas sea cero.

Entero de dos polinomios. — Dados dos polinomios cualesquiera $P(x)$ y $Q(x)$, no siempre será posible encontrar otro polinomio $C(x)$, tal que verifique que $C(x) \cdot Q(x) = P(x)$. Ahora bien, si $P(x)$ es de mayor grado que $Q(x)$, sí es posible operar como hicimos para hallar el cociente exacto entre dos polinomios, encontrándonos al final con un polinomio $R(x)$ que verifica : *a*) el grado de $R(x)$ es menor que el grado de $Q(x)$; *b*) se verifica la relación $P(x) = Q(x) \cdot C(x) R(x)$.

Ejemplo : encontrar $C(x)$ y $R(x)$ en la división siguiente :

$$\begin{array}{llll|l} 6x^5 & -x^3 & & +1 & x^3+2x-1 \\ \cline{5-5} 6x^5 & +12x^3-6x^2 & & & 6x^2-13 \\ \hline & -13x^3-6x^2 & & +1 & \\ & -13x^3 & -26x & +13 & \\ \hline & 6x^2 & +26x & -12 & \end{array}$$

Solución : $C(x) = 6x^2 - 13$; $R(x) = 6x^2 + 26x - 12$.

El método para efectuar la división ha sido el mismo que para el desarrollo de la división exacta, hasta llegar a la diferencia parcial $6x^2 + 26x - 12$, que no hemos convertido en dividendo parcial. Y esto, porque el grado de $6x^2 + 26x - 12$ es inferior al grado de $x^3 + 2x - 1$, y por tanto la división no es posible. Sintetizando todos los pasos que hemos dado, escribiremos :

1) Se ordenan ambos polinomios según las potencias decrecientes de la variable.

2) El primer término del cociente se obtiene como cociente de los primeros términos del dividendo y divisor.

3) Este primer término del cociente obtenido se multiplica por todo el divisor, y el resultado se resta del dividendo. El resto así obtenido se convierte ahora en nuevo dividendo parcial.

4) Si el grado del dividendo parcial es menor que el del divisor, la división se ha acabado y dicho resto parcial es el resto $R(x)$ de la división. Si el resto obtenido es de grado mayor que el divisor, se sigue de nuevo la operación, dividiéndose el término de mayor grado del dividendo parcial entre el término de mayor grado del divisor; el cociente obtenido es el segundo término del cociente total.

5) Así se continúa, hasta llegar a un resto cuyo grado sea menor que el del divisor; si dicho resto es cero, la división es exacta; si es distinto de cero, la división es entera. El grado del cociente ha de ser la diferencia entre los grados del dividendo y divisor.

Ejemplos : 1.° Efectuar la división :

$$\begin{array}{ll|l} 2x^5 - 9x^3 - 2x^2 & -5x-1 & x^3-5x-1 \\ \cline{3-3} 2x^5 - 10x^3 - 2x^2 & & 2x^2+1 \\ \hline x^3 & -5x-1 & \\ x^3 & -5x-1 & \\ \hline 0 & & \end{array}$$

2.° Efectuar la siguiente división :

$$\begin{array}{lllll|l} 3x^5 & & -4x^3 & & +2x-1 & x^2-x+1 \\ \cline{6-6} 3x^5 & -3x^4 & +3x^3 & & & 3x^3+3x^2-4x-7 \\ \hline & 3x^4 & -7x^3 & & +2x-1 & \\ & 3x^4 & -3x^3 & +3x^2 & & \\ \hline & & -4x^3 & -3x^2 & +2x-1 & \\ & & -4x^3 & +4x^2 & -4x & \\ \hline & & & -7x^2 & +6x-1 & \\ & & & -7x^2 & +7x-7 & \\ \hline & & & & -x+6 & \end{array}$$

Cociente : $3x^3 + 3x^2 - 4x - 7$.

Resto : $-x + 6$.

La prueba de la división es inmediata, sin más que tener en cuenta que, por definición, se ha de verificar la relación $R(x) + C(x) \cdot d(x) = D(x)$, donde

$D(x)$ es el dividendo; $R(x)$ es el resto
$d(x)$ es el divisor; $C(x)$ es el cociente.

Fracciones algebraicas

Fracción algebraica es el cociente indicado de dos polinomios. El dividendo se llama numerador y el divisor denominador.

Ejemplo : son fracciones algebraicas :

$$\frac{8x^3}{x^2+y^2};\quad \frac{3x\,7xa}{b^2yx};\quad \frac{x^2-1}{x+5}.$$

Una fracción algebraica tiene un valor numérico para cada sistema de valores de las variables que no anulen el denominador. Al decir *cociente indicado*, queremos expresar que no se trata de dividir el numerador por el denominador, sino que para cada sistema de valores de las variables se han de hallar los valores numéricos del numerador y denominador y obtener su cociente.

Ejemplo : la fracción $\frac{x^2-1}{3x-1}$ tiene el valor numérico 0, para $x=1$, y el valor numérico 1, para $x=0$.

Fracciones equivalentes. — Son aquellas fracciones algebraicas que toman el mismo valor numérico para cualquier sistema de valores de las variables, excepto para aquellos valores que anulan alguno de los denominadores.

De la definición anterior deducimos que, si multiplicamos los dos términos de una fracción algebraica por una expresión entera, la fracción resultante es equivalente a la primera.

En efecto, si para un sistema de valores de la variable la primera fracción toma el valor numérico $\frac{a}{b}$, y k es el valor numérico de la expresión entera por la que hemos multiplicado la fracción, la nueva fracción deberá tener el valor numérico $\frac{ka}{bk}$, que es idéntico al $\frac{a}{b}$.

De la misma definición también deducimos que, al dividir los dos términos de una fracción algebraica por un factor común a ambos, la fracción obtenida es equivalente a la primera.

Ejemplos : 1.° Las fracciones $\frac{3xy}{5x^2+4}$ y $\frac{3x^2y-3xy}{x^3-x^2-4x+4}$ son equivalentes, pues la segunda resulta de multiplicar los dos términos de la primera por $(x-1)$; luego para cualquier sistema de valores numéricos de las variables, excepto el valor $x=\pm 2$ y el $x=1$ (pues ambos anulan los denominadores de las fracciones), toman las dos fracciones algebraicas el mismo valor numérico.

Así, si damos a las variables los valores $x=0$, $y=1$, la primera fracción vale 0 y la segunda también 0.

2.° Igualmente son equivalentes las fracciones $\frac{x^2-5xy}{3x^3+10x}$ y $\frac{x-5y}{3x^2+10}$, pues la segunda resulta de dividir los dos términos de la primera por x.

Simplificación de fracciones. — Simplificar una fracción algebraica es encontrar otra equivalente a ella cuyos términos sean de menor grado que la primera.

Consecuentes con las propiedades estudiadas en el párrafo anterior, podemos dar la siguiente norma : *para simplificar una fracción algebraica, se descomponen en factores los dos términos de ésta, suprimiendo posteriormente los que sean comunes a ambos términos.*

Ejemplos : 1.° Simplificar la fracción $\frac{x^2+2x+4}{x^2-4}$.

Dividiendo los dos términos de la misma por $x+2$, nos queda : $\frac{(x^2+2x+4):x+2}{(x^2-4):x+2}=\frac{x+2}{x-2}$.

2.° Simplificar la fracción $\frac{3x^2y+5x^3y^2}{x^2y^2}$.

Dividiendo numerador y denominador por x^2y, se tiene :

$$\frac{3x^2y+5x^3y^2}{x^2y^2}=\frac{3+5xy}{y}.$$

Reducción de fracciones a un común denominador. — Reducir dos o más fracciones algebraicas a un común denominador es encontrar otras fracciones equivalentes a las primeras y que tengan todas el mismo denominador.

Un modo de convertir dichas fracciones a común denominador será multiplicando los dos términos de cada fracción por los denominadores de las demás fracciones, cosa que podemos hacer en virtud de las propiedades ya estudiadas.

Ejemplo : reducir a un común denominador las fracciones $\frac{3}{x^2}$, $\frac{5y}{x-1}$, $\frac{2x-y}{x^2y}$.

Las anteriores fracciones son equivalentes a las :

$$\frac{3(x-1)x^2y}{x^2\cdot(x-1)x^2y},\quad \frac{5y\cdot x^2\cdot x^2y}{x^2\cdot(x-1)(x^2-y)},\quad \frac{(2x-y)(x-1)x^2}{x^2(x-1)x^2y}.$$

Operaciones con fracciones. — *Suma.* — *Dadas dos fracciones algebraicas con el mismo denominador, su suma es otra fracción algebraica cuyo numerador es la suma de los numeradores y cuyo denominador es el mismo de las fracciones sumandos.*

Cuando las dos fracciones a sumar tengan distinto denominador, se reducen previamente a otras dos fracciones equivalentes a las primeras y que tengan el mismo denominador. Consecuentemente su suma es ahora inmediata.

Ejemplos : 1.° Sumar las fracciones $\frac{8x}{x^2-1}+\frac{5y+x}{x^2-1}+\frac{3xz}{x^2-1}=\frac{8x+5y+x+3xz}{x^2-1}=\frac{9x+5y+3xz}{x^2-1}$.

2.° Efectuar la suma $\frac{8x}{x+1}-\frac{5x}{xz}+\frac{3z-1}{x-1}$. Convirtiendo estas fracciones en otras equivalentes, se tiene :

$$\frac{8x}{x+1}-\frac{5x}{xz}+\frac{3z-1}{x-1}=\frac{8x\cdot zx\cdot(x-1)}{(x+1)(x-1)xz}-\frac{5x\cdot(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)xz}+\frac{(3z-1)(x+1)xz}{(x+1)(x-1)xz}=$$

$$\frac{8x^2z\,(x-1)}{x^3z-xz}-\frac{5x^3-5x}{x^2z-xz}+\frac{3x^2z^2+3xz^2-x^2z-xz}{x^3z-xz}=$$

$$\frac{8x^2z-8x^2z-5x^3+5x+3x^2z^2+3xz^2-x^2z-xz}{x^3z-xz},$$

que dividiendo por x numerador y denominador, se nos convierte en :

$$\frac{8x^2z-9xz-5x^2+5+3xz^2+3z^2-z}{x^2z-z}.$$

Producto. — *Dadas dos fracciones algebraicas, su producto es otra fracción algebraica cuyo numerador es el producto de los numeradores de las fracciones a multiplicar, y cuyo denominador es el producto de los denominadores de las mismas.*

Ejemplos : 1.° Multiplicar las siguientes fracciones :

$$\frac{8x}{3xz-1}\times\frac{5x+1}{x}=\frac{8x\cdot(5x+1)}{(3xz-1)\cdot x}=\frac{40x+8}{3xz-1}.$$

2.° Efectuar $\frac{3xz+2}{x-1}\times\frac{x+4}{xz+1}=\frac{(x+4)(3xz+2)}{(x-1)(xz+1)}=$

$$\frac{3x^2z+4z+12xz+8}{x^2z+x-xz-1}.$$

Aplicación de la propiedad asociativa a la suma y producto. — Dado que las operaciones que hemos definido conservan las leyes formales para las mismas operaciones definidas en el conjunto de los números racionales, podemos, por tanto, definir dichas operaciones (suma y producto) para más de una pareja de elementos. De esta forma tenemos :

$$\frac{a(x)}{b(x)}+\frac{m(x)}{n(x)}+\frac{p(x)}{q(x)}=\left|\frac{a(x)}{b(x)}+\frac{m(x)}{n(x)}\right|+\frac{p(x)}{q(x)}=$$

$$\frac{a(x)}{b(x)}+\left|\frac{m(x)}{n(x)}+\frac{p(x)}{q(x)}\right|$$

$$\frac{a(x)}{b(x)}\times\frac{m(x)}{n(x)}\times\frac{p(x)}{q(x)}=\left|\frac{a(x)}{b(x)}\times\frac{m(x)}{n(x)}\right|\times\frac{p(x)}{q(x)}=$$

$$\frac{a(x)}{b(x)}\times\left|\frac{m(x)}{n(x)}\times\frac{p(x)}{q(x)}\right|.$$

Ejemplos : 1.° Efectuar $\frac{1}{x}+\frac{y}{x^2}+\frac{x-1}{y}=$

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{y}{x^2}\right)+\frac{x-1}{y}=\frac{x^2+xy}{x^3}+\frac{x-1}{y}=$$

$$\frac{x^2y+xy^2+x^4-x^3}{x^3y}.$$

2.° Efectuar $\frac{1}{x}\cdot\frac{y}{x^2}\cdot\frac{x-1}{y}=\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{y}{x^2}\right)\cdot\frac{x-1}{y}=$

$$\frac{y}{x^3}\cdot\frac{x-1}{y}=\frac{yx-y}{x^3y}.$$

Cociente. — *Dadas dos fracciones algebraicas, su cociente es otra fracción algebraica obtenida multiplicando la fracción dividendo por la inversa de la fracción divisor.*

Se llama fracción inversa *de una dada, otra fracción que tiene por numerador el denominador de la primera, y por denominador el numerador de la primera fracción.*

Ejemplos : 1.° Efectuar $\frac{3x}{x-1}:\frac{yz}{x+2}$

$$\frac{3x}{x-1}:\frac{yz}{x+2}=\frac{3x}{x-1}\times\frac{x+2}{yz}=\frac{3x^2+6x}{yzx-yz}.$$

2.° Efectuar $x^2+5:\frac{7z}{x+1}=\frac{x^2+5}{1}:\frac{7z}{x+1}=$

$$\frac{x^2+5}{1}\times\frac{x+1}{7z}=\frac{x^3+x^2+5x+5}{7z}.$$

Ecuaciones e inecuaciones

Consideramos necesario introducir un concepto más amplio de ecuación que el que tradicionalmente se ha venido haciendo en los tratados elementales.

Una ecuación consiste en el problema de buscar en un conjunto A los elementos x que satisfacen una cierta relación $R(x)$. Esta manera de introducir el concepto es muy general y engloba, por ejemplo, los de inecuación y lugar geométrico.

Tradicionalmente se conoce bajo el nombre de ecuación una expresión $R(x)$, que tiene la forma $f(x)=0$, siendo $x\in R$ o $x\in C$; $f(x)$ es un polinomio.

A x se le conoce bajo el nombre de *incógnita* de la ecuación, y a los valores de x, x_1, ..., x_n, que verifican la relación $f(x_i)=0$, se les llama *raíces* de la ecuación.

Diremos que una raíz a es de orden n, si podemos escribir $\forall x$ que $f(x)=(x-a)^n\cdot g(x)$ tal que $g(a)\neq 0$.

Resolver una ecuación es encontrar todas las raíces de ésta con el orden en que aparecen cada una. Históricamente, desde que el matemático italiano Cardano investigó este problema, resolver una ecuación ha consistido en encontrar una fórmula a través de la cual, y mediante operaciones matemáticas sencillas (adiciones, multiplicaciones y radicaciones), podamos encontrar dichas raíces.

Este método de resolver ecuaciones sólo nos posibilita encontrar raíces de las ecuaciones de grado n, para $n\leq 4$. Para valores de $n>4$ es necesario aplicar otros métodos, que llamaremos de aproximación, y que nos permiten hallar todas las raíces de una ecuación con una aproximación tan grande como se quiera. No obstante, en esta obra no abordaremos este último caso.

Ecuaciones equivalentes y principios de transformación. — *Dos ecuaciones se llaman* equivalentes *cuando admiten las mismas raíces.*

Daremos, sin demostración, dos teoremas que nos ayudarán a la resolución de ecuaciones, y que reciben el nombre de *principios de transformación*.

TEOREMA. — *Si a los dos miembros de una ecuación se les suma una misma expresión algebraica, la nueva ecuación obtenida es equivalente a la primera.*

Ejemplo : dada la ecuación $x^2+x-5=0$, si sumamos a ambos miembros la expresión $2x-7$, obtenemos la ecuación $x^2+3x-12=2x-7$, que es equivalente a la primera.

TEOREMA. — *Si los dos miembros de una ecuación se multiplican por una misma expresión algebraica, la nueva ecuación obtenida es equivalente a la primera.*

Ejemplo : las ecuaciones $2x+5=x-1$ y la $(2x+5)\cdot(x^3+3)=(x-1)\cdot(x^3+3)$ son equivalentes.

Hemos de hacer, sin embargo, algunas observaciones en la aplicación de este segundo principio.

a) Una ecuación con coeficientes fraccionarios puede por este método convertirse en una ecuación con coeficientes enteros y equivalente a la primera.

b) Si se multiplican los dos miembros de una ecuación por una expresión que se anula para ciertos valores de las incógnitas, la ecuación obtenida de esta manera admitirá en general otras raíces distintas de la primera, y por lo tanto la ecuación primitiva y la recién obtenida no serán equivalentes.

Teorema fundamental del Álgebra. — Una ecuación general de grado n $a_0x^n+a_1x^{xn-1}+\ldots+a_{n-1}x^1+a_n=0$, $a_i\in\mathbb{R}$, admite exactamente n raíces x_i, $x_i\in\mathbb{R}$ ó $x_i\in\mathbb{C}$.

Ecuación de primer grado con una incógnita. — Llamaremos así a una ecuación de la forma $ax = b$. En su resolución distinguiremos dos casos :

1) $a \neq 0$. Multiplicando ambos miembros por $\frac{1}{a}$ nos queda $ax \cdot \frac{1}{a} = b \cdot \frac{1}{a} \implies x \cdot a \cdot \frac{1}{a} = \frac{b}{a} \implies x = \frac{b}{a}\cdot$

2) $a = 0$. La ecuación se transforma en la $0 \cdot x = b$. Si $b \neq 0$, no existe solución, pues no existe ningún número x que multiplicado por cero dé un producto distinto de 0.

Si $b = 0$, la ecuación se convierte en la $0 \cdot x = 0$, y entonces admite infinitas soluciones; el problema se dice *indeterminado*.

Es claro que la ecuación que acabamos de resolver, $ax = b$, es una forma reducida aunque general de la ecuación de primer grado con una incógnita. Vamos, mediante un ejemplo concreto, a estudiar el método a seguir para reducir cualquier ecuación de primer grado a la forma reducida $ax = b$.

Sea la ecuación $\frac{x}{2} + 5(x - 1) = x + 3$.

1) Quitar paréntesis o, lo que es lo mismo, aplicar la propiedad distributiva :

$$\frac{x}{2} + 5x - 5 = x + 3.$$

2) Quitar denominadores, para lo cual multiplicamos los dos miembros de la ecuación por 2 :

$$\left(\frac{x}{2} + 5x - 5\right) \cdot 2 = (x + 3) \cdot 2 \iff x + 10x - 10 = 6x + 6.$$

3) Efectuar operaciones con los polinomios :

$$11x - 10 = 6x + 6.$$

4) Hacer uno de los dos miembros de la ecuación igual a cero, para lo cual sumamos a ambos miembros la expresión $-6x - 6$, con lo que nos queda :

$$11x - 10 - 6x - 6 = 6x + 6 - 6x - 6 \iff 11x - 10 - 6x - 6 = 0.$$

5) Efectuar operaciones :

$5x - 16 = 0 \iff 5x = 16$, y hemos encontrado finalmente la forma general. La solución de dicha ecuación será $x = \frac{16}{5}\cdot$

Aplicando el mismo procedimiento, vamos a resolver un ejemplo de ecuación del mismo tipo que la anterior.

Ejemplo : resolver la ecuación $\frac{x - 5}{3} + x - 1 = \frac{x}{4}\cdot$

1.º Quitar paréntesis.

2.º Quitar denominadores.

Multiplicando por 12 (m.c.m. de 4 y 3), tenemos :

$$12\left(\frac{x - 5}{3} + x - 1\right) = 12 \cdot \frac{x}{4} \iff \frac{12(x - 5)}{3} + 12(x - 1) = 12 \cdot \frac{x}{4} \iff 4(x - 5) + 12(x - 1) = 3x \iff 4x - 20 + 12x - 12 = 3x.$$

3.º Efectuar operaciones $16x - 32 = 3x$.

4.º Hacer uno de los dos miembros igual a cero, para lo cual sumamos $-3x$ a ambos miembros.

$$16x - 32 - 3x = 3x - 3x \iff 13x - 32 = 0 \iff 13x = 32 \iff x = \frac{32}{13}\cdot$$

Transformación de una ecuación irracional en una racional. — Llamaremos ecuación irracional aquella en la que las incógnitas aparecen bajo el signo radical.

Dada una ecuación de este tipo, para transformarla en una racional, seguiremos los siguientes pasos.

1) Se quitan denominadores.

Sea la ecuación $\frac{x}{4} + \frac{x - 1}{4} + \sqrt{x + 5} = \frac{x}{2} + 1$. Multiplicando por 4 (m.c.m. de 4 y 2), se tiene :

$$x + x - 1 + 4\sqrt{x + 5} = 2x + 4.$$

2) Si la ecuación contiene un solo radical, se le aísla en un miembro.

$$4\sqrt{x - 5} = 2x + 4 - 2x + 1 \iff 4\sqrt{x - 5} = 5.$$

3) Se elevan ambos miembros al cuadrado o, en caso general, a la potencia necesaria para que desaparezca el radical. $(4\sqrt{x - 5})^2 = 5^2$; $16(x - 5) = 25$; $16x - 80 = 25$; $16x = 105 \implies x = \frac{105}{16}\cdot$

En el caso de que la ecuación contenga varios radicales, podrá repetirse varias veces la operación consistente en aislar un radical, después los otros, hasta convertir la ecuación en una racional.

Puede ocurrir que, en la transformación de la ecuación irracional de la que partimos, nos aparezca una ecuación de grado superior al primero, en cuyo caso relegamos su estudio al capítulo correspondiente a las ecuaciones de segundo grado.

La justificación del proceso de reducción de una ecuación irracional a una racional viene dada por el siguiente teorema.

TEOREMA. — *Si los dos miembros de una ecuación se elevan al cuadrado, nos resulta otra ecuación que tiene, entre otras, las raíces de la primitiva ecuación propuesta.*

Inecuaciones

Se conoce bajo el nombre de inecuación una expresión de la forma $f(x) < 0$ ó $f(x) > 0$, donde $f(x)$ es un polinomio en x.

Como en las ecuaciones, podemos hacer una primera clasificación de las inecuaciones en *racionales* e *irracionales*. Otra clasificación la podemos hacer atendiendo a su grado, y así hablaremos de inecuaciones de *primer*, *segundo grado*, etc.

Resolver una inecuación es encontrar el conjunto de soluciones que verifican las desigualdades $f(x) < 0$ ó $f(x) > 0$. Dada una inecuación, podemos convertirla en otra equivalente a ella aplicando lo que llamaremos principios de transformación.

TEOREMA. — *Si se suman a los dos miembros de una inecuación una misma expresión algebraica, la inecuación obtenida es equivalente a la primera.*

Ejemplo : dada la inecuación $8x - 5 < 2$, si sumamos -2 a ambos miembros nos queda :

$$8x - 5 - 2 < 2 - 2 \iff 8x - 7 < 0.$$

TEOREMA. — *Si se multiplican los dos miembros de una inecuación por una expresión algebraica positiva, la inecuación resultante es equivalente a la primera.*

Si la expresión por la cual multiplicamos es negativa, habremos de cambiar el sentido de la desigualdad para obtener una inecuación equivalente a la primera.

Ejemplo : dada la inecuación $\frac{x-4}{4} > -5$. Si multiplicamos por 4, obtenemos $x - 4 > -20$, multiplicando ahora por -1, obtenemos $-x + 4 < 20$, restando 4, se tiene finalmente $-x < 16$, que es equivalente a $\frac{x-4}{4} > -5$.

Como aplicación del anterior teorema, encontramos las siguientes transformaciones :

a) Si se elevan los dos miembros de una inecuación a una potencia, se obtiene una equivalente.

b) Dada una inecuación con ambos miembros positivos, si la elevamos a una potencia par obtenemos una equivalente a la primera.

c) Cuando los valores de los dos miembros de una inecuación sean siempre negativos, al elevarlos a una potencia par será necesario cambiar el sentido de la desigualdad para obtener una inecuación equivalente a la primera.

Resolución de una inecuación de primer grado con una incógnita. — Una inecuación de primer grado en forma general es de la forma $ax + b > 0$.

Distinguiremos para su resolución dos casos.

1) $a \neq 0$. Sacando factor común a en la inecuación $ax + b > 0$, obtenemos $a\left(x + \frac{b}{a}\right) > 0$; distinguiremos :

i) $a > 0 \implies$ que para que se satisfaga la expresión $a\left(x + \frac{b}{a}\right) > 0$, es necesario que $x + \frac{b}{a} > 0$, o sea, se verifica para todo valor de x que verifique que $x > -\frac{b}{a}$.

ii) $a < 0 \implies x + \frac{b}{a} < 0, x < -\frac{b}{a}$. La inecuación se verifica para todo valor de x que verifique $x < -\frac{b}{a}$.

2) $a = 0$. La inecuación se convierte en la $0 \cdot x + b > 0 \iff b > 0$, que se verifica para todo x, cuando $b > 0$.

La inecuación es incompatible cuando $b < 0$.

Ejemplos : 1.° Resolver la inecuación $5x + 1 > 3$;

$$5x + 1 - 3 > 3 - 3 \iff 5x - 2 > 0;$$

$5x - 2 + 2 > 2 \iff 5x > 2$; $x > \frac{2}{5}$. La inecuación se verifica para todo x, tal que $x > 2/5$.

2.° $\frac{x+4}{6} - 1 < \frac{2x-1}{3}$. Operando, vamos obteniendo sucesivamente : $\frac{6(x+4)}{6} - 6 < \frac{6(2x-1)}{3} \iff$
$x + 4 - 6 < 4x - 2 \iff x + 4 - 6 - 4x < 4x - 2 - 4x$
$\iff x + 4 - 6 - 4x < -2 \iff -3x - 2 < -2$
$\iff -3x - 2 + 2 < -2 + 2 \iff -3x < 0$

cambiando de signo $3x > 0$; $x > \frac{0}{3}$, $x > 0$.

Y afirmamos que la inecuación anterior se verifica $\forall x > 0$.

Estudio geométrico de ecuaciones e inecuaciones

Aunque posteriormente las trataremos como resultado del estudio de la Geometría, consideramos de importancia hacer una pequeña introducción de las *aplicaciones*.

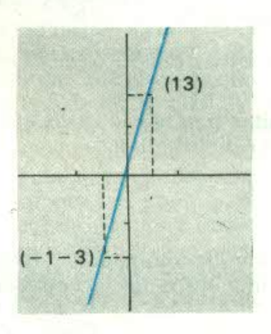
Aplicación lineal. — Consideremos la aplicación $f : R \longrightarrow R$ definida por $f(x) = ax$, donde a es un número real cualquiera. Comúnmente la escribiremos en la forma $y = ax$.

Ejemplo : sea la aplicación $y = 3x$; los pares de la aplicación serían :

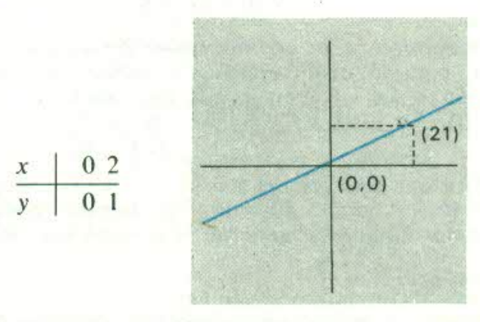
x	$+\ x \ldots -2 -1\ 0\ 1\ 2\ \frac{5}{2} \ldots$
y	$+3x \ldots -6 -3\ 0\ 3\ 6\ \frac{15}{2} \ldots$

En un diagrama cartesiano, podríamos representar gráficamente la anterior aplicación sin más que representar en el plano los pares (00), (13), (26), (− 1 − 3), (1 3) etcétera.

Observemos que la aplicación obtenida es una recta, y, como una recta queda perfectamente determinada conociendo dos de sus puntos, resulta que para representarla sólo necesitamos conocer un par de parejas de valores de *f*.



Ejemplo : representar gráficamente la aplicación $y = \frac{1}{2}x$.

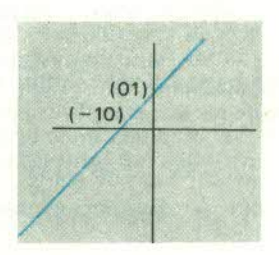


x	0 2
y	0 1

Aplicación afín. — Consideremos la aplicación $f : R \longrightarrow R$ definida por $f(x) = x + 1$. Las parejas de valores que formamos serán :

x	… − 1 0 1/2 1
y	… 0 1 3/2 2

y gráficamente su representación sería :



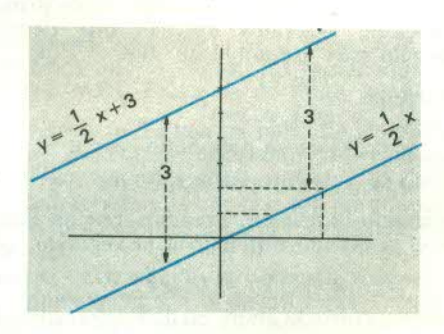
Esta aplicación como podemos observar no contiene al par (00) o, lo que es lo mismo, no pasa por el origen de coordenadas.

A un tal tipo de aplicaciones, que no pasan por el origen de coordenadas, las llamaremos *afines*.

En general, una aplicación afín es una aplicación de la forma $y = ax + b$. Para representarla gráficamente, tengamos en cuenta que el par (Ob) pertenece siempre a la aplicación, y que los demás valores de y se obtienen sumando b a los correspondientes valores de $y = ax$.

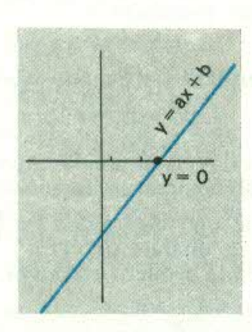
Ejemplo : representar gráficamente $y = \frac{1}{2}x + 3$.

En un ejemplo anterior ya estudiamos la aplicación lineal $y = \frac{1}{2}x$.



Sumando 3 a todos los puntos de la recta $y = \frac{1}{2}x$ obtenemos la aplicación afín $y = \frac{1}{2}x + 3$.

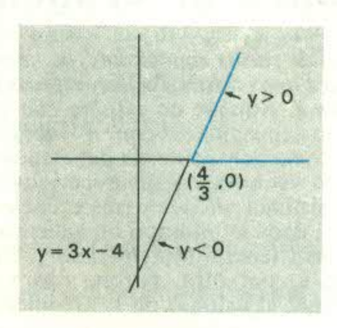
Ecuaciones y aplicaciones afines. — Una ecuación de primer grado con una incógnita es una expresión de la forma $ax + b = 0$, y una aplicación afín es otra expresión de la forma $y = ax + b$. Observemos que $y = ax + b$ se transforma en $ax + b = 0$, cuando el valor de y es igual a cero. ¿Y cuándo en una recta la y se hace cero? Es el punto de corte de dicha recta con el eje de las x (llamado también eje de las abscisas).



Consecuentemente, resolver una ecuación $ax + b = 0$ es encontrar el punto de corte de la aplicación afín $y = ax + b$ con el eje de las x.

Inecuaciones y aplicaciones afines. — Supongamos la inecuación $3x - 4 < 0$, que, resuelta, nos da para $x < \frac{4}{3}$ ó, lo que es lo mismo, todo número menor que $\frac{4}{3}$, verifica que $3x - 4 < 0$.

Representemos gráficamente la aplicación $y = 3x - 4$.



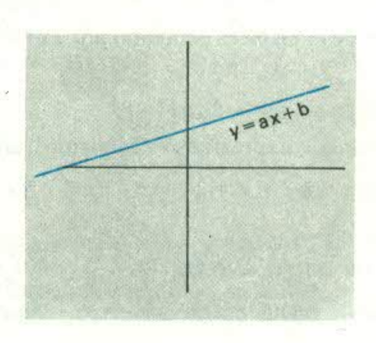
Observemos que todos los puntos del plano que están por encima del eje de las x tienen su coordenada y mayor que cero, y que todos los puntos debajo del eje de las x tienen su coordenada y menor que cero.

Particularizando nuestro ejemplo, obtenemos que la parte de la gráfica tal que $y > 0$ viene representada por un trazo más grueso, y la restante es la $y < 0$.

Las x que verifican que $y > 0$ también vienen representadas por el trazo grueso, mientras que las x que verifican que $y < 0$ son las que hay a la izquierda del punto $\left(\frac{4}{3}, 0\right)$ o, lo que es lo mismo, $y < 0$ es verificada cuando $x < \frac{4}{3} \iff 3x - 4 < 0$ para $x < \frac{4}{3}$, con lo cual tenemos que la solución de la inecuación viene representada por la semirrecta de origen $\left(\frac{4}{3}, 0\right)$, y dirección hacia la izquierda.

Ecuación de primer grado con dos incógnitas. — Consideremos la ecuación de primer grado con dos incógnitas $3x + y = 1$, que podemos convertir en la $y = 1 - 3x$, en virtud de los teoremas de transformación, que siguen siendo igualmente válidos.

En esta ecuación, como anteriormente, lo que nos interesa es encontrar parejas de valores de x e y que la satisfagan. Observamos que, fijado un valor de y, encontramos un valor de x. Por ejemplo para $y = 0$, encontramos $x = \frac{1}{3}$, o sea que la pareja $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$ es una solución de la ecuación. Podemos, claro está, darle más valores a y y encontrar los correspondientes de x. De este modo encontraremos que una ecuación general del tipo $y = ax + b$ posee infinitas soluciones, pues infinitas son las parejas de valores (xy) que satisfacen la ecuación. Existe una interpretación geométrica de dichas soluciones. En efecto, representando la aplicación o función $y = ax + b$, encontramos que todos los puntos pertenecientes a la recta satisfacen a dicha ecuación o, lo que es igual, las soluciones de dicha ecuación son los infinitos puntos de dicha recta.



Sistemas de ecuaciones

Un conjunto de varias ecuaciones, que deben de quedar satisfechas para unos mismos valores de las incógnitas, se llama un sistema. Aunque un estudio más general de los sistemas de m ecuaciones con n incógnitas ha sido abordado ya, como consecuencia del estudio de la estructura de espacio vectorial, nos parece muy importante el tratado de los sistemas de dos y tres ecuaciones con dos y tres incógnitas, dada la multitud de aplicaciones en todas las ramas de las Ciencias Matemáticas y Experimentales por una parte y, por otra, porque nos va a servir de introducción para el estudio de la Geometría.

Ejemplo de resolución de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. — Sea dado el sistema $\left.\begin{array}{l} 2x+1=y \\ 2y+x-5=3 \end{array}\right\}$, que resolveremos mediante tres métodos diferentes : de sustitución, de reducción y de igualación.

MÉTODO DE SUSTITUCIÓN. — Dado que el sistema se ha de verificar para los mismos valores de las incógnitas, y dado que conocemos la relación $y = 2x + 1$, sustituyendo dicho valor en la ecuación de abajo, obtenemos :

$$2(2x+1)+x-5=3 \iff 4x+2+x-5-3=0 \iff 5x=6;\ x=\frac{6}{5}.$$

Sustituyendo el valor encontrado para x en la ecuación $y = 2x + 1$, obtenemos $y = 2\times\frac{6}{5}+1=\frac{12}{5}+1=\frac{17}{5}$.

MÉTODO DE REDUCCIÓN. — $\left.\begin{array}{l} 2x+1-y=0 \\ x+2y-5-3=0 \end{array}\right\}$, si multiplicamos la segunda ecuación por 2, obtenemos una ecuación equivalente, y el sistema lo escribimos : $\left.\begin{array}{l} 2x-y=1 \\ x+2y=8 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} 2x-y=-1 \\ 2x+4y=16 \end{array}\right\}$, si restamos a la primera ecuación una misma expresión algebraica, sabemos que obtenemos otra ecuación equivalente a ella. Restando de la primera ecuación la segunda, nos queda :

$$2x-y+1-(2x+4y-16)=0 \iff$$
$$2x-y+1-2x-4y+16=0;\ -5y=-17;\ y=\frac{17}{5}.$$

Sustituyendo el valor encontrado para y en la ecuación $x = 8 - 2y$, obtenemos $x = 8-\frac{34}{5}=\frac{6}{5}$.

El método de reducción nos ha permitido eliminar mediante una resta (suma) la incógnita x, pero podíamos haber hecho lo mismo, aunque eliminando y. En efecto,

$$\left.\begin{array}{l} 2x-y=-1 \\ x+2y=\ \ 8 \end{array}\right\}.$$

Multiplicando la primera ecuación por 2 obtenemos :

$$\left.\begin{array}{l} 4x-2y=-2 \\ x+2y=\ \ 8 \end{array}\right\}.$$

Sumando ambas expresiones obtenemos una ecuación equivalente $4x-2y+x+2y=6 \iff 5x=6,\ x=\frac{6}{5}$.

MÉTODO DE IGUALACIÓN. — $\left.\begin{array}{l} 2x+1=y \\ x+2y-5=3 \end{array}\right\}$; este método consiste en encontrar una expresión en cada una de las ecuaciones para una misma incógnita, y posteriormente hacerlas iguales :

$$2y=3+5-x;\quad 2y=8-x;\quad y=\frac{8-x}{2}.$$

Como la solución es común para ambas ecuaciones, igualando las dos expresiones encontradas para y, se obtiene $\frac{8-x}{2}=2x+1 \iff 8-x=4x+2;\ 5x=6;\ x=\frac{6}{5}$.

En la resolución del sistema por reducción hemos partido del hecho de que, sumando dos ecuaciones miembro a miembro, la expresión obtenida junto con una de las ecuaciones es equivalente al sistema de partida. Este hecho se fundamenta en la aplicación de los principios de transformación. Tratemos de dar una demostración matemática lo más asequible posible.

Sea el sistema $\left.\begin{array}{l} f(x,y)=0 \\ g(x,y)=0 \end{array}\right\}$ **[A]**

$f(x,y)$ es un polinomio en x e y

$g(x,y)$ es un polinomio en x e y

Multiplicando la primera ecuación por un número a y sumando el resultado obtenido a la segunda, se tiene :

$$g(x,y)+af(x,y)=0.$$

El problema consiste ahora en demostrar que el sistema $\left.\begin{array}{l} f(x,y)=0 \\ g(x,y)=0 \end{array}\right\}$ y el $\left.\begin{array}{l} f(x,y)=0 \\ g(x,y)+af(x,y)=0 \end{array}\right\}$ son equivalentes.

En efecto, toda solución del sistema **[A]** hace $f(x,y)=0$ y $g(x,y)=0$. Al multiplicar a por cero, queda : $g(x,y)+a.\ 0=g(x,y)$, pero $g(x,y)=0 \Longrightarrow g(x,y)+af(x,y)=0$. Recíprocamente. Sea una solución del sistema $\left\{\begin{array}{l} f(x,y)=0 \\ g(x,y)+af(x,y)=0 \end{array}\right.$. Esta solución satisfará a $f(x,y)=0$, que es una ecuación del sistema $\left.\begin{array}{l} f(x,y)=0 \\ g(x,y)=0 \end{array}\right\}$.

Por otra parte, si $g(x,y)+af(x,y)=0$ y además $f(x,y)=0 \Longrightarrow g(x,y)=0$, con lo que tenemos demostrado nuestro propósito.

Resolución general. — Sea el sistema

$$\left.\begin{array}{l} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{array}\right\} \qquad [1]$$

que vamos a resolver por sustitución.

Supongamos que uno cualquiera de los coeficientes, por ejemplo el a, es distinto de cero.

Despejando x en la primera ecuación y sustituyéndola en la segunda :

$$x=\frac{c-by}{a}$$

$$\left.a'\left(\frac{c-by}{a}\right)+b'y=c'\right\} \qquad a'c-a'by+ab'y=c'a;$$
$$y(ab'-a'b)=c'a-a'c \iff$$

$\left.\begin{array}{l} x=\dfrac{c-by}{a} \\ y=\dfrac{c'a-a'c}{ab'-ba'} \end{array}\right\}$. Sustituyendo en la primera ecuación el valor encontrado para y, se tiene :

$$x = \frac{c - b\dfrac{ac' - a'c}{ab' - a'b}}{a} \iff ax = c - b\frac{c'a - a'c}{ab' - ba'} \iff x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}.$$

Pueden presentarse dos casos :

1) Si $ab' - a'b \neq 0$, el sistema tiene entonces solución única. Diremos que el sistema es un sistema *de Cramer*, y que $ab' - a'b$ es el *determinante* del sistema.

2) Si $ab' - a'b = 0$, el sistema no tiene solución y diremos que es *incompatible*.

Puede presentarse el caso de que $a = b = a' = b' = 0$; el sistema queda entonces reducido a :

$$\left.\begin{array}{l} 0\cdot x + 0\cdot y = c \\ 0\cdot x + 0\cdot y = c' \end{array}\right\}$$ si $c = c' = 0$, el sistema tiene infinitas soluciones, pues toda pareja de valores (x, y) lo satisfacen, y diremos que el sistema es *indeterminado*.

Si $c \neq 0$, $c' \neq 0$, el sistema no tiene solución.

APLICACIONES. — La mayor parte de los problemas de índole matemática que se presentan en la vida diaria, y en las aplicaciones de la Ciencia, consisten en encontrar un cierto número o números que nos son desconocidos, y de los cuales sólo sabemos unos datos y unas ciertas relaciones entre ellos.

Al número desconocido le podemos asignar una letra que llamaremos incógnita, y de los datos y relaciones que se puedan establecer entre las incógnitas y dichos datos obtendremos unas ecuaciones, que resueltas nos darán una o varias soluciones al problema planteado.

PROBLEMAS : 1.° Podemos afirmar que en un aula está la cuarta parte del alumnado de un colegio, en el comedor hay un tercio y el resto, que son 35, están en el recreo. ¿Cuántos alumnos hay en el colegio?

Resolución : llamando x al número de alumnos que hay en total en el colegio, podemos plantear el problema teniendo en cuenta que la suma de los alumnos en el aula, comedor y recreo es el total x de todos los alumnos del colegio.

Alumnos que hay en el aula .... $\frac{x}{4}$

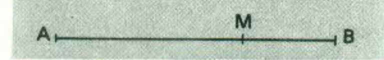
Alumnos que hay en el comedor .... $\frac{x}{3}$

Alumnos que hay en el recreo 35

Número total de alumnos .... $\frac{x}{4} + \frac{x}{3} + 35 = x$,

ecuación que resuelta nos da $x = 84$.

2.° Un móvil parte de un punto A hacia otro B distante 100 km. De B hacia A parte otro móvil al mismo tiempo. La velocidad del primer móvil es de 60 km/h y la del segundo de 50 km/h. Hallar dónde y cuándo se encontrarán sabiendo que la hora de partida ha sido las 7 en punto.



Llamemos x a la distancia AM, donde M es el punto de encuentro.

Sea y el tiempo que han estado rodando ambos móviles.

$$\left.\begin{array}{r} x = 60\,y \\ 100 - x = 50\,y \end{array}\right\} 100 - 60\,y = 50\,y;\ 110\,y = 100 \iff$$

$$y = \frac{10}{11} \text{ de hora AM} = x = 60\cdot\frac{10}{11} = \frac{600}{11} = 54\text{'}5 \text{ km.}$$

3.° Un grifo A tarda en llenar un depósito 3 horas, otro grifo B tarda en llenar el mismo depósito 2 horas. Hallar el tiempo que tardan los dos grifos juntos en llenar el depósito.

Sea V el volumen del depósito.

En 1 hora el grifo A llena $\frac{V}{3}$.

En 1 hora el grifo B llena $\frac{V}{2}$.

Los dos juntos A y B llenarán en 1 hora $\frac{V}{3} + \frac{V}{2}$.

Sea x el tiempo que tardan en llenar el depósito los dos grifos juntos. En 1 hora llenarán $\frac{V}{x}$.

El planteamiento será : $\frac{V}{3} + \frac{V}{2} = \frac{V}{x}$; dividiendo los dos miembros por V, se tiene : $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{x}$; $2x + 3x = 6$; $5x = 6$; $x = \frac{6}{5}$ de hora = 1 h 15 m.

4.° En un corral hay gallinas y conejos. El número total de cabezas es 25 y el de patas 80. Hallar el número de gallinas y conejos del corral.

Sea x el número de gallinas.

Sea y el número de conejos.

Planteamiento :

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 25 \\ 2x + 4y = 80 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 2x + 2y = 50 \\ 2x + 4y = 80 \end{array}$$

$$2y = 30;\ y = 15$$

$x = 25 - 15 = 10$.

5.° Hallar tres números consecutivos cuya suma sea 63.

Sea x el menor de los tres números.

El siguiente será $x + 1$.

El último será $x + 2$.

Planteamiento : $x + x + 1 + x + 2 = 63$; $3x + 3 = 63$; $x = \frac{60}{3} = 20$. Los números buscados son 20, 21 y 22.

6.° Se mezclan vinos de 10 y 13 ptas el litro. El resultado son 5 hectolitros de vino que se venden a 11'50 ptas el litro. ¿Cuántos litros de cada clase hay en la mezcla?

Sea x el número de litros de vino de 10 ptas que hemos mezclado.

Sea y el número de litros de vino de 13 ptas que hemos mezclado.

Planteamiento :

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 500 \\ 10x + 13y = 500\cdot 11\text{'}50 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 500 - y \\ 10(500 - y) + 13y = 5\,750; \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 500 - y \\ 5\,000 - 10y + 13y = 5\,750 \end{array}\right\} 3y = 750;\ y = 250 \text{ litros :}$$

$$x = 500 - 250 = 250 \text{ litros.}$$

7.° ¿Cuánto oro de leyes 0'800 y 0'900 habremos de tomar para obtener 5 700 gramos de oro de ley 0'870?

Sea x el oro que tomamos de 0'800.

Sea y el oro que tomamos de 0'900.

Planteamiento :

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 5\,700 \\ 0'800x + 0'900y = 0'870 \times 5\,700 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 5\,700 - y \\ 8x + 9y = 8'7x\ 5\,700 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 5\,700 - y \\ 8(5\,700\,y) + 9y = \end{array}$$

$$49\,590 \left\{ \begin{array}{l} x = 5\,700 - y \\ 45\,600 - 8y + 9y = 49\,590 \end{array}\right\}$$

$$x = 5\,700 - 3\,990 = 1\,710 \text{ gramos}$$
$$y = 3\,990 \text{ gramos}$$

8.° Un señor ha colocado tres capitales en las condiciones siguientes : el primero al 5 %, el segundo al 6 % y el tercero al 6'5 %. Los intereses producidos por los tres capitales en un año suman 3 300 ptas, y la suma de dichos capitales es 55 000 ptas. Hallar la cuantía de cada capital, sabiendo que la suma del primero más el tercero excede al segundo en 5 000 ptas.

Llamemos x, y, z a cada uno de los capitales.

Interés producido por x durante 1 año $= \dfrac{x \cdot 5}{100}$.

Interés producido por y durante 1 año $= \dfrac{y \cdot 6}{100}$.

Interés producido por z durante 1 año $= \dfrac{z \cdot 6'5}{100}$.

Planteamiento :

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 55\,000 \\ x + z \quad = 5\,000 + y \\ \dfrac{5x}{100} + \dfrac{6y}{100} + \dfrac{6'5z}{100} = 3\,300 \end{array}\right\}$$

Sistema que resuelto nos provee de las siguientes soluciones :

$x = 10\,000$ ptas.
$y = 25\,000$ ptas.
$z = 20\,000$ ptas.

Ecuación de segundo grado con una incógnita

Se llama ecuación de segundo grado con una incógnita a una ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, $a, b, c, \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

Para abordar con más sencillez su estudio, podemos suponer quel el coeficiente del término de segundo grado a es siempre mayor que cero, pues en el caso de que no lo fuese, podríamos multiplicar por -1 los dos miembros de la ecuación, convirtiendo la ecuación primitiva en otra equivalente a ella y que además cumple que $a > 0$.

Los demás coeficientes, b y c, pueden ser nulos, obteniéndose entonces los subcasos siguientes :

1) $ax^2 + bx = 0$.
2) $ax^2 + c = 0$.

Ecuaciones estas últimas que se llaman *incompletas* de segundo grado.

Obtención de las raíces de una ecuación de segundo grado. — Sea la ecuación completa de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$, **[1]**
multiplicando los dos miembros de ella por $4a$, obtenemos :

$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$; restando $4ac$ a los dos miembros : $4a^2x^2 + 4abx = -4ac$.

Sumando b^2 se tiene : $4a^2x^2 + 4abx + b^2 = -4ac + b^2$; el primer miembro es un cuadrado perfecto, luego podemos escribir : $(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$; extrayendo la raíz cuadrada a los dos miembros :

$$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac} \iff x = -\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

y las dos raíces de la ecuación son finalmente :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}; \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2-4ac}}{2a}. \qquad \textbf{[2]}$$

Ejemplos : 1.° Resolver la ecuación $x^2 - 3x - 10 = 0$.
En esta ecuación $a = 1$; $b = -3$; $c = -10$.
Aplicando las fórmulas [2] nos sale :

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10)}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{3 \pm 7}{2};$$
$$x_1 = 5; \quad x_2 = -2.$$

2.° Resolver la ecuación $3x^2 + 4x - 1 = 0$.
Aplicando las fórmulas [2] nos sale :

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16+12}}{6} = \frac{-4 \pm \sqrt{28}}{2} =$$

$$-\frac{4 \pm 2\sqrt{7}}{2} \begin{cases} x_1 = \dfrac{-2+\sqrt{7}}{3} \\ x_2 = \dfrac{-2-\sqrt{7}}{3} \end{cases}$$

Ecuaciones incompletas de segundo grado. — Las ecuaciones 1) $ax^2 + bx = 0$, y 2) $ax^2 + c = 0$ pueden resolverse sin necesidad de las fórmulas generales [2].

En efecto, de $ax^2 + bx = 0$, sacando factor común x obtenemos : $x(ax + b) = 0$, ecuación que se satisface para $x = 0$ ó $ax + b = 0 \iff \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = -\dfrac{b}{a} \end{array}$ que son las dos raíces de la ecuación.

La ecuación 2) $ax^2 + c = 0$, la convertimos, transponiendo los términos, en :

$$ax^2 = -c \iff x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}} \iff \begin{array}{l} x_1 = +\sqrt{\dfrac{-c}{a}} \\ x_2 = -\sqrt{\dfrac{-c}{a}}. \end{array}$$

Observemos que en la solución de la ecuación completa $ax^2 + bx + c = 0$, y en la incompleta $ax^2 + c$, las raíces x_1 y x_2 nos vienen expresadas en función de la expresión $b^2 - 4ac$. El número $b^2 - 4ac$, que llamaremos *discriminante* de la ecuación, puede ser mayor, menor o igual que cero.

Si $b^2 - 4ax \geqslant 0$, la raíz cuadrada de dicho discriminante existe, y por lo tanto las raíces x_1 y x_2 de la ecuación son números reales.

Ahora bien, puede ocurrir que $b^2 - 4ac < 0$ y, entonces, no existe $\sqrt{b^2 - 4ac}$, no pudiendo obtenerse las raíces en el campo de los números reales.

En este último caso, las raíces x_1 y x_2 son números complejos conjugados.

Ejemplo : resolver la ecuación $x^2 - x + 2 = 0$,

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 2}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{-7}}{2} \begin{cases} x_1 = \dfrac{1 + \sqrt{7}i}{2} \\ x_2 = \dfrac{1 - \sqrt{7}i}{2} \end{cases}$$

Estudio particular de la ecuación completa $ax^2+bx+c=0$. — En el caso de que el coeficiente b del término de primer grado sea un número par, podemos simplificar la fórmula que nos provee de las raíces de la ecuación.

En efecto, haciendo $b=2b'$ se tiene :

$$x=\frac{-2b'\pm\sqrt{(2b')^2-4ac}}{2a}=\frac{-2b'\pm\sqrt{4b'^2-4ac}}{2a}=$$
$$=\frac{-2b'\pm\sqrt{4(b'^2-ac)}}{2a}=\frac{-2b'\pm2\sqrt{b'-ac}}{2a}=$$
$$\frac{-b'\pm\sqrt{b'-ac}}{a}.$$

Relaciones entre las raíces y los coeficientes de la ecuación $ax^2+bx+c=0$. — Sumando el grupo de fórmulas [2] obtenemos :

$$x_1+x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b}{a}. \qquad [3]$$

Multiplicando ahora las mismas expresiones obtenemos :

$$x_1\cdot x_2=\frac{(-b+\sqrt{b^2-4ac})}{2a}\cdot\frac{(-b-\sqrt{b^2-4ac})}{2a}=$$
$$\frac{(-b)^2-(\sqrt{b^2-4ac})^2}{(2a)^2}=\frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}. \qquad [4]$$

Fórmulas ambas que podemos resumir escribiendo : *la suma de las raíces de una ecuación de segundo grado es igual al cociente, cambiado de signo, entre los coeficientes de los términos de primero y segundo grado.*

El producto de las raíces de una ecuación general de segundo grado es igual al cociente entre el término independiente de la ecuación y el coeficiente del término de segundo grado.

Ejemplo : hallar la suma y el producto de las raíces de la ecuación $x^2-5x+2=0$:

$$x_1+x_2=-\frac{-5}{1}=5$$
$$x_1\cdot x_2=\frac{2}{1}=2.$$

Una consecuencia de los resultados anteriores es el poder plantear una ecuación, conociendo la suma y el producto de sus raíces.

En efecto, la ecuación $ax^2+bx+c=0$ la podemos convertir en $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0 \iff x^2-\left(-\frac{b}{a}x\right)+\frac{c}{a}=0$; teniendo en cuenta que $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ y que $x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$, el planteamiento es inmediato.

Ejemplo : hallar una ecuación de segundo grado tal que la suma de sus raíces sea 1, y el producto de las mismas -1.

Sabemos que podemos escribir $x^2-\left(-\frac{b}{a}x\right)+\frac{c}{a}=0 \iff x^2-x-1=0.$

Ejemplo : hallar una ecuación de segundo grado, cuyas raíces sean 1 y -2.

$$\left.\begin{array}{l}x_1+x_2=1+(-2)=-1\\ x_1\cdot x_2=-2\end{array}\right\} \iff x^2-\left(-\frac{b}{a}x\right)+\frac{c}{a}=0,$$
$$x^2+x-2=0.$$

Ecuaciones irracionales. — En el estudio de las ecuaciones de primer grado, anunciábamos que en la transformación de una ecuación irracional en racional podía ocurrir que esta última fuese de grado superior al primero. Conforme con esto enunciamos el teorema siguiente.

TEOREMA. — *Si los dos miembros de una ecuación se elevan al cuadrado, nos resulta otra ecuación que tiene, entre otras, las raíces de la ecuación propuesta.*

Ejemplo : resolver la ecuación $\frac{\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}-1}=\frac{3x+5}{x-1}$. Quitando denominadores $(\sqrt{x}+5)\cdot(x-1)=(\sqrt{x}-1)\cdot(3x+5) \iff x\sqrt{x}-\sqrt{x}+5x-5=3x\sqrt{x}+5\sqrt{x}+3x-5 \iff 2x\sqrt{x}+6\sqrt{x}-8x=0$; $\sqrt{x}(2x+6)=8x$.

Elevando al cuadrado los dos miembros de la ecuación se tiene :

$x\cdot(4x^2+36+24x)=64x^2 \iff 4x^3+36x+24x^2-64x^2=0$ $x(4x^2+36-40x)=0$; una solución, la $x_1=0$, es inmediata, las otras dos vienen dadas por la ecuación $4x^2-40x+36=0 \iff x^2-10x+9=0$;

$$x=\frac{5\pm4}{2}\begin{cases}x_2=9\\ x_3=1.\end{cases}$$

De las tres raíces, x_1, x_2, x_3, sólo dos de ellas, las $x_1=0$ y $x_2=9$, verifican la ecuación inicial y por lo tanto son sus soluciones.

APLICACIONES. — **I)** Estudio del signo de las raíces de una ecuación de segundo grado.

Supongamos que $a>0$, cosa que como ya conocemos siempre es posible, y por otra parte que la ecuación posee sus dos raíces reales, o sea, que $b^2-4ac>0$. En estas condiciones tenemos :

1.º Si $c>0$ (coeficiente del término de grado cero o término independiente), dado que $a>0 \Longrightarrow \frac{c}{a}>0 \Longrightarrow$ que las dos raíces son del mismo signo.

Ambas serán positivas si b es negativo, ya que $x_1+x_2=\frac{-b}{a}$, y ambas serán, por el contrario, negativas si b es positivo.

2.º Si $c<0 \Longrightarrow x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}<0 \Longrightarrow$ las dos raíces tienen distinto signo.

Si $b<0 \Longrightarrow \frac{-b}{a}>0 \Longrightarrow x_1+x_2>0$, y, dado que son de signos opuestos, implica que la raíz positiva es la mayor.

Si $b>0 \Longrightarrow \frac{-b}{a}<0 \Longrightarrow x_1+x_2<0 \Longrightarrow$ la raíz negativa es la menor.

Resumiendo todas las posibilidades anteriores, obtenemos el siguiente cuadro :

SIGNOS DE	a	b	c	
	+	−	+	Las dos raíces positivas.
	+	+	+	Las dos raíces negativas.
	+	−	−	Raíces de signos opuestos siendo la mayor positiva.
	+	+	−	Raíces de distintos signos, siendo la menor positiva.

Ejemplos : 1.º Hallar la naturaleza de las raíces de la ecuación $x^2 - 4x + 1 = 0$.

Dado que $b^2 - 4ac = 16 - 4 = 12 > 0$ y $\frac{a}{+}\ \frac{b}{-}\ \frac{c}{+}$, las dos raíces son positivas.

2.º Discutir las raíces de la ecuación $x^2 - 2x + \alpha - 1$, siendo α un parámetro variable.

Para que la ecuación posea raíces reales, es necesario que $b^2 - 4ac > 0 \iff 4 - 4 \cdot 1(\alpha + 1) > 0 \iff$
$4 - 4\alpha - 4 > 0 \Longrightarrow -4\alpha > 0 \Longrightarrow \alpha < 0$.

Como sabemos que $a > 0$, $b < 0$, las posibilidades que quedan son :

$$\frac{a}{+}\ \frac{b}{-}\ \frac{c}{-} \quad \text{y} \quad \frac{a}{+}\ \frac{b}{-}\ \frac{c}{+}$$

para que $c < 0 \Longrightarrow \alpha + 1 < 0$, como $\alpha < 0 \Longrightarrow \alpha$ ha de ser menor que -1,
para que $c > 0 \Longrightarrow \alpha + 1 > 0$, como $\alpha < 0 \Longrightarrow \alpha$ ha de ser mayor que -1.

Resumiendo todas las posibilidades, tenemos :

α	$-\infty$ — -1	-1 — 0	0 — $+\infty$
raíces	x_1 y x_2 de signos opuestos, siendo la mayor positiva	x_1 y x_2 ambas positivas	No existen raíces reales

II) Hallar dos números conocidos su suma y producto.

Sean dos números cualesquiera x e y, cuya suma es S y su producto P, ambos conocidos; se trata de hallar x e y.

Planteamos el siguiente sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

$$\left.\begin{array}{l} x + y = S \\ x \cdot y = P \end{array}\right\}$$; los números son entonces las raíces de la ecuación $x^2 - Sx + P = 0$.

Ejemplo : hallar α para que la ecuación $x^2 - \alpha x + 1 = 0$ posea una raíz doble que la otra.

Si una raíz es $x = x_1$, la otra será $x_2 = 2x_1$, y tendremos :

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 = \frac{\alpha}{1} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{1} \end{array}\right| \left.\begin{array}{l} x_1 + 2x_1 = \alpha \\ x_1 \cdot 2x_1 = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 3x_1 = \alpha ; \alpha = \pm \frac{3}{\sqrt{2}} \\ 2x_1^2 = 1 ; x_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}$$

Lo cual quiere decir que existen dos ecuaciones de segundo grado : $x^2 + \frac{3}{\sqrt{2}}x + 1 = 0$ y $x - \frac{3}{\sqrt{2}}x + 1 = 0$, que verifican el que una raíz sea doble que la otra. Por supuesto, se sobrentiende que las ecuaciones son de la forma $x^2 - x + 1 = 0$.

Ecuación bicuadrada

Se denomina así a una ecuación de cuarto grado, cuyos coeficientes de tercero y primer grado son nulos. La fórmula general de una ecuación bicuadrada es :

$$ax^4 + bx^2 + c = 0.$$

Raíces de una ecuación bicuadrada. — Si hacemos el cambio de variable $x^2 = y$, la ecuación se transforma en : $ay^2 + by + c = 0$, y resolviendo el sistema $\left.\begin{array}{l} ay^2 + by + c = 0 \\ x^2 = y \end{array}\right\}$ obtendremos las raíces de la ecuación $ax^4 + bx^2 + c = 0$.

A cada raíz positiva de la ecuación $ay^2 + by + c = 0$ corresponderán dos valores para x, de signos opuestos.

Consideraremos dos casos en la resolución de la ecuación.

1) $b^2 - 4ac > 0$.

a) La ecuación $ay^2 + by + c = 0$ tiene dos raíces distintas, y_1 e y_2, que serán positivas si $b < 0$ y $c > 0$.

La ecuación $ax^4 + bx^2 + c = 0$ tendrá cuatro raíces :

$x_1 = +\sqrt{y_1}$, $x_2 = -\sqrt{y_1}$, $x_3 = +\sqrt{y_2}$, $x_4 = -\sqrt{y_2}$.

b) Si $b > 0$, $c > 0$, una de las raíces, por ejemplo la y_1, será negativa y lo otra positiva. La ecuación $ax^4 + bx^2 \pm c = 0$ tendrá dos raíces reales, que serán $x_1 = +\sqrt{y_2}$, $x_2 = -\sqrt{y_2}$.

c) Si $b > 0$, $c > 0$, las raíces y_1 e y_2 serán ambas negativas y la ecuación bicuadrada carece de raíces reales.

d) $b > 0$, $c < 0$. El caso es semejante al *b*), pues la ecuación $ay^2 + by + c = 0$ posee una raíz real, por ejemplo la y_1, y las raíces reales de la ecuación bicuadrada serán $x_1 = +\sqrt{y_1}$, $x_2 = -\sqrt{y_1}$.

2) $b^2 - 4ac = 0$.

La ecuación $ay^2 + by + c = 0$ tiene una raíz doble, distinguiéndose los siguientes casos :

a) $b < 0$ la ecuación bicuadrada posee dos raíces dobles.

b) $b > 0$ la ecuación bicuadrada no posee raíces reales.

c) $b = 0 \Longrightarrow c = 0$, y la ecuación bicuadrada $ax^4 + bx^2 + c = 0$ se nos convierte en la $ax^4 = 0$, que posee una raíz cuádruple, la $x = 0$.

PROBLEMAS : 1.º Resolver la ecuación $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$.

La ecuación transformada es la $y^2 - 5y + 4 = 0$ cuyas raíces son :

$$y_1 = \frac{5 + \sqrt{25 - 4 \cdot 4}}{2} = 4; \quad y_2 = \frac{5 - \sqrt{25 - 4 \cdot 4}}{2} = 1.$$

Las raíces de $x^4 - 5x^2 + 4$ serán : $x_1 = +\sqrt{4} = 2$; $x_3 = +\sqrt{1} = 1$; $x_2 = 2$; $x_4 = -1$.

2.º Resolver la ecuación $x^4 - 3x^2 = 0$.

Sacando factor común x^2, se tiene : $x^2(x^2 - 3) = 0 \Longrightarrow x_1 = 0$, $x_2 = 0$; $x^2 - 3 = 0 \Longrightarrow x^2 = 3 \iff x_3 = +\sqrt{3}$, $x_4 = -\sqrt{3}$.

3.º Resolver la ecuación $2x^4 - x^2 + 3 = 0$.

La ecuación transformada $2y^2 - y + 3 = 0$ no posee raíces reales, luego la ecuación bicuadrada tampoco las posee.

Trinomio de segundo grado

Sea el trinomio de segundo grado $ax^2 + bx + c$. **[5]**

Saquemos factor común a obteniendo $a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$, sustituyendo $\frac{b}{a}$ y $\frac{c}{a}$ por sus valores [3] y [4], ya obtenidos, tenemos $a\,[x^2 - (x_1 + x_2) \cdot x + x_1 \cdot x_2] =$
$= ax^2 - a\,(x_1 x + x_2 x) + a x_1 x_2 = ax^2 - a x_1 x - a x_2 x + a x_1 x_2 =$
$ax\,(x - x_1) - a x_2 (x - x_1) = a\,(x - x_1) \cdot (x - x_2)$
$\iff ax^2 + bx + c = a\,(x - x_1)(x - x_2)$. **[6]**

Relación que se conoce como descomposición factorial del trinomio de segundo grado.

Ejemplo : descomponer en factores la ecuación $x^2 - 3x - 10 = 0$.

Las raíces de esta ecuación, que ya hemos resuelto anteriormente, son $x_1 = 5$, $x_2 = -2 \Longrightarrow x^2 - 3x - 10 = (x-5)(x+2)$.

Transformación del trinomio de segundo grado en cuadrado perfecto. — TEOREMA. — *La condición necesaria y suficiente para que un trinomio de segundo grado sea un cuadrado perfecto es que el discriminante del trinomio sea nulo.*

En efecto, si $b^2 - 4ac = 0$, $x_1 = \dfrac{-b+0}{2a} = -\dfrac{b}{2a}$,

$$x_2 = -\frac{b-0}{2a} = -\frac{b}{2a}.$$

Donde se verifica que ambas raíces son idénticas. Descomponiendo el trinomio factorialmente, tenemos :

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) = a(x - x_1)^2 = (\sqrt{a})^2 \cdot (x - x_1)^2 = [\sqrt{a}(x - x_1)]^2.$$

Por otra parte si $ax^2 + bx + c = (mx+n)^2 \Longrightarrow ax^2 + bx + c = m^2x^2 + 2mnx + n^2$.

Igualando los términos del mismos grado se tiene :

$$\left.\begin{array}{l} a = m^2 \\ b = 2mn \\ c = n^2 \end{array}\right\}. \quad \text{Entonces} \quad b^2 = 4m^2n^2; \quad 4ac = 4m^2n^2$$

$\Longleftrightarrow b^2 - 4ac =$ discriminante del trinomio $= 0$.

Transformación y signo del trinomio de segundo grado. — Sea el trinomio de segundo grado, escrito en la forma $y = a\left(x^2 + \dfrac{b}{a}x + \dfrac{c}{a}\right)$. Teniendo en cuenta que x^2 y $\dfrac{b}{a}x$ son los dos primeros términos del desarrollo de $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$, se tendrá : $y = a\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2}{4a^2} + \dfrac{c}{a}\right] =$

$$a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)\right]^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\Bigg].$$

Haciendo $b^2 - 4ac$ mayor, igual o menor que cero, se obtiene a) $b^2 - 4ac > 0$. El trinomio se escribirá

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)^2\right].$$

Si llamamos $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$;

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

nos queda $y = a(x - x_1)(x - x_2)$.

b) Si $b^2 - 4ac = 0$ se tiene $y = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$.

c) Si $b^2 - 4ac < 0$, haciendo $b^2 - 4ac = -K^2$, se tiene $y = a\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 + K^2\right]$.

TEOREMA. — Un trinomio de segundo grado que carece de raíces o que tiene una raíz doble, tiene siempre el signo de su primer término, cualquiera que sea el valor que se le dé a x, excepto para el valor igual a la raíz doble, puesto que este valor anula el trinomio.

En efecto, si el trinomio tiene una raíz doble, se verificará $y = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$.

Ahora bien $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$ es positivo para todo valor de x, excepto para $x = -\dfrac{b}{2a}$ que lo anula; para cualquier otro valor, tiene el signo de a.

TEOREMA. — Un trinomio de segundo grado con dos raíces distintas tiene siempre el signo de su primer término, cualesquiera que sean los valores de x interiores a las raíces, anulándose para los valores de x iguales a las raíces.

En efecto, supongamos que el trinomio posee las raíces x_1 y x_2, entonces se tiene $y = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Supongamos que $x_1 > x_2$, y estudiemos la sucesión $-\infty$, x_2, x_1, $+\infty$.

Si se verifica que $-\infty < x < x_2$ las diferencias $x - x_2$ y $x - x_1$ son negativas; por tanto su producto es positivo, y por consiguiente el signo de y es el mismo que el de a.

Si x verifica que $x_2 < x < x_1$, $x - x_2$ es positivo y $x - x_1$ es negativo. Por tanto su producto $(x - x_1)(x - x_2)$ es negativo y el trinomio tendrá signo contrario al de a.

Si se verifica que $x_1 < x < +\infty$, $x - x_1$ y $x - x_2$ son positivos. Por tanto su producto es positivo, verificándose que a e y son del mismo signo.

Sustituyendo en la expresión $ax^2 + bx + c$, x por un número α cualquiera se obtiene :

1) Si α es un número tal que $af(\alpha) < 0$, el trinomio tiene dos raíces distintas y α está comprendido entre ambas raíces.

En efecto, si $af(\alpha) < 0$, a y $f(\alpha)$ tienen signos contrarios, por tanto el trinomio tiene necesariamente dos raíces distintas, pues de lo contrario $f(\alpha)$ tendría el mismo signo que a. Por otra parte, α está comprendido entre las dos raíces, ya que si fuera exterior a ellas, $af(\alpha)$ sería positivo.

2) Si α y β son dos números reales tales que se verifica que $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$, el trinomio tiene dos raíces distintas, estando comprendida una sola de estas raíces entre α y β.

En efecto, si $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$, podremos escribir $af(\alpha) \cdot af(\beta) < 0$ y uno de los productos $af(\alpha)$ o $af(\beta)$ será evidentemente negativo.

Supongamos por ejemplo que $af(\alpha) < 0$. En virtud de lo anterior, el trinomio tendrá dos raíces distintas y α estará comprendida entre ambas. El otro número β será exterior a las raíces, pues de lo contrario se verificaría que $af(\beta) < 0$ y el producto $af(\alpha) \cdot af(\beta)$ sería positivo, lo cual es contrario a la hipótesis.

Clasificación de un número con respecto a las raíces de una ecuación de segundo grado. — Sea α el número cuya situación se quiere determinar.

Si $f(\alpha) = 0$, α es una raíz de la ecuación.

Supongamos que $f(\alpha) \neq 0$. Formemos entonces el producto $a \cdot f(\alpha)$.

Si $a \cdot f(\alpha) < 0$, la ecuación tiene dos raíces distintas, estando el número α comprendido entre ellas.

Si $a \cdot f(\alpha) > 0$, formaremos el discriminante $b^2 - 4ac$.

Si $b^2 - 4ac > 0$, la ecuación tiene dos raíces distintas x_1, y x_2, y α es exterior a ellas; lo cual quiere decir que α es menor o mayor que ambas raíces.

Para distinguir entre las dos posibilidades, comparamos α con un número comprendido entre las dos raíces, por ejemplo la semisuma de las raíces $-\dfrac{b}{2a}$ verificándose :

$$\text{Si } \alpha < -\frac{b}{2a}, \quad \alpha < x_2 > x_1.$$

$$\text{Si } \alpha > -\frac{b}{2a}, \quad x_2 < x_1 < \alpha.$$

EJERCICIO. — Clasificar 1 con respecto a las raíces de la ecuación $x^2 - 3x + \lambda = 0$:

$$f(1) = -2 + \lambda; \; af(1) = -2 + \lambda.$$

1) Si $1 \cdot f(1) = \lambda - 2$ es < 0, la ecuación tiene dos raíces distintas x_1 y x_2 y se verifica $x_1 < 1 < x_2$.

2) Si $1 \cdot f(1) = 0$, entonces $f(1) = 0$, y $x_1 = 1$, y la otra raíz será $x_2 = -\frac{b}{a} - 1 = 3 - 1 = 2$.

3) Si $1 \cdot f(1) > 0$, existen tres subcasos :

a) $1 \cdot f(1) > 0$, $b^2 - 4ac > 0$. Existen entonces dos raíces distintas. Comparamos 1 con un número cualquiera comprendido entre ambas, por ejemplo la semisuma $-\frac{b}{2} = \frac{3}{2}$; $1 < \frac{3}{2} \implies$ que se verifica que $1 < x_1 < x_2$.

b) $1 \cdot f(1) > 0$ y $b^2 - 4ac = 0$. Existe una raíz doble $x_1 = x_2 = 3/2$.

c) $1 \cdot f(1) > 0$ y $b^2 - 4ac < 0$ no existen raíces reales.

Valores de λ para los anteriores casos :

$f(1) < 0 \implies \lambda - 2 < 0 \implies \lambda < 2.$

$f(1) = 0 \implies \lambda = 2.$

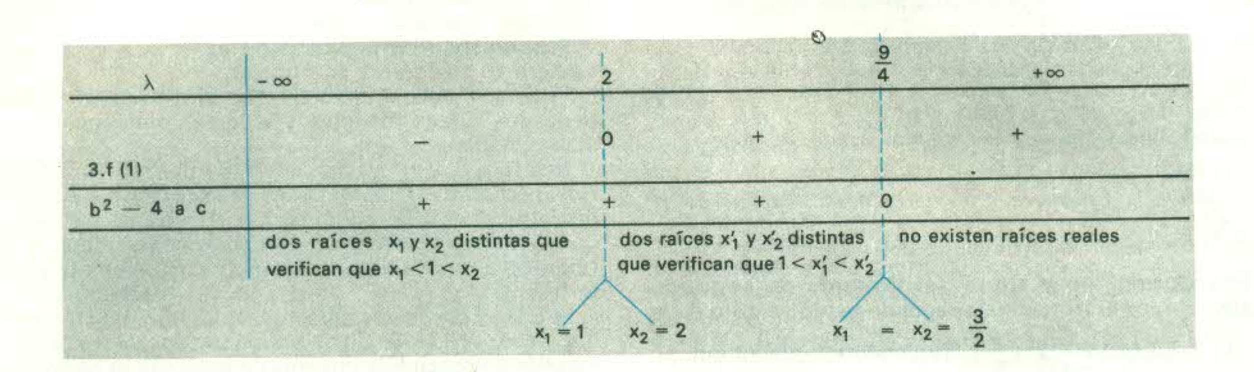
$f(1) > 0 \implies \lambda - 2 > 0 \implies \lambda > 2.$

Si $b^2 - 4ac < 0 \implies 9 - 4\lambda < 0 \implies 9 < 4\lambda$; $\frac{9}{4} < \lambda$.

Si $b^2 - 4ac = 0 \implies \lambda = 9/4.$

Si $b^2 - 4ac > 0 \implies 9 - 4\lambda > 0 \implies 9 > 4\lambda$; $\frac{9}{4} > \lambda$.

Los resultados anteriores los reunimos todos en el siguiente cuadro :



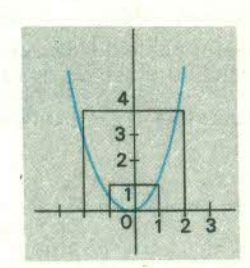
Variación y representación del trinomio de segundo grado. — Primer caso : $y = x^2$.

1) Si $x > 0$, al crecer x también crece y, luego la función $y = x$ es creciente en el intervalo $(0 + \infty)$.

2) Si $x < 0$, al crecer x desde $-\infty$ hasta cero, decrece y, luego la función es decreciente en el intervalo $(-\infty\ 0)$.

La función $y = x^2$ pasa por un mínimo para $x = 0$, cuyo valor es $y = 0$.

Su representación gráfica es inmediata teniendo en cuenta que el eje de las y es un eje de simetría de la misma. La línea o gráfico representación de la función $1 = x^2$ es la de la figura adjunta, que recibe el nombre de *parábola*. (Nos referimos a la línea de trazo grueso.)



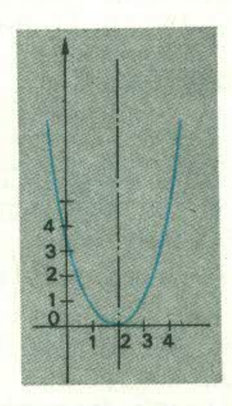
Segundo caso : $y = (x - a)^2$.

Distinguimos dos subcasos.

1) En el intervalo $(-\infty\ a)$ la función es decreciente.

2) En el intervalo $(a + \infty)$ la función es creciente.

Su representación gráfica es sencilla si tenemos en cuenta que la recta $x = 2$ es un eje de simetría :



Como en el caso anterior, obtenemos también una parábola.

Caso general : $y = ax^2 + bx + c$.

Esta ecuación la podemos escribir como :

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c.$$

Considerando el paréntesis como los dos primeros términos del desarrollo del binomio $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$, tenemos :

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c, \quad y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

El cociente $\frac{4ac - b^2}{4a}$ es una constante, puesto que no entra en él la variable x. Luego la función y variará según lo haga la expresión $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$. Analicemos cómo varía esta expresión :

1) Si a es positivo, y varía como la expresión $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$; o sea que decrece en el intervalo $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$ y crece en el intervalo $\left(-\frac{b}{2a} + \infty\right)$. Para $x = -\frac{b}{2a}$, la función pasa por un mínimo que es $y = \frac{4ac - b^2}{4a}$.

2) Si a es negativo, y varía en sentido contrario a como lo hace $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$. O sea es creciente en el intervalo $\left(-\infty - \frac{b}{2a}\right)$ y decreciente en el intervalo $\left(-\frac{b}{2a}, + \infty\right)$.

Tiene un máximo en el punto $x = -\frac{b}{2a}$, $y = \frac{4ac - b^2}{4a}$.

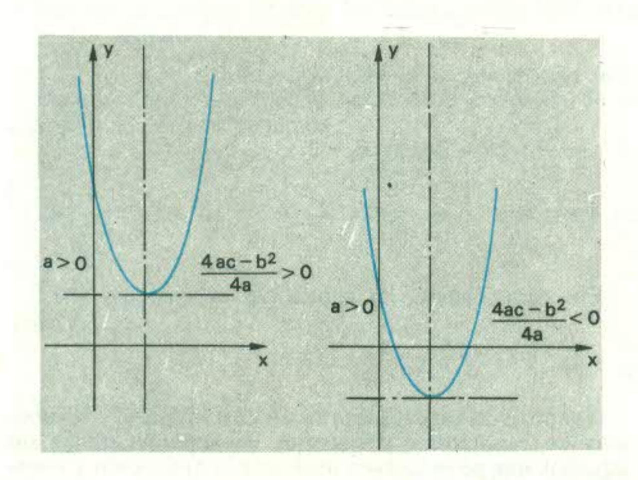
REPRESENTACIÓN GRÁFICA. — La representación gráfica de $y = ax^2 + bx + c$ es siempre una parábola cuyo eje de simetría es la recta $x = -\frac{b}{2a}$.

Los diferentes casos que pueden darse quedan todos expuestos en las figuras 3, 4, 5 y 6.

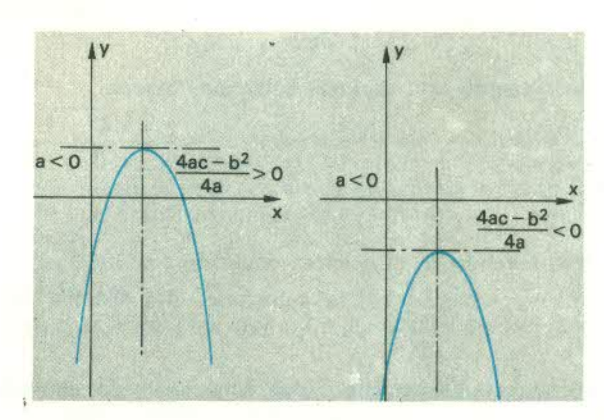
Si observamos las diferentes gráficas representativas de la función $y = ax^2 + bx + c$, vemos que la curva corta al eje de abscisas en dos puntos, uno o ninguno, según que el discriminante del trinomio $b^2 - 4ac$ sea positivo, cero o negativo. Los puntos de intersección de la curva con el eje de las x nos proveen precisamente de las raíces de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$.

La curva nos da inmediatamente el signo del trinomio : si éste no tiene raíces o sólo tiene una, la curva está toda entera a un mismo lado del eje de abscisas, y el trinomio tiene el signo del coeficiente a.

Si el trinomio tiene dos raíces, su signo es el de a para valores de la variable fuera del intervalo de las raíces. Para los valores de x comprendidos en este intervalo, el signo del trinomio es el opuesto al del coeficiente a.

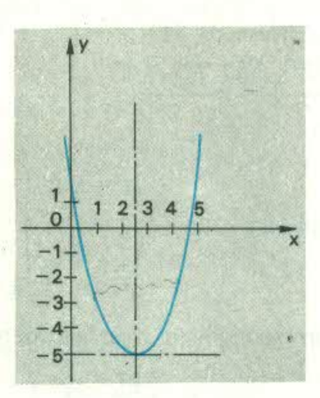


Ejemplo : representar la función $y = x^2 - 5x + 1$.



Dado que $a > 0$, la función decrece en $\left(-\infty - \frac{b}{2a}\right)$ y es creciente en $\left(-\frac{b}{2a} + \infty\right)$.

El mínimo es alcanzado en $x_0 = \frac{5}{2}$, $y = \frac{4ac - b^2}{4a} = -\frac{21}{4}$.



La función es simétrica respecto de la recta $y = \frac{5}{2}$. Para $x = 0$, $y = 1$.

Sistemas de ecuaciones de segundo grado. — Un sistema de ecuaciones es de segundo grado, cuando una de las ecuaciones, como mínimo, posee uno o más términos de segundo grado.

Son ejemplos de dichos sistemas :

$$1) \begin{cases} x_2 + y_2 = 1 \\ x - y - x = 7 \end{cases} ; \quad 2) \begin{cases} x \cdot y = 7 \\ x + y = 5 \end{cases}.$$

Resolución de sistemas de ecuaciones. — Consideraremos los siguientes casos :

I) Sistema formado por una ecuación de segundo grado y otra ecuación de primero.

Para resolverlo se emplea el método de sustitución. Se despeja en la ecuación de primer grado una de las incógnitas, sustituyéndola en la ecuación de segundo grado.

Las soluciones encontradas en la ecuación de segundo grado se sustituyen en la ecuación de primer grado, determinándose así todas las soluciones del sistema.

Ejemplo : resolver el sistema,

$$\left.\begin{array}{l} x+y=5 \\ x\cdot y=6 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x=5-y \\ (5-y)\cdot y=6 \end{array}\right\}.$$

Resolviendo esta segunda ecuación, tenemos :

$$5y-y^2-6=0;\quad y^2-5y+6=0;\quad y=\frac{5\pm\sqrt{25-4\cdot 6}}{2}=\frac{5\pm 1}{2} \begin{cases} y_1=3 \\ y_2=2 \end{cases}.$$

Sustituyendo en la primera ecuación :

$x_1=5-y_1=5-3=2$ Las soluciones del sistema son
$x_2=5-y_2=5-2=3$ $x_1=2,\ y_1=3$ ó $x_2=3,\ y_2=2.$

II) Sistema formado por dos ecuaciones de segundo grado.

Para resolverlo se emplea, si se puede, el método de sustitución.

Ejemplo :

$$\left.\begin{array}{l} x\cdot y=6 \\ x^2+y^2=13 \end{array}\right\} \quad x=\frac{6}{y}.$$

Sustituyendo en esta segunda ecuación, el valor encontrado para x, obtenemos $\left(\frac{6}{y}\right)^2+y^2=13;\ \frac{36}{y^2}+y^2=13;$ $36+y^4=13y^2;\quad y^4-13y^2+36=0.$ Ecuación bicuadrada, que transformada es : $z^2-13z+36=0;$

$$z=\frac{13\pm\sqrt{13^2-4\cdot 36}}{2}=\frac{13\pm 5}{2}\begin{cases} z_1=9 \\ z_2=4 \end{cases}.$$

$$\text{Soluciones para } y: \quad \left.\begin{array}{l} y_1=\pm\sqrt{9} \\ y_2=\pm\sqrt{4} \end{array}\right\} \begin{array}{l} y_1'=+3 \\ y_1''=-3 \\ y_2'=+2 \\ y_2''=-2 \end{array}$$

Los valores correspondientes para la incógnita x, son :

$$\begin{array}{ll} x_1'=2 & x_1''=-2 \\ x_2'=3 & x_2''=-3 \end{array}$$

y las soluciones del sistema serán :

$(x_1'=2,\ y_1'=3),\ (x_1''=-2,\ y_1''=-3),\ (x_2'=3,\ y_2'=2),$ $(x_2''=-3,\ y_2''=-2).$

En algunos casos un sistema de ecuaciones de segundo grado, por aplicación del método de reducción, se puede transformar en un sistema equivalente con una ecuación de primer grado.

Ejemplo : resolver el sistema,

$$\left.\begin{array}{l} x^2-y^2+2y-1=2y \\ x^2-y^2+\ x\quad =26 \end{array}\right\}.$$

Restando miembro a miembro las dos ecuaciones, resulta :

$$\begin{array}{r} x^2+y^2+2y-1=24 \\ x^2-y^2+\ x\quad =26 \\ \hline x-2y+1=2. \end{array}$$

Y el sistema primitivo es equivalente al siguiente :

$$\left.\begin{array}{l} x^2-y^2+x=26 \\ x-2y+1=2 \end{array}\right\} \text{ que ya sabemos como resolver.}$$

$$\left.\begin{array}{l} x^2-y^2+x=26 \\ x=1+2y \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} (1+2y)^2-y^2+3-2y=26 \\ x=1+2y \end{array}\right\}$$

$$\begin{array}{l} 1+4y^2+4y-y^2+1+2y=26 \\ x=1+2y \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} 3y^2+6y-24=0 \\ x=1+2y \end{array}\right\}.$$

La primera que es equivalente a la $3y^2+6y-24=0$, que resuelta da :

$$y=\frac{-2\pm\sqrt{4+32}}{2}=\frac{-2\pm 6}{2}\begin{cases} y_1=2 \\ y_2=-4 \end{cases}.$$ Los correspondientes valores para x, son : $x_1=5,\ x_2=-7$. De los dos conjuntos de soluciones encontradas, los $(x_1=5,\ y_2=2)$, $(x_2=-7,\ y_2=-4)$, sólo el primero satisface el sistema primitivo, o sea la solución es $(x_1=5,\ y_1=2)$.

III) En ocasiones un sistema de ecuaciones de segundo grado puede resolverse mediante artificios de cálculo.

Ejemplos : resolver el sistema,

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x}{x-y}-2\cdot\dfrac{x-y}{x}=1 \\ 3\cdot\dfrac{x}{x-y}+5\dfrac{y-1}{y}=6. \end{array}\right\}$$

Sustituyendo en cada una de las ecuaciones las expresiones $\frac{x}{x-y},\ \frac{y-1}{y}$ por dos nuevas incógnitas u y v, tenemos :

$$u-2\cdot\frac{1}{u}=1; \quad u^2-2-u=0; \quad u=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}\begin{cases} u_1=2 \\ u_2=-1 \end{cases}$$

$$3u+5v=6; \quad v=\frac{6-3u}{5}\begin{cases} v_1=0 \\ v_2=\dfrac{9}{5} \end{cases}.$$

Los correspondientes valores para las incógnitas primitivas x e y, serán : $\frac{y-1}{y}=v;\ y-1=uv;\ y-1-yv=0;$

$$y=\frac{1}{1-v}\begin{cases} y_1=1 \\ y_2=\dfrac{-5}{4} \end{cases}.$$

Por otra parte, si $\frac{x}{x-y}=u$, se tiene :

$$2=\frac{x}{x-1};\ 2x-2=x;\ x_1=2.$$

$$-1=\frac{x}{x+\frac{5}{4}};\ -x-\frac{5}{4}=x;\ 2x=\frac{-5}{4};\ x_2=\frac{-5}{8}.$$

En consecuencia, las soluciones del sistema son :

$$(x_1=2, y_1=1)\quad \left(x_2=-\frac{5}{8}, y_2=-\frac{5}{4}\right).$$

Resolución de problemas de ecuaciones. — Problemas de ecuaciones y sistemas de segundo grado son aquellos que se resuelven mediante la aplicación y consiguiente resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones de segundo grado.

Para resolver este tipo de problemas se procede como a continuación se detalla :

a) Se eligen las incógnitas. En general, se toman como incógnitas las cantidades que se desean calcular.

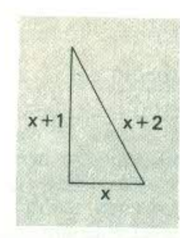
b) Se plantean las ecuaciones. Las relaciones existentes entre los datos y las incógnitas se expresan por medio de ecuaciones. Para plantear éstas, se procede como si las incógnitas fueran conocidas.

c) Se resuelve la ecuación o sistema. Para ello se aplican cualquiera de los métodos ya explicados.

d) Se discuten las soluciones, comprobando si cumplen las condiciones expuestas en el problema.

Ejemplos : 1.° Hallar los lados de un triángulo rectángulo, sabiendo que dichos lados son tres números enteros consecutivos.

Si llamamos x al menor de los lados, el lado intermedio será $x+1$ y el mayor será $x+2$.



Planteamiento : teniendo en cuenta la relación existente entre los lados de un triángulo rectángulo según el teorema de Pitágoras, se tiene :

$$x^2+(x+1)^2=(x+2)^2;\ x^2+x^2+2x+1=x^2+4x+4;$$

$$x^2-2x-3=0;\ x=\frac{2\pm\sqrt{16}}{2}\begin{cases}x_1=3\\ x_2=-1\end{cases}.$$

De las dos soluciones, la única válida es $x_1=3$. En consecuencia los otros números serán 4 y 5.

2.° Un automóvil recorre 1 000 km a una velocidad v desconocida. Si dicha velocidad se incrementa en 20 km/h, el tiempo tardado en recorrer los 1 000 km disminuiría en tres horas. Hallar la velocidad v.

Llamando a la velocidad primitiva v.

Llamando a la velocidad final $v+20$.

Tiempo tardado en recorrer los 1 000 km a la velocidad

$$v\ldots\frac{1\,000}{v}=t.$$

Tiempo tardado en recorrer los 1 000 km a la velocidad

$$v+20\ldots\frac{1\,000}{v+20}=t-3.$$

Planteamiento : aplicando la relación conocida de la cinemática $e=v\cdot t$ tenemos :

$$\left\{\begin{array}{l}1\,000=v\cdot t\\ 1\,000=(v+20)\cdot(t-3)\end{array}\right\}\quad \begin{array}{l}v=\dfrac{1\,000}{t}\\ 1\,000=v\cdot t-3v+20t-60\end{array}$$

$$v=\frac{1\,000}{t}$$

$$1\,000=\frac{1\,000}{t}\cdot t-\frac{3\cdot 1\,000}{t}+20t-60;$$

$$20t^2-60t-3\,000=0.$$

Ecuación de segundo grado, cuyas soluciones son :

$$0=20t^2-60t-3\,000\iff t^2-3t-150=0;$$

$$t=\frac{3\pm\sqrt{9+600}}{2}=\frac{3\pm 24'7}{2}.$$

De las dos soluciones para t, la única válida es la $t=13'85$ horas :

$$v=\frac{1\,000}{13'85}\ \text{km/hora}.$$

3.° Una mercancía manufacturada es vendida por 1 000 pesetas. Hallar el coste de la materia prima sabiendo que la ganancia es exactamente un tanto por ciento sobre dicho coste igual a la mitad del número que nos representa el coste.

Coste de la mercancía ... x.

Ganancia ... $1\,000-x$.

Planteamiento : $1\,000-x=\dfrac{1}{2}x\cdot\dfrac{x}{100}$.

$1\,000-x=\dfrac{x^2}{200}$; $x^2+200x-200{,}000=0$. Ecuación que resuelta nos da para x el valor : $x=358$ ptas.

4.° Dos grifos juntos llenan un depósito en 10 horas. ¿Cuánto tardarán en llenarlo cada uno por separado, si uno tarda 2 horas más que otro?

Llamemos t al tiempo que tarda uno de ellos en llenar el depósito.

En 1 hora los dos grifos llenarán $\dfrac{1}{10}$ de depósito.

En una hora uno de ellos llenará $\dfrac{1}{t}$ de depósito.

En 1 hora el otro llenará $\dfrac{1}{t+2}$ de depósito.

Planteamiento :

$\dfrac{1}{10}=\dfrac{1}{t}+\dfrac{1}{t+2}$; $\dfrac{1}{10}=\dfrac{t+2+t}{t\,(t+2)}$; $t\,(t+2)=(2t+2)\,10$; $t^2+2t=20t+20$; $t^2-18t-20=0$. Ecuación que resuelta, nos da para t el valor : $t=19$ horas.

El otro tarda 21 horas.

5.° Resolver el sistema siguiente :

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{13}{40}\\ x+y=13\end{array}\right\}\quad \left.\begin{array}{l}\dfrac{y+x}{xy}=\dfrac{13}{40}\\ x+y=13\end{array}\right\}\quad \left.\begin{array}{l}40\,(y+x)=13\times y\\ x=13-y\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}40\,(y+13-y)=13\,y\,(13-y)\\ x=13-y\end{array}\right\}$$

$\left.\begin{array}{l}520=13\,y^2-169\,y\\ x=13-y\end{array}\right\}$; ecuación que resuelta nos da

$$y=\begin{cases}y_1=8\\ y_2=5\end{cases}\Longrightarrow\begin{array}{l}x_1=5\\ x_2=8\end{array}$$

Las soluciones del sistema son, pues, $x=5$, $y=8$.

6.° Un padre reparte 100 ptas entre sus hijos. Si tuviese un hijo más, recibirían 5 ptas menos cada uno. ¿Cuántos hijos tiene ese padre?

Sea x el número de hijos.

El dinero recibido por cada hijo será ... $\dfrac{100}{x}$.

Si hubiese un hijo más ... $x+1$, el dinero recibido sería : $\dfrac{100}{x+1}$.

Planteamiento : $\frac{100}{x}=\frac{100}{x+1}+5.$

$\frac{100}{x}=\frac{5x+5+100}{x+1}$; $100(x+1)=105x+5x^2$;
$5x^2+5x-100=0$. Ecuación que resuelta nos da para x el valor $x_1=4$.

Son, por tanto, 4 hijos.

7.° El área de un rectángulo es 100 m². Si su longitud creciese en 2 metros y su altura en 1 metro, el área crecería en 50 m². Hallar las dimensiones del rectángulo.
Sea x la longitud del rectángulo.
Sea y la altura del mismo.

Planteamiento : $\left.\begin{array}{l} x\cdot y=100 \\ (x+2)\cdot(y+1)=150 \end{array}\right\}$

$\left.\begin{array}{l} x\cdot y=100 \\ (x+2)(y+1)=150 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} x=\frac{100}{y} \\ xy+x+2y+2=100 \end{array}\right|$

$\left.\begin{array}{l} x=\frac{100}{y} \\ 100+\frac{100}{y}+2y+2=150 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} x=\frac{100}{y} \\ \frac{100}{y}+2y-48=0. \end{array}\right|$

$x=\frac{100}{y}.$

$\left.2y^2-48y+100=0;\ y^2-24y+50=0\right\}$;

$$y=\frac{24\pm\sqrt{24^2-200}}{2} \qquad y \begin{cases} y_1=21'7 \\ y_2=\ 2'3 \end{cases}.$$

Sustituyendo los valores encontrados para y en la ecuación $x=\frac{100}{y}$, encontramos : $x_1=4'6$ metros, $x_2=43'5$ metros. En consecuencia, existen dos soluciones, o, lo que es lo mismo, dos rectángulos que verifican las condiciones del problema :

$(x_1=4'6\,m,\ y_1=21'7\,m)$ $\quad (x_2=43'5\,m\cdot,\ y_2=2'3\,m\cdot)$.

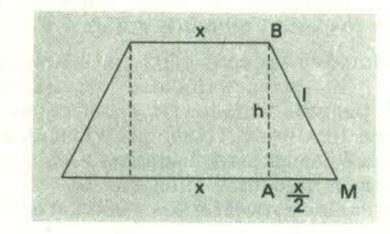
8.° Hallar un número que, aumentado en el triple de su raíz cuadrada, dé 88.
$x+3\sqrt{x}=88$; $x-88=3\sqrt{x}$; elevando al cuadrado los dos miembros de la ecuación : $x^2-176x+88^2=9x$; $x^2-185x+7744=0$, ecuación que resuelta, nos da la solución $x=64$.

9.° Calcular la altura de un trapecio isósceles sabiendo que su base mayor es igual al doble de la base menor, su perímetro 28 m y su área 36 m².

Sea x la base menor y h la altura del trapecio. El lado oblicuo vendrá dado entonces por $h^2+\frac{x^2}{4}$, según deducimos de la aplicación del teorema de Pitágoras al triángulo AMB.
El perímetro del trapecio es ... $x+2x+2\ell=28$.
El área del trapecio es .... $\frac{x+2x}{2}\cdot h=36$.
Y el planteamiento será :

$\left.\begin{array}{l} x+2x+2\ell=28 \\ \frac{x+2x}{2}\cdot h=36 \\ \ell^2=h^2+\frac{x^2}{4} \end{array}\right\}$ que reducidas son $\begin{array}{l} 3x+2\ell=28 \\ \frac{3x}{2}\cdot h=36 \\ 4\ell^2=4h^2+x^2 \end{array}$

Sistema que resuelto nos provee de las soluciones :
$(x=6,\ h=4,\ \ell=5)$.





12. - Combinatoria

Variaciones. Permutaciones. Combinaciones. Número de elementos de $C_{m,n}$. Propiedades de los números combinatorios. Desarrollo de un binomio. *Fórmula de Newton.* Triángulo de Pascal. — **Progresiones aritméticas y geométricas :** Progresión aritmética. Expresión del término general. Suma de los términos equidistantes de una progresión aritmética. Suma de los *n* primeros términos. Interpolación de términos. Progresión geométrica. Expresión del término general. Producto de dos términos equidistantes. Producto de los *n* primeros términos de una progresión geométrica. Suma de los *n* primeros términos. Suma de una progresión geométrica decreciente. Interpolación.

El análisis combinatorio, que incluye el estudio de las *variaciones, permutaciones* y *combinaciones,* trata de la determinación del número de posibilidades lógicas de algún suceso sin enumerar necesariamente cada caso en que pueda aparecer dicho suceso.

Variaciones. — Supongamos que se nos plantea el problema de, dados cuatro colores diferentes {blanco, rojo, negro, amarillo} (*b, r, n, a*), formar todas las banderas de 3 colores diferentes que podamos, teniendo en cuenta que una bandera se diferencie de otra, bien en un color, o en el orden de colocación de los colores.

Para su determinación procederíamos así : como primer color escogeríamos uno cualquiera de los cuatro *b, r, n, a*; como segundo color escogeríamos cada uno de todos los restantes, excepto el primero; como tercer color elegiríamos cada uno de los dos restantes.

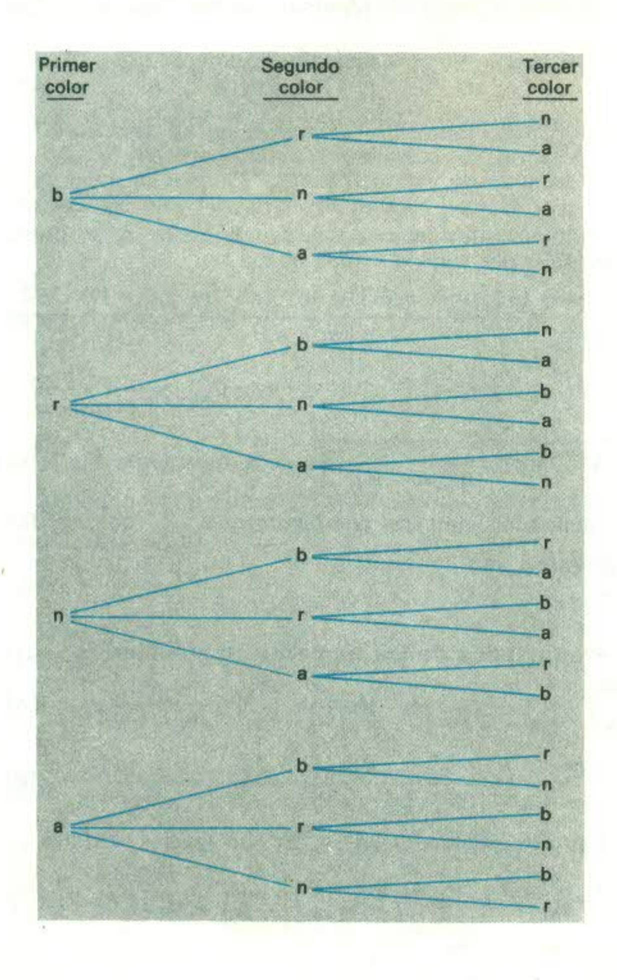
Como podemos observar, el proceso de formación ha sido sencillo; todo ha consistido en ir añadiendo a un color inicial los restantes y seguir con este proceso.

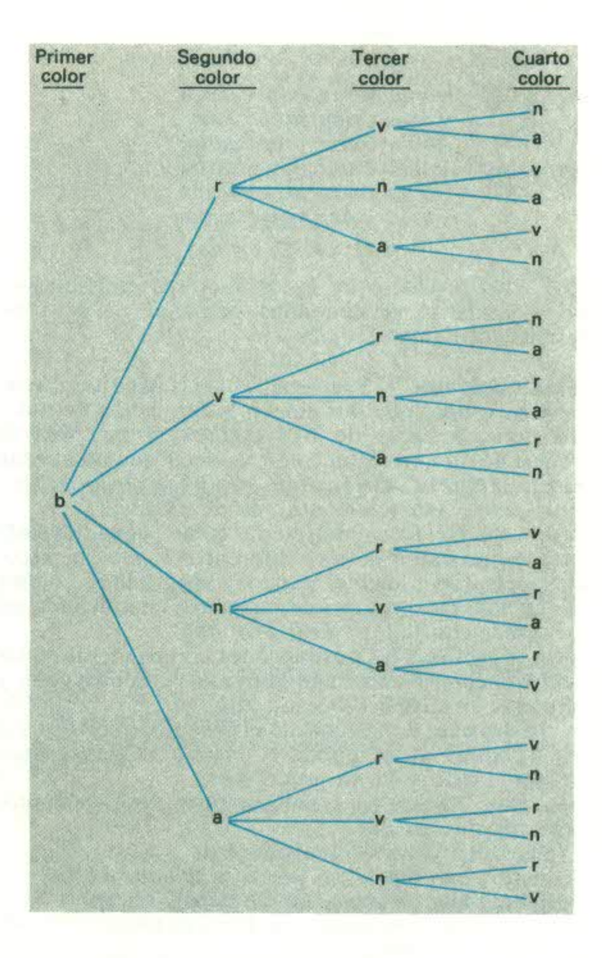
El número de banderas también es inmediato. Para hallarlo, hemos de tener en cuenta que a partir de cada color inicial (en número de 4) hemos ido formando 3 combinaciones, obteniendo un total de

$$4 \cdot 3 = 12 \text{ combinaciones de dos colores.}$$

Las combinaciones de 3 colores las hemos obtenido a partir de cada una de las de 2, a las que hemos añadido $4 - 2 = 2$ colores. En total habremos obtenido $12 \cdot 2 = 24$ banderas diferentes.

Si en vez de 4 hubiésemos tenido 5 colores {blanco, rojo, verde, negro, amarillo}, las banderas diferentes tomando 4 colores para cada una, las expresaríamos mediante un diagrama en árbol de la forma siguiente :





Tomando los demás colores como iniciales, obtendríamos todas las banderas posibles.

Para hallar el número total de banderas que hemos obtenido, observemos que de cada color primitivo salen un total de $4 \cdot 3 \cdot 2$ banderas; como hay 5 colores iniciales, el número total de banderas obtenido será $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$.

En general, si tenemos m elementos y queremos formar todos los grupos que se puedan con esos m elementos, entrando n de ellos en cada grupo, de tal manera que un grupo se diferencie de otro bien en algún elemento o en el orden de colocación de dichos elementos, su número será :

$$m \cdot (m-1) \cdot \ldots\ldots \cdot (m-n\ 1).$$

Así podemos establecer la siguiente definición : *se llaman* variaciones *de* m *elementos tomados de* n *en* n, *a todos los grupos que podemos formar con esos* m *elementos, entrando* n *en cada uno de ellos, de tal forma que un grupo se diferencie de otro en algún elemento o en el orden de colocación, si son los mismos.*

Su número es $V_{m,n} = m \cdot (m-1) \cdot \ldots \cdot (m-n\ 1)$.

Permutaciones. — *Dados* m *elementos diferentes, se llaman* permutaciones *de* m, *a los diferentes grupos que se puedan formar con dichos* m *elementos, entrando* m *en cada uno de ellos, de tal forma que un grupo se diferencie de otro en el orden de colocación.*

Su número es inmediato, pues de la misma definición se deduce que :

$$P_m = V_{m,m} = m \cdot (m-1) \ldots (m-m+1) = m \cdot (m-1) \cdot \ldots 3.2.1. = m!$$

Ejemplo : escribir todas las permutaciones que se puedan formar con las letras de la palabra *roma :*

roma orma maro amor
roam oram maor amro
ramo oarm mora aomr
raom oamr moar aorm
rmao omra mrao armo
rmoa omar mroa arom

$$P_4 = 4! = 4.3.2.1 = 24.$$

NOTA : El producto de los p factores consecutivos desde p hasta 1, se denomina *factorial* de p, y se representa mediante el signo $p!$

Combinaciones. — Supongamos el primer ejercicio de las banderas, pero que nos exigen la formación de todas las banderas posibles de tres colores, y que una se diferencie de otra en algún color; es decir que no puedan coexistir en el resultado final las banderas *rbn*, *rnb*, *bnr*, *brn*, *nrb*, *nbr*, sino solamente una de ellas.

El proceso de formación sería como sigue : habida cuenta de que hay 4 colores diferentes *b*, *r*, *n*, *a*, escogeríamos en primer lugar el blanco, y añadiríamos colores hasta completar los tres que necesitamos, continuando así hasta acabar con todos : *brn*, *bra*, *bna*.

Una vez agotadas las posibilidades con banderas en las que entre el color blanco, empezaríamos con otro color y seguiríamos el mismo proceso : *rna*.

En nuestro caso se ha acabado el proceso, puesto que al haber 4 colores y no poner el blanco en los grupos siguientes, existe sólo un grupo más.

Ejercicio : formar las combinaciones de 5 elementos tomados de dos en dos.

Sean *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, esos elementos.
Elementos que empiezan por *a* : *ab*, *ac*, *ad*, *ae*.
Elementos que empiezan por *b* : *bc*, *bd*, *be*.
Elementos que empiezan por *c* : *cd*, *ce*.
Elementos que empiezan por *d* : *de*.
Elementos que empiezan por *e* : ninguno.

Número de elementos de $C_{m,n}$. — Para hallar el número de elementos de $C_{m,n}$, vamos a observar el proceso de formación de $V_{4,3}$:

abc abd acd bcd
acb adb adc bdc
bca bda cad dcb
bac bad cda dbc
cab dab dac cbd
cba dba dca cdb.

Las cabeceras de columnas forman las combinaciones de las letras *a*, *b*, *c*, *d*, tomadas de 3 en 3, y las columnas son las permutaciones de 3.

El número total de elementos del cuadro sabemos que es $V_{4,3}$, con lo que tenemos :

$$V_{4,3} = P_3 \cdot C_{4,3} \implies C_{4,3} = \frac{V_{4,3}}{P_3}.$$

De igual manera deducimos para $C_{4,2}$:

ab ac ad bc bd cd
ba ca da cb db dc.

Las cabeceras de columnas son las combinaciones de 4 elementos tomadas de 2 en 2; las columnas son las permutaciones de 2 elementos, y el número total de elementos es $V_{4,2}$; por lo tanto podemos escribir :

$$V_{4,2} = P_2 \cdot C_{4,2} \implies C_{4,2} = \frac{V_{4,2}}{P_2}.$$

En general, siguiendo idéntico proceso, llegaríamos a la fórmula $C_{m,n} = \dfrac{V_{m,n}}{P_n}$; teniendo en cuenta que

$V_{m,n} = m\,(m-1) \ldots (m-n+1)$ y $P_n = n!$;

$$C_{m,n} = \frac{m\,(m-1) \ldots (m-n+1)}{n!}.$$

Multiplicando numerador y denominador de la última expresión por $(m-n)!$, nos queda :

$$\frac{m \cdot (m-1) \ldots (m-n+1) x\, (m-n) \cdot (m-n-1) \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1}{n!(m-n)!}$$

$$= C_{m,n} = \frac{m!}{n!\,(m-n)!}.$$

Al número $\dfrac{m!}{n!\,(m-n)!}$ que nos representa $C_{m,n}$, se le denomina *número combinatorio* $\dbinom{m}{n}$, que se lee « m sobre n ».

Propiedades de los números combinatorios. — 1) $\dbinom{m}{n} = \dbinom{m}{m-n}$. En efecto, $\dbinom{m}{n} = \dfrac{m!}{(m-n)!n!}$ **[A]**

y : $\dbinom{m}{m-n} = \dfrac{m!}{[m-(m-n)]!(m-n)!} = \dfrac{m!}{n!\,(m-n)!}$ **[B]**

Las dos igualdades [A] y [B] son iguales, c.q.d.

2) $\dbinom{m}{m} = 1$. En efecto $\dbinom{m}{m} = \dfrac{V_{m \cdot m}}{P_m} = \dfrac{m!}{m!} = 1.$

3) $\dbinom{m}{0} = \dbinom{m}{m-0} = 1.$

Como consecuencia de esta propiedad, deducimos que $0! = 1$, puesto que $\binom{m}{0} = 1 = \frac{m!}{0!(m-0)!} = \frac{m!}{0!m!} = \frac{1}{0!} \cdot \frac{m!}{m!}$ ahora bien, este producto de dos factores es igual a $1 \cdot \frac{1}{0!} \cdot 1 = 1$, lo cual implica que cada uno de los factores ha de ser 1, o sea, $\frac{1}{0!} = 1 \implies 0! = 1$.

4) $\binom{0}{0} = 1$, puesto que $\binom{0}{0} = \frac{0!}{0!0!} = \frac{1}{1 \cdot 1} = 1$.

5) $\binom{m+1}{n} = \binom{m}{n} + \binom{m}{n-1}$.

En efecto, sumemos $\binom{m}{n} + \binom{m}{n-1} = \frac{m!}{n!(m-n)!} + \frac{m!}{m![m-(n-1)]!} = \frac{m!}{n!(m-n)!} + \frac{m!}{(n-1)!(m-n+1)!}$.

Multiplicando la primera fracción por $\frac{m-n+1}{m-n+1}$ y la segunda por $\frac{n}{n}$, las dos fracciones poseerán igual denominador, y $\frac{m!}{n!(m-n)!(m-n+1)} + \frac{m!n}{(n-1)!n\,(m-n+1)!} = \frac{m!(m-n+1)}{(m-n+1)!n!} + \frac{m!n}{n!(m-n+1)!} = \frac{m!(m-n+1+n)}{n!(m-n+1)!} = \frac{(m+1)!}{m!(m+1-n)!} = \frac{(m+1)!}{n![(m+1)-n]!} = \binom{m+1}{n}$.

Desarrollo de un binomio. — *Fórmula de Newton.* — En el capítulo 2 ya estudiamos el principio de inducción matemática. Nuestro propósito es mostrar la fórmula de Newton, a través de este principio.

Dicha fórmula dice :

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \ldots + \binom{n}{i} a^{n-i} b^i + \ldots + \binom{n}{n} a^0 b^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i.$$

Para demostrarla, veamos que dicha fórmula se cumple para $n = 2$:

$$(a+b)^2 = \binom{2}{0} a^2 b^0 + \binom{2}{1} a^1 b^1 + \binom{2}{2} a^0 b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

En efecto, dicha fórmula se verifica puesto que como ya sabemos $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Supongamos el teorema cierto para $n-1$:

$$(a+b)^{n-1} = \binom{n-1}{0} a^{n-1} b^0 + \binom{n-1}{1} a^{n-2} b + \ldots + \binom{n-1}{n-2} a^1 b^{n-2} + \binom{n-1}{n-1} a^0 b^{n-1}.$$

Multiplicando los dos miembros de la anterior expresión por $(a+b)$ queda : $(a+b)^{n-1} \cdot (a+b) =$

$$\binom{n-1}{0} a^{n-1} b^0 a + \binom{n-1}{0} a^{n-1} b^0 b + \binom{n-1}{1} a^{n-2} b^1 a + \binom{n-1}{1} a^{n-2} b^1 b + \binom{n-1}{2} a^{n-3} b^2 a + \binom{n-1}{2} a^{n-3} b^2 b + \ldots + \binom{n-1}{n-2} a^1 b^{n-2} a + \binom{n-1}{n-2} a^1 b^{n-2} b + \binom{n-1}{n-1} a^0 a b^{n-1} + \binom{n-1}{n-1} a^0 b^{n-1} b,$$

que reorganizamos para sumar de la siguiente manera :

$$(a+b)^n = \binom{n-1}{0} a^n \cdot b^0 + \binom{n-1}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n-1}{2} a^{n-2} b^2 + \ldots + \binom{n-1}{n-2} a^2 b^{n-2} + \binom{n-1}{n-1} a \cdot b^{n-1}$$
$$+ \binom{n-1}{0} a^{n-1} b^1 + \binom{n-1}{1} a^{n-2} b^2 + \ldots + \binom{n-1}{n-3} a^2 b^{n-2} + \binom{n-1}{n-2} a \cdot b^{n-1} + \binom{n-1}{n-1} a^0 b^n.$$

Sumando los términos de cada columna, y teniendo en cuenta que : $\binom{n-1}{0} = \binom{n}{0}$; $\binom{n-1}{n-1} = \binom{n}{n}$; $\binom{m-1}{n-1} + \binom{m-1}{n} = \binom{m}{n}$, se tiene : $(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 +$

$$a^{n-1} b^1 \left[\binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{0}\right] + a^{n-2} b^2 \left[\binom{n-1}{2} + \binom{n-1}{1}\right] + \ldots + a^2 b^{n-2} \left[\binom{n-1}{n-2} + \binom{n-1}{n-3}\right] + ab^{n-1} \left[\binom{n-1}{n-2} + \binom{n-1}{n-1}\right] + a^0 b^n \binom{n}{n} = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \ldots + \binom{n}{n-1} a^1 b^0 + \binom{n}{m} a^0 b^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{m}{i} a^{m-i} b^i.$$

Ejemplo : desarrollar $(1+x)^4$,

$$(1+x)^4 = \binom{4}{0} 1^4 x^0 + \binom{4}{1} 1^3 x + \binom{4}{2} 1^2 x^2 + \binom{4}{3} 1 x^3 + \binom{4}{4} x^4 = 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4.$$

Hay que tener en cuenta las siguientes propiedades del desarrollo de $(a+b)^n$.

1) Hay $n+1$ términos.

2) La suma de los exponentes de a y b en cada término es n.

3) El coeficiente del término de lugar k es $\binom{n}{k-1}$ y los exponentes de a y b son respectivamente $[n-(k-1)]$ y $k-1$.

4) Los coeficientes de los términos que equidistan de los extremos son iguales.

Esta propiedad se basa en la fórmula $\binom{m}{k} = \binom{m}{m-k}$.

5) Haciendo $a = b = 1$ en el desarrollo del binomio obtenemos : $(a + b)^n = (1 + 1)^n = 2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} +$

$$\binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}.$$

Para todo número natural n.

6) De la fórmula que nos da el desarrollo de $(a + b)^n$, si hacemos que b sea un número negativo, encontramos el desarrollo de una diferencia.

$$(a - b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1}(-b)^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \ldots + \binom{n}{n} a^0 (-b)^n.$$

Ejemplo : $(a - b)^3 = \binom{3}{0} a^3 + \binom{3}{1} a^2 + (-b)^1 + \binom{3}{2} a^2 (-b)^2 + \binom{3}{3} (-b)^3 = a^3 - 3a^2 b + 3ab^2 - b^3.$

7) Haciendo $a = 1$, $b = -1$, obtenemos :

$$(1 - 1)^n = 0 = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \ldots \pm \binom{n}{n} \iff \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \ldots + = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \ldots + .$$

Es decir, la suma de los números combinatorios de lugar par es igual a la suma de los de lugar impar.

Triángulo de Pascal. — Los coeficientes de las potencias sucesivas de $(a + b)^n$ pueden organizarse en una disposición triangular de números, llamada *triángulo de Pascal*, como sigue :

$$(a + b)^0 = 1$$
$$(a + b)^1 = a + b$$
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4ab^3 + b^4$$
$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4 b + 10a^3 b^2 + 10a^2 b^3 + 5ab^4 + b^5$$
$$(a + b)^6 = a^6 + 6a^5 b + 15a^4 b^2 + 20a^3 b^3 + 15a^2 b^4 + 6ab^5 + b^6$$

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

El triángulo de Pascal tiene las siguientes propiedades :
1) El primero y último número de cada fila son 1.
2) Todo número del conjunto es suma de los que están situados encima de él y a cada lado del mismo.
Ahora bien, puesto que los números que aparecen en el triángulo de Pascal son los coeficientes binómicos, podemos escribir dicho triángulo como sigue :

$$\binom{0}{0}$$
$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{0}$$
$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$
$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$
$$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$
$$\binom{n}{0} \quad \binom{n}{1} \quad \binom{n}{n-1} \quad \binom{n}{n}$$

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

EJERCICIOS. — 1.° Supongamos que la placa de matrícula de un automóvil contiene dos letras seguidas de cuatro dígitos, con el primer dígito distinto de 0. Hallar el número de matrículas diferentes que pueden obtenerse.

Solución : teniendo en cuenta que la primera letra así como la segunda, pueden imprimirse de 27 maneras diferentes cada una, que el primer dígito puede imprimirse de 9 maneras, y que cada uno de los 3 dígitos restantes pueden imprimirse de 10 maneras, el número total de matrículas será : $27 \cdot 27 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 6\,561\,000$.

2.° De cuántas maneras pueden organizarse 8 personas : *a*) en una fila de 8 asientos, y *b*) alrededor de una mesa.

Respuesta *a*) En una fila de 8 asientos, podrán organizarse de 8! maneras $= 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

b) Si es una mesa redonda no hay ninguna posición privilegiada respecto de las demás. De esta manera, sentada una persona en cualquier sitio, las otras podrán disponerse de 7! maneras.

3.° Se trata de saber : *a*) de cuántas maneras pueden sentarse 4 niños y 3 niñas en una fila, *b*) de cuántas maneras pueden sentarse en una fila si los niños y las niñas deben sentarse juntos, y *c*) de cuántas maneras pueden sentarse en una fila si solamente las niñas deben sentarse juntas.

Respuesta *a*) Si pueden sentarse en cualquier posición, el número de maneras diferentes de hacerlo será 7!

b) Formaremos dos grupos : uno de niños y otro de niñas. Por otra parte, cada grupo puede disponerse de 4! y 3! maneras respectivamente. En total, el número de maneras diferentes de sentarse será $2 \cdot 4!3! = 288$.

c) Si sólo las niñas pueden sentarse juntas, formarán un bloque que puede disponerse de 3! maneras diferentes. Los niños, a su vez, pueden sentarse de 4! maneras diferentes. Pero además los niños, al sentarse con respecto a la posición de las niñas, pueden hacerlo de las siguientes maneras : FFFMMMM, MFFFMMM, MMFFFMM, MMMFFFM, MMMMFFF, donde cada F representa una niña y la M un niño.

En definitiva el número total de maneras de sentarse será 3! 4! 5.

4.° De cuántas maneras pueden colocarse en una estantería 3 libros de Física, 5 de Filosofía, y 4 de Historia, de tal manera que todos los libros sobre la misma disciplina estén juntos.

Respuesta : con cada una de las disciplinas, vamos a formar un bloque de libros, en total hay 3 bloques de libros que podrán colocarse de 3! maneras. Ahora bien, los libros de Física pueden disponerse de 3! maneras, los de Filosofía de 5! maneras y los de Historia de 4! En total, el número de maneras diferentes de colocación será :

$$3! \cdot 3! \cdot 5! \cdot 4! = 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 103{,}680.$$

5.° De cuántas maneras puede formarse un comité de 3 hombres y 3 mujeres a partir de 7 hombres y 6 mujeres.

Respuesta : en este problema, hemos de tener en cuenta que el orden en el conjunto final del comité, no importa. Es decir, si A, B, C, D, E, F, son las personas del comité, éste es el mismo con la disposición B, A, C, D, E, F.

Así comprendido, el número de hombres distintos que podemos escoger será $\binom{7}{3}$, y de mujeres $\binom{6}{3}$. Y el total de comités distintos será $\binom{7}{3} \cdot \binom{6}{3} = 700$.

6.° Una bolsa contiene 7 bolas blancas y 5 bolas negras. Hallar el número de maneras en que se pueden sacar 4 bolas de la bolsa si : *a*) pueden ser de cualquier color; *b*) 2 deben ser blancas y 2 deben ser negras, y *c*) todas deben ser del mismo color.

Respuesta : *a*) El color no importa, por tanto podemos considerar 11 bolas. Tampoco la disposición, pues las bolas son todas iguales, luego la respuesta es $\binom{12}{4}$.

b) Las dos bolas blancas pueden escogerse de $\binom{7}{2}$ maneras y las dos negras de $\binom{5}{2}$. En total podemos escoger dos blancas y dos negras de

$$\binom{7}{2} \times \binom{5}{2} = 210 \text{ maneras.}$$

c) De sacar 4 bolas blancas hay $\binom{7}{4}$ maneras, y de sacar 4 negras hay $\binom{5}{4}$ maneras. El número total de sacar 4 bolas del mismo color será

$$\binom{7}{4} + \binom{5}{4} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4}{4 \times 3 \times 2} + 5 = 40 \text{ maneras.}$$

7.° Se tienen 8 puntos en un plano, de tal manera que tres de ellos no están alineados : *a*) cuántas rectas se pueden determinar por dichos puntos; *b*) cuántas de estas rectas pasan por un punto determinado A_0; *c*) cuántos triángulos determinan dichos puntos; *d*) cuántos de estos triángulos contienen al punto A_0 como vértice.

Respuestas : *a*) Dado que dos puntos determinan una línea, se tiene : número de líneas $= \binom{8}{2} = 28$ líneas.

b) Fijado A_0, podemos trazar líneas a cualesquiera de los restantes puntos, por tanto pasarán por A_0, $8 - 1 = 7$ líneas.

c) Puesto que tres puntos determinan un triángulo, el número total de triángulos será $\binom{8}{3}$.

d) La pregunta se puede contestar a través de ¿cuántos triángulos hay que no contengan el punto A? Dichos triángulos son $\binom{7}{3}$, y por lo tanto habrá $\binom{8}{3} - \binom{7}{3}$ triángulos que no lo contengan.

8.° Cuántas diagonales tiene un polígono regular de *n* lados.

Respuesta : desde un vértice del polígono se pueden trazar diagonales a todos los demás excepto los dos adyacentes. Como hay *n* vértices, pasarán por ellos $n(n-3)$ diagonales.

Como cada diagonal está determinada por dos vértices, habrá un total de $\frac{n \cdot (n-3)}{2}$ diagonales.

9.° Dado un conjunto A de *n* elementos, hallar el número de subconjuntos de dicho conjunto.

Si A tiene *n* elementos, el número de subconjuntos que podremos formar con :

0 elementos ... es 1 subconjunto $= \binom{n}{0}$

1 elemento ... son *n* subconjuntos $= \binom{n}{1}$

2 elementos ... son $\binom{n}{2}$ subconjuntos $= \binom{n}{2}$

.
.
.

n elementos ... son $\binom{n}{n}$ subconjuntos $= \binom{n}{n}$.

En total habrá $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$ subconjuntos.

10.° Desarrollar por la fórmula de Newton $\left(x - \frac{1}{x^2}\right)^3$:

$$\left(x - \frac{1}{x^2}\right)^3 = \binom{3}{0}x^3 - \binom{3}{1}x^2 \cdot \frac{1}{x^2} + \binom{3}{2}x \cdot \left(\frac{1}{x^2}\right)^2 - \binom{3}{3}\left(\frac{1}{x^2}\right)^3 = x^3 - 3 + \frac{3}{x^3} - \frac{1}{x^6}.$$

11.° Calcular el lugar que ocupa el término de cuarto grado en el desarrollo de $\left(x^3+\frac{1}{x}\right)^8$ y hallar su coeficiente. El término será $\binom{8}{k}(x^3)^{8-k}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^k$ y sabemos que $(x^3)^{8-k}\cdot\frac{1}{x^k}=x^4$; $x^{24-3k}\cdot\frac{1}{x^k}=x^4$; $x^{24-4k}=x^4$ $\Longleftrightarrow$ $24-4k=4$; $k=5$ y el término será : $\binom{8}{5}(x^3)^3\left(\frac{1}{x}\right)^5=56x^4$.

12.° El término cuarto del desarrollo de $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^n$ es de grado 1. Hallar n.
Si es el término de lugar 4, dicho será $\binom{4}{3}(x^2)^{n-3}\left(\frac{1}{x}\right)^3$; $(x^2)^{n-3}\cdot\frac{1}{x^3}=x$; $x^{2n-6}\cdot x^{-3}=x$; $x^{2n-9}=x'$; $2n-9=1 \Longrightarrow n=5$.
El binomio está elevado, pues, a la quinta potencia, y el cuarto término es $\binom{5}{3}x=10x$.

Progresiones aritméticas y geométricas

Aunque más tarde estudiaremos con más detenimiento la noción y propiedades de las sucesiones, vamos a dar ahora una idea para poder abordar el estudio tanto de las progresiones aritméticas como de las geométricas.

DEFINICIÓN. — Se llama sucesión a una aplicación del conjunto N de los números naturales, en el conjunto R de los números reales.

N		R
1	$\longrightarrow$	a_1
2	$\longrightarrow$	a_2
3	$\longrightarrow$	a_3
4	$\longrightarrow$	a_4
.		
.		
.		
.		
n	$\longrightarrow$	a_n
:		

Se acostumbra representar una sucesión de la forma

$$a_1, a_2, \ldots, a_n \ldots$$

o abreviadamente (a_n).

El término a_n, puede estar dado en función del número natural n, en cuyo caso, cualquier término de la sucesión puede formarse a partir del término general. Ejemplo : en la sucesión $a_n=\sqrt{n^2+1}$, el término de lugar 20 será $a_{20}=\sqrt{20^2+1}=\sqrt{401}$ etc.

Progresión aritmética. — Es una sucesión de numeros reales, cuyo término general es de la forma $a_n=An+b$, donde A y b son dos números reales constantes.

Por ejemplo, la sucesión (a_n), $a_n=2n-1$ es aritmética, y sus primeros términos son : 1, 3, 5, 7, ...

PROPIEDAD FUNDAMENTAL. — *La diferencia entre dos términos consecutivos de una progresión aritmética es constante e igual al coeficiente de* n *en la expresión que nos da el término general.*

En efecto, dados los términos a_n y a_{n-1}, $a_n=An+b$, $a_{n-1}=A(n-1)+b$, si los restamos resulta :

$$a_n=An+b$$
$$a_{n-1}=An+b-A$$
$$a_n-a_{n-1}=A$$

El coeficiente A, que nos da la diferencia entre cualesquiera dos términos consecutivos de la sucesión $a_n=An+b$, se llama *razón* de dicha progresión.

Consecuentes con la propiedad fundamental, podemos dar una nueva definición de progresión aritmética, diciendo que es una sucesión (a_n), tal que la diferencia entre dos términos consecutivos cualesquiera de la misma, sea una constante.

El número real A, que nos da la razón de la progresión, lo escribiremos de aquí en adelante con la letra q. Así pues, el término general será $a_n=qn+b$.

Expresión del término general. — Sea la progresión aritmética de término general $a_n=qn+b$; si hacemos $n=1$, obtenemos : $a_1=q+b$, hallando la diferencia a_n-a_1, se tiene :

$$a_n-a_1=qn+b-q-b=q\,(n-1);$$

$a_n=a_1+q\,(n-1)$ fórmula que nos expresa el término general en función del primer término y de la razón de la progresión.

Suma de los términos equidistantes de una progresión aritmética. — Sea la progresión (a_n), $a_n=qn+b$; hallemos la suma de cualesquiera dos términos de la misma a_i y a_j, tales que $i+j=n+1$:

$$a_i=a_1+q\,(i-1)$$
$$a_j=a_1+q\,(j-1)$$

$a_i+a_j=2a_1+q\,(i+j-2)=2a_1+q\,(n-1)$, fórmula que nos dice que $a_1+a_n=a_2+a_{n-1}=\ldots=a_i+a_j$, $i+j=n+1$.

Suma de los n primeros términos. — Sabemos se verifica que la suma de los n primeros términos es : $S=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n$; aplicando la propiedad conmutativa : $S=a_n+a_{n-1}+a_{n-2}+\ldots+a_1$ y sumando

$$2S=(a_1+a_n)+(a_2+a_{n-1})+\ldots+(a_n+a_1).$$

$$2S=(a_1+a_n)n;\ S=\frac{n\,(a_1+a_n)}{2}.$$

Interpolación de términos. — Supongamos que se nos plantea el problema de, dados dos números reales cualesquiera y constantes C_1 y C_n, intercalar entre ambos $n-2$ números $a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}$, tales que la sucesión C_1, $a_2, a_3, a_4, \ldots, a_{n-1}$, C_n sea una progresión aritmética.

Su resolución queda limitada a encontrar la razón q de dicha progresión. Para ello haciendo $C_1=a_1$, $C_n=a_n$, establecemos la relación que liga al primero y enésimo término de una progresión aritmética :

$$a_n=a_1+q\,(n-1);\ q=\frac{a_n-a_1}{n-1};\ q=\frac{C_n-C_1}{n-1}.$$

Ejemplo : intercalar entre los números 1 y 7, 4 números reales de tal manera que los 6 números formen progresión aritmética.

$$4=n-2;\ n=6;\ q=\frac{7-1}{6-1}=\frac{6}{5},\ \text{y la sucesión sería :}$$

$$1,\ 1+\frac{6}{5},\ 1+\frac{12}{5},\ 1+\frac{18}{5},\ 1+\frac{24}{5},\ 7$$

$$1,\ \frac{11}{5},\ \frac{17}{5},\ \frac{23}{5},\ \frac{29}{5},\ 7,\ \ldots$$

PROBLEMAS : 1.° Las longitudes de los lados de un triángulo están en progresión aritmética de razón 10. Hallar dichas longitudes, si el perímetro del triángulo es 60 m.

Llamando ℓ a la longitud del lado intermedio, los otros dos serán : $\ell-q$ y $\ell+q$, y el planteamiento del problema es $\ell-q+\ell+\ell+q=60 \Longrightarrow 3\ell=60$; $\ell=\frac{60}{3}=20\,m$.

Las longitudes serán 10,20 y 30 m.

2.° Sabiendo que las medidas de los ángulos de un triángulo están en progresión aritmética, y que uno de los ángulos mide 100^0, hallar los otros dos.

Dado que un ángulo es de 100^0, éste ha de ser el mayor de los tres, ya que si no fuese así al sumarle un ángulo mayor que él la suma sería mayor que 180^0.

Sea x el menor de los ángulos.

El intermedio será $x + q$.

El mayor será $x + 2q$.

El planteamiento será en consecuencia :

$$\left.\begin{array}{l} x + 2q = 100 \\ x + x + q + x + 2q = 180 \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l} x = 100 - 2q \\ x + q = 60 \end{array}\right\},$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 40^0 \\ q = 100 - 60 = 40^0 \end{array}\right\}.$$ Y los ángulos son : $20^0, 60^0, 100^0$.

3.° Hallar la suma de los n primeros números pares.

Haciendo $a_1 = 2$, el enésimo número par será $a_n = 2n$; aplicando las relaciones ya conocidas, se tiene :

$$a_1 + a_n = 2n + 2 \quad \text{y} \quad S = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{2n(n+1)}{2} = n(n+1).$$

4.° Hallar la suma de los n primeros números impares.

Haciendo $a_1 = 1$, el término enésimo será $a_n = 2n - 1$:

$$S = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{(1 + 2n - 1)n}{2} = \frac{2n^2}{2} = n^2.$$

Progresión geométrica. — Se denomina así una progresión de números reales, cuyo término general es $a_n = aq^n$, donde a y q son dos números reales constantes no nulos.

Por ejemplo, si $a = 1$, $q = 2$ se obtiene la progresión 2, 4, 8, 16, 32, ...

PROPIEDAD FUNDAMENTAL. — *El cociente entre dos términos consecutivos cualesquiera de una progresión geométrica es una constante.*

En efecto, sea la progresión (a_n), de término general $a_n = a \cdot q^n$. El término a_{n-1} será $a_{n-1} = aq^{n-1}$. Dividiendo a_n entre a_{n-1} tendremos : $\dfrac{a_n}{a_{n-1}} = \dfrac{a \cdot q_n}{a \cdot q_{n-1}} = q$.

El número q se denomina *razón* de la progresión.

Consecuentemente con lo anterior, podemos dar una nueva definición de progresión geométrica como *una sucesión de números reales, tal que el cociente entre dos términos cualesquiera consecutivos de la misma es una constante* q.

Expresión del término general. — Sea la progresión geométrica (a_n), $a_n = aq^n$, haciendo $n = 1$, obtenemos $a_1 = aq$. Dividiendo a_n, por a_1, se tiene : $\dfrac{a_n}{a_1} = \dfrac{a \cdot q_n}{a \cdot q} = q^{n-1}$, $\Longrightarrow$ $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.

Fórmula que nos permite hallar cualquier término de la progresión conocido su primer término y la razón.

Producto de dos términos equidistantes. — Tratemos de hallar el producto de dos términos equidistantes de los extremos, es decir $a_i \cdot a_j$, donde $i + j = n + 1$.

Sabemos que :

$a_i = a_1 q^{i-1}$
$a_j = a_1 q^{j-1}$

Multiplicando miembro a miembro se tiene :

$$a_i \cdot a_j = a_1 \cdot a_1 \cdot q^{n+1-2} = a_1 \cdot (a_1 q^{n-1}) = a_1 \cdot a_n,$$

es decir $a_i \cdot a_j = a_1 a_n$, $\forall a_i, a_j, i + j = n + 1$.

Según esta propiedad, $a_1 \cdot a_n = a_2 \cdot a_{n-1} = a_3 \cdot a_{n-2} \cdots$

Producto de los *n* primeros términos de una progresión geométrica. — Es claro que dicho producto es $P = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$; aplicando la propiedad conmutativa $P = a_n \cdot a_{n-1} \ldots a_1$; multiplicando miembro a miembro : $P^2 = (a_1 \cdot a_n) \cdot (a_2 \cdot a_{n-1}) \cdot \ldots (a_n \cdot a_1) = (a_1 \cdot a_n)^n$; $\Longrightarrow$

$$P = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}.$$

Suma de los *n* primeros términos. — Se quiere calcular la suma S_n de los n primeros términos de una progresión geométrica (a_n). Sabemos que

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

Multiplicando la anterior igualdad por la razón q de la progresión se tiene :

$$q\,S_n = qa_1 + qa_2 + \ldots + qa_{n-1} + qa_n = a_2 + a_3 + \ldots + a_n + qa_n.$$

Restando $S_n q - S_n = S_n(q - 1) = a_2 + a_3 + \ldots + a_n + qa_n - (a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n) = a_n \cdot q - a_1$; $S_n = \dfrac{a_n q - a_1}{q - 1}$.

Esta expresión de S_n puede tomar otra forma, multiplicando numerador y denominador de la misma por -1, y tenemos : $S_n = \dfrac{a_1 - a_n q}{1 - q}$, fórmula utilizada cuando la razón q de la progresión es menor que 1.

Suma de una progresión geométrica decreciente. — Una progresión geométrica se dice *creciente* cuando su razón q es mayor que 1, y *decreciente* cuando su razón q es menor que 1.

Es claro que en una progresión geométrica decreciente, los términos van disminuyendo en valor absoluto, puesto que $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, y al multiplicar a_1 por un número menor que 1 el resultado es menor que a_1.

Supongamos ahora se trata de hallar la suma de un número grande de términos de una progresión geométrica decreciente. La suma será :

$$S = \frac{a_1}{1-q} - \frac{a_n \cdot q}{1-q} = \frac{a_1}{1-q} - \frac{a_1 \cdot q_n}{1-q}.$$

Ahora bien, si n es un número grande, entonces q^n se acerca a 0, y el producto $\dfrac{a_1}{1-q} \cdot q^n$ se acerca también a 0. Se puede suponer que la suma de los n primeros términos de una progresión geométrica decreciente, siendo n suficientemente grande, es $S = \dfrac{a_1}{1-q}$.

Hemos de tener en cuenta que la suma S considerada sólo se alcanza cuando el número n de términos tomados se acerca a ∞.

Interpolación. — Al igual que hacíamos en las progresiones aritméticas, podemos considerar el problema de dadas dos constantes C_1 y K_n, reales, hallar $n - 2$ números reales $a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}$, tales que la sucesión $C_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, K_n$ sea geométrica.

En definitiva este problema se reduce al cálculo de la razón q de dicha progresión. Para ello, vamos a considerar $C_1 = a_1$, $K_n = a_n$ como los primero y enésimo términos de dicha progresión. Entonces se tiene :

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}; \; q^{n-1} = \frac{a_n}{a_1}; \; q = \sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a_1}}; \; q = \sqrt[n-1]{\frac{K_n}{C_1}}.$$

Ejemplo : interpolar cuatro términos entre los números $\sqrt{2}$ y $32\sqrt{2}$.

En la progresión buscada de 6 términos, el primer término ha de ser $\sqrt{2}$, y el sexto término $32\sqrt{2}$; $q = \sqrt[5]{\frac{32\sqrt{2}}{\sqrt{2}}} = \sqrt[5]{32} = 2$, luego la progresión buscada será : $\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$, $4\sqrt{2}$, $8\sqrt{2}$, $16\sqrt{2}$, $32\sqrt{2}$.

PROBLEMAS : 1.° En un cuadrado de lado ℓ, se inscribe otro cuadrado, uniendo los puntos medios de los lados. En este segundo cuadrado, inscribimos otro y así sucesivamente. Hallar la suma de las áreas de los infinitos cuadrados trazados.

Llamemos S_1 al área del cuadrado de lado $\ell_1 = 1$.
Sea S_2 el área del cuadrado de lado ℓ_2.

La relación entre ℓ_1 y ℓ_2 es $\ell_2 = \sqrt{\frac{\ell_1^2}{4} + \frac{\ell_1^2}{4}} = \sqrt{\frac{2\ell_1^2}{4}} = \ell_1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$.

De la misma manera se encuentra que $\ell_3 = \ell_1 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$ y en general $\ell_n = \ell_1 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}$

De los resultados anteriores deducimos que los lados de los cuadrados forman una progresión geométrica decreciente de primer término 1 y razón $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

A su vez, las áreas forman también una progresión geométrica decreciente. En efecto, $S_1 = \ell_1^2$, $S_2 = \ell_2^2 = \ell_1^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = S_1 \cdot \frac{1}{2}$; $S_3 = \ell_3^2 = \left(\ell_1 \cdot \frac{2}{4}\right)^2 = S_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = S_1 \cdot \frac{1}{4}$, y, en general, encontramos que :

$$S_n = \ell_n^2 = \ell_1^2 \cdot \left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}\right]^2 = \ell_1^2 \cdot \left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right]^{n-1} = S_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

, que nos dice que las áreas forman una progresión geométrica decreciente de razón $\frac{1}{2}$.

La suma de dichas áreas será. $S = \frac{S_1}{1-q} = \frac{\ell_1^2}{1-1/2} = \frac{\ell_1^2}{1/2} = 2 1_1^2 = 2S_1$. O lo que es igual, la suma de las áreas de todos los cuadrados inscritos en el primitivo es igual al área de dicho cuadrado primitivo.

2.° Hallar cuatro números en progresión geométrica, sabiendo que el primero es 15 y que la suma de los dos primeros es la cuarta parte de la suma de los otros dos.

Si 15 es el primer término, los otros serán :
$15q$, $15q^2$, $15q^3$, donde q es la razón de la progresión. En consecuencia el planteamiento será : $15 + 15q = \frac{15q^2 + 15q^3}{4}$; dividiendo por 15 los dos miembros nos queda : $(1+q) \cdot 4 = q^2 + q^3 \iff q^3 + q^2 - 4q - 4 = 0$.

Ecuación de tercer grado que, aplicando la fórmula de Ruffini, nos da una raíz $q = -2$. En efecto,

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 1 & -4 & -4 \\ -2 & & -2 & 2 & 4 \\ \hline & 1 & -1 & -2 & 0. \end{array}$$

Con lo que definitivamente podemos escribir que la progresión es 15, −30, 60, −120.

3.° La suma de los términos de una progresión geométrica decreciente es 20, y su primer término es 2. Hallar la razón de la progresión.

$$S = \frac{a_1}{1-q};\ 1 - q = \frac{a_1}{S};\ q = 1 - \frac{a_1}{S};\ q = 1 - \frac{2}{20};$$
$$q = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}.$$

4.° Hallar el cuarto término de una progresión geométrica, sabiendo que el producto de los 7 primeros términos es 2 187. Si la razón es $\sqrt{3}$, hallar dichos 7 términos.

Supongamos que los términos sean a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7.

El término equidistante de a_4, es él mismo, luego $a_1 \cdot a_7 = a_4^2$. Ahora bien, sabemos que $P_7 = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^7} = \sqrt{(a_4^2)^7} = a_4^7$, y tenemos : $2\,187 = a_4^7$; $a_4 = \sqrt[7]{2\,187} = 3$.

Por otra parte $a_4 = a_1(\sqrt{3})^{4-1} = a_1 \cdot (\sqrt{3})^3 = a_1 \cdot 3\sqrt{3}$; $a_1 = \frac{3}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$,

y la progresión es : $a_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $a_2 = 1$, $a_3 = \sqrt{3}$, $a_4 = 3$, $a_5 = 3\sqrt{3}$, $a_6 = 9$, $a_7 = 9\sqrt{3}$.



13. — Logaritmos

Definición. Potencias naturales de base 10. Potencias enteras de base 10. Representación gráfica de la función $\log_{10}$. Observaciones sobre la función $\log_{10}$. Propiedades de la función logarítmica. Logaritmo cuya base es un número real positivo menor que 1. — **Cálculo logarítmico :** Característica y mantisa de un logaritmo. Notación de los logaritmos negativos. Mantisa de dos números cuyo cociente es una potencia entera de 10. Tabla de logaritmos decimales. Obtención del logaritmo de un número. Dado un logaritmo, hallar el número al que corresponde. Cologaritmo. Operaciones con logaritmos. *Suma. Resta. Producto. División.* Cálculos. *De productos. De cocientes. De potencias. De operaciones combinadas.* — **Función exponencial :** Definición y propiedades de E_{10}. Representación cartesiana de E_{10}. Propiedades de la función exponencial E_{10}. Ecuaciones logarítmicas y exponenciales. Sistemas de ecuaciones. — **Interés compuesto y anualidades :** Fórmulas de interés compuesto. Problemas de interés compuesto. Anualidades. *De capitalización. De amortización.* — **Introducción a la regla de cálculo :** Origen. Construcción de una regla de cálculo. Producto de dos números. Productos mayores que 10. División. Descripción. Operaciones aritméticas. *Multiplicación. División.* Potencias y raíces cuadradas. Combinación de productos y cocientes.

Ya hemos visto en el estudio de la teoría de conjuntos y del Álgebra las nociones de aplicación, función, homomorfismo etc. Remitimos al lector para la completa comprensión de este capítulo a la parte de análisis de esta misma obra, con objeto de relacionarse con la noción de continuidad de una función, así como con la de crecimiento y decrecimiento de la misma.

DEFINICIÓN. — Se denomina función logarítmica a la aplicación $\log_{10}$ de $(R_0^+, \cdot) \longrightarrow (R_+)$ definida por :

1) $\log_{10}$ es continua y estrictamente creciente $\forall x \in R_0^+$;
2) el número 10 tiene como imagen el 1;
3) $\log_{10}(x \cdot y) = \log_{10} x + \log_{10} y$, $\forall xy \in R_0^+$.

Los conjuntos $(R_0^+, \cdot)$ y $(R, +)$ están definidos por $(R_0^+, \cdot) = \{x \in R/x > 0$, y la operación interna es el producto$\}$.

$(R, +) = \{x \in R$, y su operación interna es la suma$\}$.

El número 10, que tiene como imagen el 1, recibe el nombre *de base* de la función logaritmo $\log_{10}$.

Como propiedad fundamental podemos escribir : *el logaritmo de un producto de dos números es la suma de los logaritmos*, propiedad consecuencia de la definición.

Ejemplo : $\log_{10}(7 \cdot 5) = \log_{10} 7 + \log_{10} 5$.

Potencias naturales de base 10. — Hallemos las imágenes sucesivas de las potencias de 10, ateniéndonos a la definición de función logarítmica :

1) $\log_{10} 1 = 0$. En efecto, sabemos que $\log(1 \cdot 1) = \log_{10} 1 + \log_{10} 1$; por otra parte $\log(1 \cdot 1) = \log 1 \implies \log_{10} 1 + \log_{10} 1 = \log_{10} 1 \implies 3\log_{10} 1 = 0 \implies \log_{10} 1 = 0$.

2) $\log_{10} 10^1 = 1$ por definición.

2) $\log_{10} 10^2 = \log_{10}(10 \cdot 10) = \log_{10} 10 + \log_{10} 10 = 2$.

4) $\log_{10} 10^3 = \log_{10}(10 \cdot 10 \cdot 10) =$ $\log_{10} 10 + \log_{10} 10 + \log_{10} 10 = 3$. Se puede así generalizar.

5) $\log_{10} 10^n = n$.

Potencias enteras de base 10. — Las potencias negativas de base 10 pueden escribirse :

$$10^{-1} = \frac{1}{10},\ 10^{-2} = \frac{1}{100},\ 10^{-3} = \frac{1}{1\,000},\ 10^{-n} = \frac{1}{10^n},$$ lo que es igual que decir que $10^{-1} \cdot 10 = 1$, $10^{-2} \cdot 10^2 = 1$, $\cdots 10^{-n} \cdot 10^n = 1$.

En consecuencia, se verifica :

1) $\log_{10}(10^{-1}) = -1$, puesto que $\log_{10}(10^{-1} \cdot 10) = \log_{10} 10^{-1} + \log_{10} 10 = \log_{10} 1 = 0$; $\log_{10} 10^{-1} + \log_{10} 10 = 0$; $\log_{10} 10^{-1} = -\log_{10} 10 = -1$.

2) $\log_{10} 10^{-2} = -2$, puesto que $\log_{10}(10^{-2} \cdot 10^2) = \log_{10} 10^{-2} + \log_{10} 10^2 = 0$; $\log_{10} 10^{-2} = -\log_{10} 10^2 = -2$.

3) Y en general, podemos escribir que :

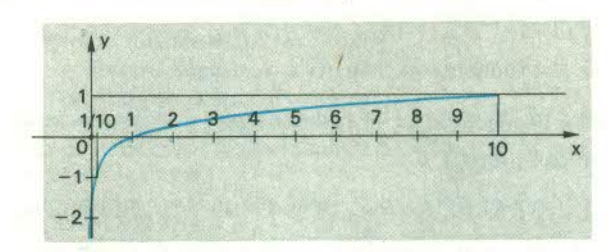
$$\log_{10} 10^{-n} = -n.$$

Resumiendo los resultados $\log_{10} 10^n = n$ y $\log_{10} 10^{-n} = -n$, podemos concluir : las imágenes de las potencias de exponente entero de la base de la función $\log_{10}$ son los respectivos exponentes. $\log_{10} 10^z = z$, $\forall z \in Z$.

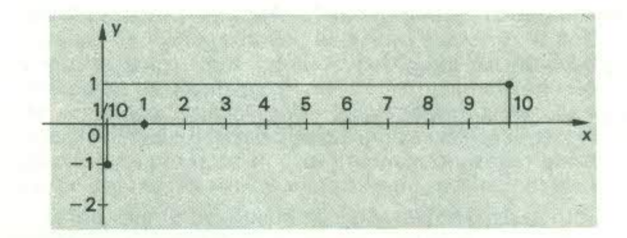
Representación gráfica de la función $\log_{10}$. — Conocemos ya numerosos puntos de la representación cartesiana de la función $\log_{10} : R_0^+ \longrightarrow R$. Escribiendo dicha función en la forma $y = \log x$, dichos puntos son :

x	10^{-n}	...	10^{-2}	10^{-1}	10^0	10^1	10^2	...	10^n
y	$-n$	...	-2	-1	0	1	2	...	n

que representados gráficamente serían.



Ahora bien, dado que dicha función ha de ser continua y creciente sobre todo el semieje positivo R_0^+, podemos completar con suficiente aproximación la gráfica correspondiente. (Línea de trazo grueso de la figura adjunta.)



Como podemos observar, no existe gráfica en la parte izquierda del plano.

Observaciones sobre la función $\log_{10}$. — 1) La función $\log_{10}$, dado que es estrictamente creciente, verifica que $\forall x_1 < x_2 \implies \log_{10} x_1 < \log_{10} x_2$, o lo que es lo mismo, no pueden existir dos números del conjunto original que tengan una misma imagen; es decir $\log_{10}$ es inyectiva.

2) La función $\log_{10}$ es además sobreyectiva, puesto que no está acotada ni superior ni inferiormente. Efectiva-

mente, por elevado que escojamos un número natural n en el eje de ordenadas, siempre existirá un original 10^n, en el eje de abscisas, cuya imagen es n. Por otra parte, por pequeño que elijamos un número negativo $-n$, éste tendrá un original 10^{-n}.

Un número real r cualquiera del eje de ordenadas, estará comprendido entre dos números enteros z y $z+1$. Dado que $\log_{10}$ es una función continua, el segmento $[z, z+1]$ tendrá como original el segmento $[10^z, 10^{z+1}]$ del eje de abscisas. Por tanto, el número $r \in [z, z+1]$ tendrá un original en $[10^z, 10^{z+1}]$. Y en consecuencia, la función es sobreyectiva.

Al ser la función $\log_{10}$ un homomorfismo biyectivo, podemos decir que es un isomorfismo continuo y creciente de $R_0^+ \longrightarrow R$, tal que $\log_{10} 10 = 1$.

Propiedades de la función logarítmica. — 1) Logaritmo de un cociente.

$\log_{10}\left(\frac{a}{b}\right) = \log_{10}\left(a \cdot \frac{1}{b}\right)$. Ahora bien, $\log_{10}\left(b \cdot \frac{1}{b}\right) = \log_{10} 1 = 0$; pero $\log_{10}\left(b \cdot \frac{1}{b}\right) = \log_{10} b + \log_{10}\frac{1}{b} = 0$ $\Longrightarrow \log_{10}\frac{1}{b} = -\log b$, $\Longrightarrow \log_{10}\left(a \cdot \frac{1}{b}\right) = \log_{10} a + \log_{10}\frac{1}{b} = \log_{10} a - \log_{10} b$. Resumiendo : *el logaritmo de un cociente es igual a la diferencia de los logaritmos del dividendo y divisor.*

2) Logaritmo de una potencia cualquiera de exponente entero.

Si el exponente es natural, se tiene $\log_{10}(a^n) = \log_{10}(\overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{n \text{ veces}}) = \overbrace{\log_{10} a + \ldots + \log_{10} a}^{n \text{ veces}} = n \cdot \log_{10} a$.

Si el exponente es negativo, se tiene :

$\log_{10}(a^{-n}) = \log_{10}\left(\frac{1}{a^n}\right)$; dado que $\frac{1}{a^n}$ es un cociente, podemos escribir :

$\log_{10}\left(\frac{1}{a^n}\right) = \log_{10} 1 - \log_{10} a^n = 0 - n = -n$. Resumiendo los dos casos, se tiene : $\log_{10} a^z = z \cdot \log_{10} a$, $\forall z \in Z$.

3) Logaritmo de una raíz. $\sqrt[n]{a}$, $n \in N$, $a \in R_0^+$.

Sabemos que $a = (\sqrt[n]{a})^n \Longrightarrow \log_{10}(\sqrt[n]{a})^n = \log_{10} a$, ahora bien, $\log_{10}(\sqrt[n]{a})^n = \log_{10}[\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdot \ldots \sqrt[n]{a}] = \log_{10}\sqrt[n]{a} + \ldots + \log_{10}\sqrt[n]{a} = n \cdot \log_{10}\sqrt[n]{a}$; $\log_{10}(\sqrt[n]{a})^n = \log_{10} a = n \cdot \log_{10}\sqrt[n]{a} \Longrightarrow \log_{10}\sqrt[n]{a} = \frac{1}{n}\log_{10} a$.

El logaritmo de una raíz es igual al logaritmo del radicando dividido por el índice de la raíz.

4) Logaritmo de una potencia de exponente fraccionario.

$$\log_{10}(a^{\frac{m}{n}}) = \frac{m}{n} \cdot \log_{10} a, \ \forall m, n \in Z, \ a \in R_0^+.$$

En efecto, $\log_{10}(a^{\frac{m}{n}}) = \log_{10}\sqrt[n]{(a^m)} = \frac{1}{n} \cdot [\log_{10} a^m] = \frac{1}{n} \cdot m \cdot \log_{10} a = \frac{m}{n} \cdot \log_{10} a$.

DEFINICIÓN. — Al igual que hemos definido la función $\log_{10}$, podemos definir $\log_a$ donde a es cualquier número natural, como : *todo isomorfismo continuo y creciente de* R_0^+ *en* R, *tal que la imagen de* a *es* 1.

Logaritmo cuya base es un número real positivo menor que 1. — Lo mismo que hicimos la primera vez, para construir la función logaritmo, vamos a construir $\log_a$, donde $a < 1$. Sea por ejemplo $a = \frac{1}{3}$, entonces se tiene :

$\log_{1/3}$, es una función biyectiva y continua de $R_0^+ \longrightarrow R$ tal que $\log_{1/3}\frac{1}{3} = 1$ y además $\log_{\frac{1}{3}}(m \cdot n) = \log_{1/3} m + \log_{1/3} n$.

Con estas condiciones, determinamos los siguientes pares :

$\frac{1}{3}$ … 1

$\frac{1}{3^2}$ … 2

$\frac{1}{3^3}$ … 3

. .

. .

. .

1 … 0

$3 = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$ … -1

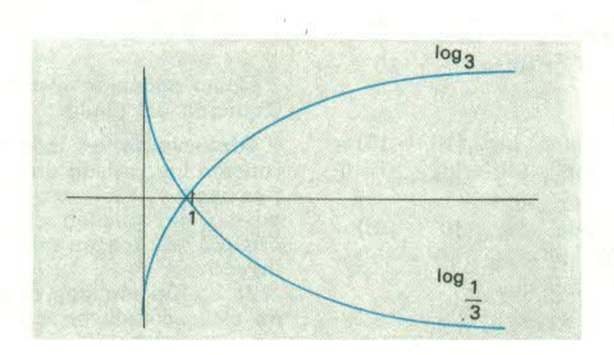
. .

. .

. .

$3^3 = \left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$ … -3

La función es decreciente, contrariamente a lo que sucedía cuando la base era mayor que 1. Comparando los pares obtenidos ahora con los de la función $\log_3$, encontramos que $\log_{1/3}(x) = -\log_3 x$, y las representaciones gráficas de $\log_{1/3}$ y $\log_3$ serían :



Cálculo logarítmico

Característica y mantisa de un número real. — *La* característica *de un número real* $r = z' a_1 a_2 a_3 \ldots$ *es el mayor entero* z, *tal que* z *es menor o igual que* $z' a_1 a_2 a_3$

... *Cuando* $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_n = 0$ *el número entero* z *es la característica de* r.

Se llama mantisa *de un número real* r *a la diferencia entre dicho número y su característica.*

Ejemplo :

NÚMERO	CARACTERÍSTICA	MANTISA
3	3	0
2'5	2	0'5
3'141 6	3	0'141 6
0'01	0	0'01
− 3'01	− 4	0'99
− 0'17	− 1	0'83

Característica y mantisa de un logaritmo. — Sea la función logarítmica $\log_{10}$. En general, dado un número x, que no sea potencia de 10, su logaritmo en base 10 será un número real y, que verifica : $\log_{10} x = y \iff 10^y = x$. Dicho número y tendrá una característica y una mantisa, para hallar las cuales recordamos lo siguiente :

a) $\log_{10} x = y$ será positivo si $x > 1$.
b) $\log_{10} x = y$ será negativo si $0 < x < 1$.

En el caso *a*) la característica de y es el entero positivo que indica el número de sus cifras no decimales, disminuido en una unidad.

En efecto, supongamos que x tiene n cifras no decimales, entonces se verifica que $10^{n-1} < x < 10^n$; tomando logaritmos en las desigualdades anteriores, se tiene :

$n - 1 < \log_{10} x < n$, o sea, $n - 1 < y < n \implies n - 1$ es la característica de y.

Ejemplo : hallar la característica de log 749'51.
$10^2 < 749'51 < 10^3 \iff \log 10^2 < \log 749'51 < \log 10^3 \iff 2 < \log 749'51 < 3 \implies$ característica de 749'51 = 2.

En el caso *b*), es decir si $0 < x < 1$, la característica de $\log x$ es el número negativo cuyo valor absoluto indica el número de ceros que preceden a la primera cifra decimal distinta de cero, incluyendo al cero de las unidades.

En efecto, si el número x tiene n ceros, incluyendo al de las unidades, podemos escribir : $10^{-n} < x < 10^{-(n-1)}$, dado que la función es creciente; tomando logaritmos, las desigualdades anteriores se conservan :

$\log 10^{-n} < \log x < \log 10 - (n-1) \iff -n < \log x < -n + 1$, siendo por tanto $-n$ la característica.

Ejemplo : hallar la característica de 0'005 1.
$0'001 < 0'005\,1 < 0'01 \iff 10^{-3} < 0'005\,1 < 10^{-2} \implies -3 < \log 0'005\,1 < -2 \iff$ característica de 0'005 1 = − 3.

Notación de los logaritmos negativos. — Para facilitar los cálculos entre logaritmos negativos, se adopta el siguiente convenio : un logaritmo negativo se suele expresar escribiendo su característica con el signo menos encima y, después de la coma decimal, su mantisa, que es siempre positiva.

Ejemplo : supongamos que $\log x = -2'513\,764$; por definición, su característica es −3, y su mantisa 0'486 236, pudiendo por tanto escribir $\log x = \bar{3}'486\,236 = -2'513\,764$.

Mantisa de dos números cuyo cociente es una potencia entera de 10. — Los logaritmos decimales de dos números reales cuyo cociente es una potencia de 10, tienen la misma mantisa.

En efecto, sean a y b, $a, b \in R / a = b \cdot 10$.

Tomando logaritmos se tiene :
$\log a = \log b + n \cdot \log 10 = \log b + n$; ahora bien, la mantisa de n es cero, luego la mantisa de $\log a$ será igual a la mantisa de $\log b$.

Ejemplo : hallar log 5 000 y log 0'005, sabiendo que $\log 5 = 0'698\,970$.

$$\log 5\,000 = \log (5 \cdot 1\,000) = \log 5 + \log 1\,000 = 0'698\,970 + 3 = 3'698\,970.$$

$$\log 0'005 = \log \frac{5}{1\,000} = \log 5 + \log 10^{-3} = \bar{3}'698\,970.$$

Tabla de logaritmos decimales. — La utilización muy frecuente en numerosos problemas de la ciencia y técnica, de los logaritmos, ha hecho que éstos se calculen y escriban en unas tablas especiales. Sin embargo, la obtención de logaritmos se hace actualmente en cuestión de segundos, gracias a las calculadoras electrónicas de bolsillo. Puede decirse que las tablas clásicas han entrado en crisis, a pesar de lo cual creemos oportuno hacer una breve descripción de las mismas y de su funcionamiento.

Dado que la búsqueda de la característica de un logaritmo es una operación mental inmediata, las tablas de logaritmos sólo traen escritas las mantisas de los mismos. Existen tablas de varios modelos, variando éstas en función del número de cifras decimales que adopten para el logaritmo. Unas tablas de seis cifras decimales traen escritos los números desde 0 hasta 30 000. En los cálculos logarítmicos se plantean dos tipos de problemas.

1) Dado un número hallar su logaritmo.
2) Dado un logaritmo, hallar el número.

Para aprender a manejar las tablas, damos unos ejemplos tomados de una página de una tabla de logaritmos con seis cifras decimales.

0^0 30′	5^0 8	N.	L. 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	P. P.
50″	20″	**1850**	26 7172	7195	7219	7242	7266	7289	7313	7336	7359	7383	
	30	1851	7406	7430	7453	7477	7500	7524	7547	7571	7594	7618	
	40	1852	7641	7664	7688	7711	7735	7758	7782	7805	7829	7852	
	50	1853	7875	7899	7922	7946	7969	7993	8016	8039	8063	8086	
	9′	1854	8110	8133	8157	8180	8203	8227	8250	8274	8297	8321	
55	10″	1855	8344	8367	8391	8414	8438	8461	8484	8508	8531	8555	
	20	1856	8578	8601	8625	8648	8672	8695	8718	8742	8765	8789	
	30	1857	8812	8835	8859	8882	8905	8929	8952	8976	8999	9022	
	40	1858	9046	9069	9002	9116	9139	9163	9186	9209	9233	9256	
	50	1859	9279	9303	9326	9349	9373	9396	9420	9443	9466	9490	
31′	10	**1860**	9513	9536	9560	9583	9606	9630	9653	9676	9700	9723	
	10″	1861	9746	9770	9793	9816	9840	9863	9886	9910	9933	9956	
	20	1862	9980	^{0}0003	^{0}0026	^{0}0050	^{0}0073	^{0}0096	^{0}0120	^{0}0143	^{0}0166	^{0}0190	
	30	1863	27 0213	0236	0259	0283	0306	0329	0353	0376	0399	0423	24
	40	1864	0446	0469	0493	0516	0539	0562	0586	0609	0832	0656	
5″	50	1865	0870	0702	0726	0749	0772	0795	0819	0842	0865	0888	1 2,4
	11′	1860	0912	0935	0958	0981	1005	1028	1051	1075	1098	1121	2 4,8
	10″	1967	1144	1168	1191	1214	1237	1261	1284	1307	1330	1354	3 7,2
	20	1868	1377	1400	1423	1447	1470	1493	1516	1540	1563	1586	
	30	1969	1809	1633	1656	1679	1702	1725	1749	1772	1795	1818	4 9,6
													5 12,0
10	40	**1870**	1842	1865	1888	1911	1934	1958	1981	2004	2027	2051	6 14,4
	50	1871	2074	2097	2120	2143	2167	2190	2213	2236	2259	2283	
	12′	1872	2306	2329	2352	2375	2399	2422	2445	2468	2491	2515	7 16,8
	10″	1873	2638	2561	2584	2607	2631	2654	2677	2700	2723	2746	8 19,2
	20	1874	2770	2793	2816	2839	2862	2885	2909	2932	2955	2978	9 21,6
15	30	1875	3001	3024	3048	3071	3004	3117	3140	3163	3187	3210	
	40	1876	3233	3256	3279	3302	3325	3349	3372	3395	3418	3441	
	50	1877	3464	3487	3511	3584	3557	3580	3603	3626	3649	3672	
	13′	1878	3896	3719	3742	3705	3788	3811	3834	3857	3881	3904	
	10″	1879	3927	3950	3973	3996	4019	4042	4065	4089	4112	4135	
20	20	**1880**	4158	4181	4204	4227	4250	4273	4296	4320	4343	4366	
	30	1881	4389	4412	4435	4458	4481	4504	4527	4550	4573	4597	
	40	1882	4620	4643	4666	4639	4712	4735	4758	4781	4804	4827	
	50	1883	4850	4873	4896	4920	4943	4966	4989	5012	5035	5058	
	14′	1884	5081	5104	5127	5150	5173	5196	5219	5242	5265	5288	
25	10″	1885	5311	5334	5357	5380	5404	5427	5450	5473	5496	5519	
	20	1886	5542	5565	5588	5611	5634	5657	5680	5703	5726	5749	
	30	1887	5772	5795	5818	5841	5864	5887	5910	5933	5956	5979	23
	40	1888	6002	6025	6048	6071	6094	6117	6140	6163	6196	6209	1 2,3
	50	1889	6232	6255	6278	6301	6324	6347	6370	6393	6416	6439	2 4,6
													3 6,9
30	15′	**1890**	6462	6485	6508	6531	6554	6577	6600	6623	6646	6669	
	10″	1891	6692	6714	6737	6700	6783	6806	6829	6852	6875	6898	
	20	1892	6921	6944	6967	6990	7013	7036	7059	7082	7105	7123	4 9,2
	30	1893	7151	7174	7196	7219	7242	7265	7288	7311	7334	7357	5 11,5
	40	1894	7380	7403	7426	7449	7472	7495	7518	7540	7563	7586	6 13,8
35	50	1895	7609	7632	7655	7678	7701	7724	7747	7770	7793	7815	7 16,1
	16′	1896	7838	7861	7884	7907	7930	7953	7976	7999	8022	8044	8 18,4
	10″	1897	8067	8090	8113	8136	8159	8182	8205	8228	8250	8273	9 20,7
	20	1898	8296	8319	8342	8365	8388	8411	8433	8456	8479	8502	
	30	1899	8525	8548	8571	8594	8616	8639	8662	8685	8708	8731	
0. 2	0. 4	N.	L. 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	

Obtención del logaritmo de un número. — Para hallar la mantisa, prescindimos de la coma, si la tiene el número cuyo logaritmo buscamos. Una vez que hemos prescindido de ella, se nos pueden presentar los siguientes casos :

a) El número considerado es, prescindiendo de la coma, menor que 30 000; o si tenemos otras tablas, aparece en ellas.

Ejemplo : hallar log 18 550.

La característica es 4; para hallar la mantisa, buscaremos en la columna N el número 1 855, y a su derecha en la columna L · 0, encontraremos las cuatro últimas cifras de la mantisa, siendo las dos primeras 26; así pues, tenemos log 18 550 = 4'268 344.

Si en vez de este número fuera otro cualquiera obtenido multiplicando 1 855 por una potencia de 10, conservaríamos la mantisa, variando únicamente la característica.

Ejemplos : $\log 0'185\,5 = \bar{1}'268\,344$.

log 18'55 = 1'268 344.

Puede ocurrir que el número cuyo logaritmo se busca, no esté en la columna N.

Ejemplo : hallar log 18 564.

Característica 4. Para hallar la mantisa, buscamos en la columna N el número 1 856, y posteriormente en la columna 4 encontramos las 4 últimas cifras del logaritmo de dicho número, que son 8 672, y las dos primeras 26. El logaritmo buscado es entonces : log 18 564 = 4'268 672.

b) El número considerado es mayor que 30 000, o rebasa en caso de otras tablas la capacidad de las mismas (si la tabla es de 5 decimales, generalmente trae los logaritmos de los 10 000 primeros números enteros).

Ejemplo : obtener log 1 884'76.

Característica 3. La mantisa estará comprendida entre las mantisas de 1 884 y 1 885, o en nuestras tablas, entre las mantisas de 18 847 y 18 848, pues suponemos que existe proporcionalidad entre el incremento del número y el incremento del logaritmo. Aunque esto no es riguroso, podemos suponer que el error cometido es tan pequeño que como mucho afectaría únicamente a la sexta cifra decimal.

log 1 884'7 = 3'275 242
log 1 884'8 = 3'275 265 } Restando miembro a miembro,

log 1 884'7 − log 1 884'8 = 0'000 023. Y ahora razonamos : si a una diferencia 18 848 − 18 847 = 1, le corresponde una diferencia entre los logaritmos de 0'000 023, a una diferencia 1 884'76 − 1 884'70 de 0'6, le corresponderá una diferencia entre los logaritmos de x.

$x = \dfrac{0'000\,023 \cdot 0'6}{1} = 0'000\,013\,8$; si sumamos el número encontrado al logaritmo de 18 847, encontramos el resultado buscado 3'275 242.

$$\frac{0'000\,013\,8}{3'275\,255\,8} \simeq 3'275\,256;\ \log 1\,884'76 = 3'275\,256.$$

Este resultado lo podíamos haber obtenido sin necesidad de realizar la regla de tres; para ello habríamos de auxiliarnos de las tablillas adjuntas P.P.

En efecto, al obtener la diferencia 0'000 023, podíamos haber operado como sigue. En la tablilla P.P. 23, el número 0'6, obtenido como diferencia entre los números 1 884 7'6 y 1 884 7'0, aparece a su derecha, ya tabulado, 13'8, que es el resultado por nosotros obtenido en la regla de tres. Observemos que en la tablilla P.P. aparece el número 6 y 13'8, en vez 0'6 y 138 como resultó en la regla de tres. De todas maneras ambos resultados son idénticos, pues la coma no influye en la búsqueda de la mantisa.

Ejemplos : 1.° Hallar log 1 8875'9.

Característica 1 887 5'9 = 5.

Mantisa log 188 750 < mantisa log 188 759 < mantisa log 188 760 = 5'275 910 log 188 760.
log 188 750 = 5'275 887
Diferencia = 23.

Buscando la tabilla P.P. 23, al número 9 le corresponde 20'7, diferencia que sumamos a 5'275 887; resulta así : log 188 759 = 5'275 908.

2.° Hallar log 1 851 676'1.

log 18 516 = 6'267 547
log 18 517 = 6'267 571 } Diferencia = 24.

6'267 547
16'8 ...... Tabla P.P. 24 tabulado el 7.
1'44 ...... Tabla P.P. 24 tabulado el 6.
24 ...... Tabla P.P. tabulado el 1.

6'267 565 48; log 1 851 676'1 = 6'267 565.

Dado un logaritmo, hallar el número al que corresponde. — *a*) La mantisa del logaritmo dado se halla en las tablas.

Primeramente buscaremos las dos primeras cifras de la mantisa en las tablas, cosa fácil pues como varía muy lentamente, se encontrarán en la parte superior de las páginas, donde están escritas, y una vez encontradas procederemos a buscar las cuatro restantes que estarán en la columna L. 0, ó en una de las otras columnas.

Ejemplos : 1.° Hallar el número cuyo logaritmo es 3'277 770.

La mantisa 0'277 770 corresponde al número 18 957, dado que la característica es 3, el número buscado es 1 895'7.

2.° Hallar el número cuyo logaritmo es 7'277 770.

Es inmediato que log 18 957 000 = 7'277 770.

3°. Hallar el número cuyo logaritmo es $\bar{2}'277\,770$.

De la misma manera obtenemos $\log 0'018\,957 = \bar{2}'277\,770$.

b) La mantisa del logaritmo buscado no se halla en las tablas.

En este caso, la mantisa buscada m se encontrará entre dos mantisas m_1 y m_2 que con seguridad estarán en las tablas, y el número correspondiente a la mantisa m se encontrará entre los números correspondientes a las mantisas m_1 y m_2. Suponiendo, como antes hicimos, que las diferencias entre las mantisas son proporcionales a la diferencia entre los números, y viceversa, el problema se reduce a una proporcionalidad.

Ejemplos : Hallar los números correspondientes a los logaritmos 0'271 895, $\bar{2}'267\,299$, 6'269 797.

Las mantisas superior e inferior a la 0'271 895 son las $m_1 = 0'271\,888$ y $m_2 = 0'271\,911$, que corresponden a los números 18 702 y 18 703, cuya diferencia es 1, siendo $m_2 - m_1 = 23$ y $m - m_1 = 7$.

Ahora razonamos $\dfrac{23}{1} = \dfrac{7}{x}$; $x = \dfrac{7}{23} = 0'3$, luego el número buscado es 18 702 + 0'3 = 18 702'3; dado que la característica es 0, entonces tendremos log 1'870 23 = 0'271 895.

La mantisa 0'267 299 está comprendida entre las $m_1 = 0'267\,289$ y $m_2 = 0'267\,313$. Razonando como anteriormente 0'267 299 − 0'267 289 = 10; $\dfrac{24}{1} = \dfrac{10}{x}$; $x = \dfrac{10}{24} = 4'16$.

Y el número buscado será 0'018 505 416.

La mantisa 0'269 797 está comprendida entre las 0'269 793 y la 0'269 816 y 0'269 797 − 0'269 793 = 4, entonces $\dfrac{23}{1} = \dfrac{4}{x}$; $x = \dfrac{4}{23} = 0'174$. Y el número buscado es 1 861 217'4.

APLICACIONES. — Hallar $\sqrt[5]{1874}$.

$\log \sqrt[5]{1874} = \frac{1}{5}\cdot \log 1874 = \frac{1}{5}\cdot 3\text{'}277770 = 0\text{'}655554.$

Buscando en las tablas el número correspondiente a la mantisa 0'655 554, y tabulando encontramos antilog 0'655 554 = 4'524 354. Por tanto $\sqrt[5]{1874} = 4\text{'}524354$.

Se denomina antilogaritmo de un logaritmo y *al número* x *que verifica que log* x = y.

Ejemplo : antilog 2 = 100, antilog $-1 = \frac{1}{10}$, etc.

Cologaritmo. — Se llama *cologaritmo* de un número al logaritmo de su inverso. Se representa por el símbolo *colog*.

Según la definición $\text{colog}\, N = \log\left(\frac{1}{N}\right) = \log 1 - \log N = 0 - \log N \implies \text{colog}\, N = -\log N$.

Ejemplos : 1.º Sabiendo que log 2 = 0'301 030, calcular colog 2.

Colog 2 = − log 2 = − 0'301 030 = − 0'301 030 + 1 − 1 = $\bar{1}$,699 070 $\implies$ colog 2 = $\bar{1}$'699 070.

2.º Sabiendo que log 100 = 2. Hallar colog 100.

colog 100 = − log 100 = − 2 = $\bar{2}$'000 000.

Operaciones con logaritmos. — *Suma.* — La suma de logaritmos se hace como si de números decimales se tratara, pero considerando los signos de las características.

	1.º		2.º
Ejemplos :	2'461 521		3'305 090
	1'891 730		$\bar{1}$'111 111
	5'314 050		$\bar{7}$'000 000
	9'667 301		5'416 201

Resta. — La diferencia de logaritmos, al igual que la suma, se hace como si de números decimales se tratara, considerando los signos de las características.

	1.º		2.º
Ejemplos :	$\bar{5}$'421 521		6'687 593
	− 2'314 059		− $\bar{8}$'754 721
	$\bar{7}$'107 462		13'932 872

La resta puede también realizarse sumando al logaritmo minuendo el logaritmo sustraendo cambiado de signo.

Ejemplos : 1.º 5'421 521 − 2'314 059 =
= $\bar{5}$'421 521 + (− 2'314 059) = $\bar{5}$'421 521 + $\bar{3}$'685 941
= $\bar{7}$'107 462.

2.º 6'687 593 = $\bar{8}$'754 721 = 6'687 593 − (− 7'245 279) =
6'887 593 + 7'245 279 = 13'932 872.

Producto. — En el producto de un logaritmo por un número entero consideraremos los siguientes casos :

1) La característica es positiva. La operación se realiza como una multiplicación aritmética normal.

Ejemplo : 3'151 030 · 5 = 15'755 150.

2) La característica es negativa y el factor entero es un dígito. El producto se realiza como si de números decimales se tratase, considerando el signo de la característica.

Ejemplo : $\bar{3}$'152 155 · 4 = $\overline{12}$'608 620.

3) La característica es negativa y el factor entero no es dígito. En este caso se multiplican independientemente la mantisa (cuyo producto es siempre positivo) y la característica (cuyo producto es siempre negativo), sumando a continuación los resultados obtenidos.

Ejemplo 1.º

$$\begin{array}{rr} & \bar{2}\text{'}152430 \\ & \times 13 \\ \hline & 457290 \\ \overline{26}\text{'} & 152430 \\ \hline \overline{26} & +\ 1\text{'}981590 = \overline{25}\text{'}981590 \end{array}$$

Ejemplo 2.º

$$\begin{array}{rr} & \overline{11}\text{'}301010 \\ & \times 12 \\ \hline & 602020 \\ \overline{132}\text{'} & 301010 \\ \hline \overline{132} & +\ 3\text{'}612120 = \overline{129}\text{'}612120. \end{array}$$

División. — Consideramos los siguientes casos :

1) La característica es positiva. La operación se realiza como una división aritmética normal.

Ejemplo : 3'240 156 : 5 = 0'648 031.

2) La característica es negativa y múltiplo del divisor. Se dividen la característica y la mantisa independientemente, sumando después los resultados obtenidos.

Ejemplo 1.º $\frac{\overline{12}\text{'}153010}{3} = \frac{\overline{12}}{3} + \frac{0\text{'}153010}{3} = \bar{4}\text{'}510033.$

Ejemplo 2.º $\frac{\overline{10}\text{'}000010}{5} = \bar{2}\text{'}000002.$

3) La característica es negativa y no es múltiplo del divisor. La operación se realiza añadiendo a la característica un número negativo que sumando con ella dé un múltiplo del divisor. El mismo número, pero positivo, se suma a la mantisa. A continuación se dividen independientemente, sumando los resultados obtenidos.

Ejemplo 1.º $\frac{\overline{31}\text{'}450130}{5} = \frac{-31 + 0\text{'}450130}{5} = \frac{-31}{5} + \frac{0\text{'}450130}{5} = \frac{-31-4}{5} + \frac{4 + 0\text{'}450130}{5} = \frac{-35}{5} + \frac{4\text{'}450130}{5} = -7 + 0\text{'}890026 = \bar{7}\text{'}890026.$

Ejemplo 2.º $\frac{\bar{7}\text{'}251111}{3} = \frac{(-7-2) + (0\text{'}251111 + 2)}{3} = \frac{-9}{3} + \frac{2\text{'}251111}{3} = \bar{3}\text{'}750370.$

Cálculos. — *De productos.* — Ejemplos : 1.º Calcular P = 3'002 × 4 573 × 0'000 13. Tomando logaritmos : log P = log 3'002 + log 4 573 + log 0'000 13 = 0'477 411 + 3'650 201 + $\bar{4}$'113 943 = 0'241 555; antilog 0'241 555 = 1'744 36.

2.º Calcular : P = 7 645'32 × 0'009 17 × 345'01.
log P = log 7 645'32 + log 0'009 17 + log 345'01 =
3'883 395 + $\bar{3}$'962 369 + 2'537 831 = 4'383 595;
antilog $\bar{4}$'383 595 = 24 187'72.

De cocientes. — Ejemplos : 1.º Calcular $\frac{943\text{'}001}{786597} = C$.

Tomando logaritmos :
log C = log 943'001 − log 786 597 =
2'974 512 − 5'895 752 = − 2'921 240 = $\bar{3}$'078 760
antilog $\bar{3}$'078 760 = 0'001 198 8.

2.º Calcular $C = \frac{0\text{'}0002501}{0\text{'}00000736}$.

log C = log 0'000 250 1 − log 0'000 007 36 =
$\bar{4}$'398 114 − $\bar{6}$'866 878 = 1'531 236;
C = antilog 1'531 236 = 33'981.

De potencias. — Ejemplos : 1.º Hallar $P = 15'701^9$.
Tomando logaritmos : $\log P = 9 . \log 15'701 = 9 \times 1'195\,927 = 10'763\,343$;
antilog $10'763\,343 = 5\,798\,866\,666'666\,6$.
2.º Calcular $0'021\,7^5 = P$.
Tomando logaritmos : $\log P = 5 . \log 0'021\,7 = 5 \times \bar{2}'336\,460 = \bar{9}'682\,300$;
antilog $\bar{9}'682\,300 = 0'000\,000\,004\,811\,72$.

De operaciones combinadas. — Ejemplos : 1.º Calcular $x = \left(\frac{32'7 \times 0'006\,487}{5'652\,8}\right)^4$.

Tomando logaritmos, y usando solo 4 decimales :

$\log x = 4 (\log 32'7 + \log 0'006\,487 - \log 5'652\,8) = 4(1'514\,5 + \bar{3}'812\,0 - 0'752\,2) = \bar{6}'297\,2$.

$x = \text{antilog } \bar{6}'297\,2 = 0'000\,001\,982\,27$.

2.º Calcular $x = \sqrt[7]{\frac{4'01}{5'002}}$; tomando logaritmos :

$\log x = \frac{1}{7}(\log 4'01 - \log 5'002) = \frac{1}{7}(0'603\,144 - 0'699\,144) = \frac{1}{7}(-0'096\,000) = -0'013\,714 = \bar{1}'986\,286$;

antilog $1'986\,286 = 0'968\,92$.

Función exponencial

Cualquiera de las funciones logaritmo ya estudiadas son aplicaciones biyectivas entre $R_0^+ \longrightarrow R$. Por tanto existirá la función inversa de cualquiera de estas funciones, que será también una aplicación biyectiva, que recibe el nombre de *función exponencial*. En el caso de la función $\log_{10}$, su función inversa la representaremos por E_{10}, y en general, la función inversa de la $\log_x$ será la E_x.
El conjunto inicial de la aplicación E_{10} será ahora R, y el conjunto final R_0^+.

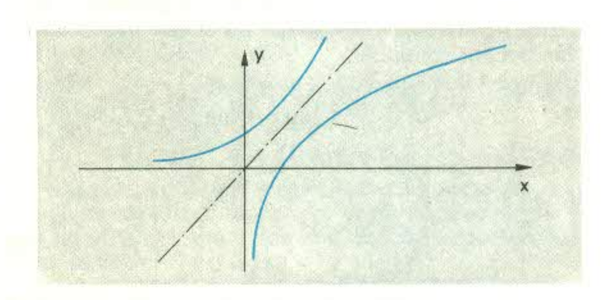
Definición y propiedades de E_{10}. — La definición y propiedades de E_{10}, quedan completamente determinadas conociendo las de su inversa $\log_{10}$. En efecto, E_{10} es un isomorfismo de $R \longrightarrow R_0^+$, que transforma la suma de números reales en el producto de sus imágenes.
$E_{10}(x \cdot y) = E_{10}(x) \cdot E_{10}(y)$.
La función E_{10}, transforma el número 1 en el 10.
Y en general, cambiando el orden de los pares de la función log 10, obtenemos los pares de la E_{10}.

$0 \ldots\ldots 1$	
	$-1 \ldots\ldots 10^{-1}$
$1 \ldots\ldots 10^1$	
$2 \ldots\ldots 10^2$	$-2 \ldots\ldots 10^{-2}$
$3 \ldots\ldots 10^3$	$-3 \ldots\ldots 10^{-3}$
.	.
.	.
$n \ldots\ldots 10^n$	$-n \ldots\ldots 10^{-n}$

Y en definitiva : la imagen mediante E_{10} de un número entero $z \in Z$ es una potencia de 10, cuyo exponente es z. $E_{10}(z) = 10^z$.

Representación cartesiana de E_{10}. — Los infinitos pares ya obtenidos en el párrafo anterior, unidos a la continuidad y crecimiento de E_{10}, nos permiten dar una representación de la misma.

En la figura hemos representado la función E_{10}, mediante la notación $y = 10^x$, y la $\log_{10}$, mediante la $y = \log x$.
Como podemos observar, ambas funciones son simétricas respecto de la bisectriz del primer y tercer cuadrantes.



La notación $E_{10}(x)$ y la 10^x son idénticas, pues hemos visto en el cuadro de pares que la imagen de $E_{10}(x)$ es 10^x. Nuestra familiaridad con la última notación es lo que hace que la adoptemos sin recelos.

Propiedades de la función exponencial E_{10}. —
a) $E_{10}(a + b) = E_{10}(a) \cdot E_{10}(b)$.
b) $E_{10}(-a) = \frac{1}{E_{10}(a)}$.
c) $E_{10}(a - b) = \frac{E_{10}(a)}{E_{10}(b)}$.
d) $E_{10}(z \cdot b) = [E_{10}(b)]^z$, $\forall z \in Z$.
Consecuentes con la última notación adoptada, las propiedades anteriores se escribirían :
a) $10^{a+b} = 10^a \cdot 10^b$.
b) $10^{-a} = \frac{1}{10^a}$.
c) $10^{a-b} = \frac{10^a}{10^b}$.
d) $10^{z \cdot b} = (10^b)^z$.

Ecuaciones logarítmicas y exponenciales

Al ser las funciones $\log x$ y 10^x biyectivas, las igualdades $\log a = \log b$ y $10^a = 10^b$, implican que $a_b = b$.
Es en esta implicación en la que se basan los métodos de resolución de ecuaciones en las que aparecen logaritmos y exponenciales.
Ejemplos : 1.º Resolver la ecuación

$$(\log x)^2 - \log \frac{972}{x} = 0.$$

Desarrollando : $(\log x)^2 - (\log 972 - \log x) = 0$; $(\log x)^2 + \log x - \log 972 = 0$; haciendo $\log x = y$, la ecuación se convierte en la $y^2 + y - \log 972 = 0$, pero $\log 972 = 2'987\,7$; luego la ecuación será $y^2 + y - 2'987\,7 = 0$, que resuelta nos da las soluciones $y_1 = 1'299\,0$ $y_2 = -2'299\,0$ dado que $y = \log x$ se tiene $x_1 = 19'9$ $x_2 = 0'005\,023$.
2.º Resolver $\log x + \log 12 = \log 144$.

$\log (x \cdot 12) = \log 144$; $12 \cdot x = 144$; $x = \frac{144}{12} = 12$.

3.º Resolver la ecuación $5^x = 130$.
Tomando logaritmos : $\log (5^x) = \log 130$;
$x \cdot \log 5 = \log 130$; $x = \frac{\log 130}{\log 5} = \frac{2'113\,943}{0'698\,970} = 3'024\,364$.

Sistemas de ecuaciones. — Si en vez de una ecuación se trata de dos o más ecuaciones logarítmicas, se puede proceder a resolver cada una de las ecuaciones, si esto es posible. O, como en el caso de los sistemas de ecuaciones normales, se puede eliminar o despejar una incógnita y sustituirla en las demás ecuaciones, hasta encontrar un sistema equivalente en el que una ecuación sea fácilmente resoluble.

Ejemplos : 1.° Resolver $\left.\begin{array}{r} x - y = 15. \\ \log x + \log y = 2'735\,5 \end{array}\right\}$

$$\left.\begin{array}{l} x - y = 15 \\ \log(x \cdot y) = 2'735\,5 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x - y = 15 \\ x \cdot y = 544 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x - y = 15 \\ (15 + y)\,y = 544 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} x - y = 15 \\ 15\,y + y^2 - 544 = 0 \end{array}\right\} y = 17,\ y = -32.$$

Dado que no existen logaritmos de números negativos, la segunda solución -32, no es válida y nos quedamos con la $y_1 = 17$, $x_1 = 32$.

2.° Resolver el sistema $\left.\begin{array}{l} 5^{x+y} = 32'6 \\ 6^x = 7^y \end{array}\right\}$ tomando logaritmos :

$$\left.\begin{array}{r} \log(5^{x+y}) = \log 32'6 \\ x \log 6 = y \log 7 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} x + y = \dfrac{\log 32'6}{\log 5} \\ 0'778\,2\,x - 0'845\,1\,y = 0 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 2'164\,8 \\ 0'778\,2\,x = 0'845\,1\,y \end{array}\right\}$$ sistema que resuelto nos da

$$x = 1'127, \quad y = 1'037\,7$$

Interés compuesto y anualidades

Un capital está colocado a interés compuesto cuando al final de cada unidad de tiempo se suman los intereses al capital para formar nuevos intereses.

La diferencia entre el *interés simple* y el *compuesto* consiste :

a) en el interés simple los intereses se suman al capital al final del tiempo, en tanto que en el interés compuesto los intereses se acumulan al capital al final de cada unidad de tiempo.

b) como consecuencia, en el interés simple los intereses producidos por un determinado capital son iguales todos los años, mientras que en el interés compuesto cada año son mayores.

Fórmulas del interés compuesto. — Sea un capital c que se coloca al interés compuesto durante t años, al r por 1.

Al final del primer año, el capital acumulado es :

$$c_1 = c + i = c + c \cdot r \cdot 1 = c + c \cdot r = c\,(1 + r) \Longrightarrow c_1 = c\,(1 + r).$$

Durante el segundo año, el capital que produce intereses, no es c sino c_1. Como consecuencia, el capital acumulado al final del segundo año será :

$$c_2 = c_1 + i = c_1 + c_1 \cdot r \cdot 1 = c_1 + c_1 \cdot r = c_1\,(1 + r) = c\,(1 + r) \cdot (1 + r) = c\,(1 + r)^2 \Longrightarrow c_2 = c\,(1 + r)^2.$$

En el tercer año el capital a considerar es c_2. El nuevo capital será : $c_3 = c_2 + i = c_2 + c_2 \cdot r \cdot 1 = c_2 + c_2 \cdot r = c_2\,(1 + r) = c\,(1 + r)^2 \cdot (1 + r) = c\,(1 + r)^3$.

En general al cabo de n años, el capital c se habrá convertido en : $C = c\,(1 + r)^n$.

En esta fórmula :

C = capital final acumulado.
c = capital inicial.
n = número de años.
r = tanto por 1 anual.

Problemas de interés compuesto. — 1) *Cálculo del capital final.* — Se realiza mediante la aplicación de la fórmula fundamental de interés compuesto $C = c\,(1 + r)^n$.

Ejemplo : ¿Qué capital se poseerá al cabo de 10 años, colocando 100 000 ptas a interés compuesto del 5 % anual?

En la fórmula general tenemos $C = c\,(1 + r)^n$; $C = 100\,000\,(1 + 0'05)^{10}$; $c = 100\,000\,(1'05)^{10}$.

Tomando logaritmos : $\log c = \log 100\,000 + 10 \log 1'05$; $\log c = 5 + 10 \cdot 0'021\,89 = 5 + 0'218\,90 = 5'218\,90$
antilog $5'218\,900 = 165\,538'5$ ptas.

2) *Cálculo del capital inicial.* — De la fórmula fundamental $C = c\,(1 + r)^n$, se deduce que : $c = \dfrac{C}{(1 + r)^n}$. Ejemplo : calcular el capital que colocado durante 5 años al 5 %, se transforma en un capital de 1 000 000 ptas.

Tomando logaritmos, se tiene :
$\log c = \log c - n \log(1 + r)$;
c = antilog $[\log 1\,000\,000 - 5 \log(1 + 0'05)]$ =
antilog $[5 - 5 \cdot 0'021\,189]$ = antilog $(6 - 0'105\,945)$ =
antilog $5'894\,055 = 783\,529$ ptas.

3) *Cálculo del tiempo.* — Tomando logaritmos en la fórmula fundamental $C = c\,(1 + r)^n$, tenemos $\log C = \log c + n \cdot \log(1 + r)$; $n = \dfrac{\log C - \log c}{\log(1 + r)}$. Ejemplo : calcular el tiempo necesario para que un capital de 100 000 ptas al 5 % se transforme en otro de 150 000 ptas.

$\log C = 5'176\,091$
$\log c = 5$
$\log(1 + r) = \log(1 + 0'05) = 0'021\,189$

$$n = \frac{5'176\,091 - 5}{0'021\,189} = \frac{0'176\,091}{0'021\,189} \simeq 8 \text{ años.}$$

4) *Cálculo del tanto por uno.* — De la fórmula $C = c\,(1 + r)^n$, se deduce : $(1 + r)^n = \dfrac{C}{c}$; $(1 + r) = \sqrt[n]{\dfrac{C}{c}}$;

$$r = \sqrt[n]{\frac{C}{c}} - 1.$$

Ejemplo : ¿A qué tanto por ciento se colocó un capital de 500 000 ptas a interés compuesto, para que al cabo de 5 años se convirtiera en 600 000 ptas?

$$r = \sqrt[5]{\frac{600\,000}{500\,000}} - 1 = \sqrt[5]{\frac{6}{5}} - 1 = \left(\frac{6}{5}\right)^{\frac{1}{5}} - 1.$$

Hallemos separadamente $\left(\dfrac{6}{5}\right)^{\frac{1}{5}} = (1'2)^{\frac{1}{5}}$; tomando logaritmos queda $\log(1'2)^{\frac{1}{5}} = \dfrac{1}{5} \cdot \log 1'2 = \dfrac{1}{5} \cdot 0'079\,181 = 0'015\,836$; antilog $0'015\,836 = 1'037\,14$; $r = 1'037\,14 - 1 = 0'037$; así pues $\% = 3'7$.

Anualidades. — ***De capitalización.*** — Supongamos que cada año se puede ahorrar una cantidad fija de dinero a, que llamaremos anualidad a un tanto por uno r; nuestro

problema es calcular el capital que se habrá conseguido al cabo de n entregas anuales.

La primera anualidad se coloca al principio del primer año; por tanto permanecerá productiva durante los n años, produciendo al final un capital de $a(1+r)^n$.

La segunda anualidad, impuesta a interés compuesto como la primera, producirá intereses durante $n-1$ años, y dará lugar a un capital final de $a(1+r)^{n-1}$.

Así sucesivamente, cada anualidad permanecerá productiva un año menos que la anterior, estando la última anualidad productiva solamente un año. Al año de colocar la última anualidad se retira todo el capital C conseguido mediante estas n imposiciones anuales, y se verifica :

$$C = a(1+r) + a(1+r)^2 + \dots + a(1+r)^{n-1} + a(1+r)^n.$$

Como los sumandos forman parte de una progresión geométrica de razón $1+r$, se podrá calcular el capital final C como suma de los n términos de dicha progresión :

$$C = \frac{a(1+r)^n \cdot (1+r) - a(1+r)}{1+r-1} = \frac{a(1+r) \cdot [(1+r)^n - 1]}{r}.$$

Esta fórmula nos informa sobre el capital conseguido invirtiendo a pesetas cada año, al r por uno anual durante n años.

Algunas veces nos interesará conocer la anualidad necesaria para obtener un capital C al cabo de n años, invertidas las anualidades al r por uno anual.

$$a = \frac{C \cdot r}{(1+r)[(1+r)^{n-1}]}.$$

De amortización. — Supongamos que tenemos que pagar una deuda de D pesetas, y que disponemos de n años para hacerlo, teniendo en cuenta que hemos de pagar también los intereses de dicha deuda al r por uno anual. ¿Qué anualidad deberá ingresarse al mismo r por uno para que los capitales finales conseguidos durante los n años, puedan amortizar la deuda D?

La primera anualidad se pagará al final del primer año después de contraída la deuda. Producirá por tanto intereses durante $n-1$ años y se convertirá en un capital de $a(1+r)^{n-1}$.

La segunda anualidad se paga al final del segundo año del préstamo. Producirá por tanto intereses durante $n-2$ años convirtiéndose en un capital de $a(1+r)^{n-1}$.

De esta manera continuamos sucesivamente hasta las dos últimas anualidades; la penúltima se paga cuando falta un año para cancelar la deuda, convirtiéndose en $a(1+r)$.

La última anualidad no llega a producir intereses; sino que se paga la cantidad a y se cancela la deuda.

La cantidad total que se debe de haber conseguido con el ingreso de las anualidades, es $D(1+r)^n$ dado que la deuda D ha producido intereses durante n años.

Así pues se debe verificar :

$$D(1+r)^n = a + a(1+r) + \dots + a(1+r)^{n-2} + a(1+r)^{n-1}.$$

Puesto que los sumandos forman parte de una progresión geométrica de razón $1+r$, se puede calcular la suma mediante la fórmula S_n que nos da :

$$D(1+r)^n = \frac{a(1+r)^{n-1} - (1+r) - a}{1+r-1} = \frac{a \cdot [(1+r)^n - 1]}{r}.$$

La anualidad a se obtiene despejando en la fórmula anterior : $a = \dfrac{D \cdot r \cdot (1+r)^n}{(1+r)^n - 1}$.

Ejemplos : 1.° Queremos formar un capital de 1 millón de pesetas, al 5% durante 10 años. ¿Qué anualidad de capitalización deberemos entregar?

En la fórmula $a = \dfrac{C \cdot r}{(1+r)[(1+r)^n - 1]}$, tomamos logaritmos :

$$\log a = \log C + \log r - \log(1+r) - \log[(1+r)^n - 1].$$

Cálculo de $(1+r)^n$: $n \log(1'05) = 10 \cdot \log 1'05 = 0'211\,890 \Longrightarrow (1+r)^n = 1'628\,9$; $\log[(1+r)^n - 1] = \log 0'628\,9 = \bar{1}'798\,582$

$\log a = 6 + \bar{2}'698\,970 - 0'021\,189 - \bar{1}'798\,582 = 4'879\,199$

$a = \text{antilog } 4'879\,199 = 75\,718$ ptas.

2.° ¿Qué anualidad se deberá pagar para extinguir una deuda de 1 000 000 ptas, con sus intereses compuestos al 5% en 10 años?

$$a = \frac{D \cdot r \cdot (1+r)^n}{(1+r)^n - 1};$$

$$\log a = \log D + \log r + n \log(1+r) - \log[(1+r)^n - 1];$$

$$(1+r)^n - 1 = (1'05)^{10} - 1 = 0'628\,9;$$

$\log 0'628\,9 = \bar{1}'798\,582$; $\log a = 6 + \bar{2}'698\,970 + 0'211\,890 - \bar{1}'798\,582 = 5'112\,278$; $a = \text{antilog } 5'112\,278 = 129\,502'5$ ptas.

Introducción a la regla de cálculo

Origen. — Como aplicación de la función logarítmica, vamos a considerar un útil extendido hoy en todas las ramas de la técnica : la *regla de cálculo*. Sus orígenes los hemos de situar en el siglo XVI, cuando el escocés John NEPER (1550-1617), descubridor de los logaritmos, construyó una primera regla de cálculo conocida como *tablas de Neper*. Poco más tarde un clérigo inglés William OUGHTRED, empleando dos líneas de números en las que estaban marcados los logaritmos de algunos de ellos, y de tal forma que una se deslizaba sobre la otra, pudo realizar las operaciones de multiplicar y dividir.

La adición de una tercera línea de números a la reglilla se debe a Seth PASTRIDGE en 1671, con lo que se consigue un instrumento idéntico a los hoy conocidos. Algunas innovaciones posteriores fueron debidas a MANNHEIM y LENOIR, que introdujeron el uso del cursor.

Existen diversos modelos de reglas de cálculo, la más conocida de las cuales, es la que vamos a describir aquí, aunque las hay también de forma cilíndrica, circular o toroidal; las formas y diseños tratan de adaptarse a la aplicación específica que de ellas se hace.

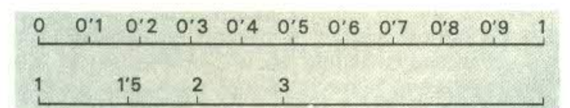
La regla de cálculo ha caído en desuso desde la aparición de las calculadoras electrónicas de bolsillo, pero, lo mismo que hicimos con las tablas de logaritmos, creemos de interés su descripción y funcionamiento.

Construcción de una regla de cálculo. — Tracemos una línea recta, y en ella hagamos dos divisiones convenientemente separadas que señalaremos como 0 y 1. Posteriormente esta longitud dividámosla en 10 partes iguales, obteniendo de esta manera una regla graduada del modo siguiente :

0 0'1 0'2 0'3 0'4 0'5 0'6 0'7 0'8 0'9 1

Tomemos ahora una segunda regla no graduada, de la misma longitud que la anterior. Con la tabla de logaritmos, vayamos encontrando los antilogaritmos (en base 10) de las divisiones de la primera regla, y escribamos, en el mismo lugar donde está el logaritmo, su antilogaritmo.

De este modo nos encontramos con una segunda regla graduada como la siguiente (dibujamos la primera y la segunda debajo) :



En esta segunda regla, como podemos observar, los números 1, 2, 3, ... 10, no están uniformemente (equidistantemente) distribuidos entre la longitud [1, 10], así que la regla es más densa, conforme va acercándose al número 10. Dado que la función logaritmo es biyectiva, es natural que cada punto de la primera regla tenga un original en la segunda, y viceversa. Así, al número 0'301 030 en la primera le corresponde en la segunda su antilogaritmo, que es 2; al número 0'778 151 le corresponde el 6, y así sucesivamente.

Una vez dibujada esta segunda regla, hagamos una copia idéntica de ella. De esta manera tenemos dos reglas idénticas A y B.

Producto de dos números. — Supongamos que queremos realizar la operación 3·2.

Para ello, dejemos la escala B quieta y movamos la A, hasta que el 1 de ésta caiga justamente encima del 2 de la B. Inmediatamente observaremos que debajo del 2 de la A está el 4 de la B; debajo del 3 de la A está el 6 de la B, y entonces $3 \cdot 2 = 6$.

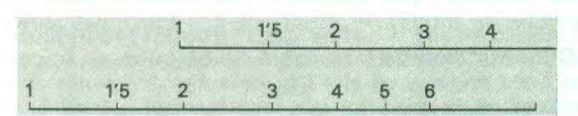
Hagamos otra prueba : dejando la B quieta, desplacemos la A hasta que el 1 de la A coincida con el 2'5 de la B. Entonces observamos que al 2 de la A le corresponde el 5 de la B, al 3 el 7'5, al 4 el 10, etc., o sea hemos multiplicado por 2'5.

¿Cuál ha sido el sistema utilizado para lograr estos resultados? Es inmediato que lo que nosotros hacemos no es más que sumar longitudes de una regla graduada. En efecto, al poner el 1 de A sobre el 2'5 de B, y leer debajo del 2 de A, lo que hacemos es sumar las longitudes correspondientes a las divisiones 2'5 y 2. Pero en realidad estas longitudes no representan a los números reales 2'5 y 2, sino a sus logaritmos : log 2'5 y log 2; y esto por el método seguido para la construcción de la regla.

Ahora bien, la suma de logaritmos de dos números es el logaritmo de su producto, luego sumar los logaritmos equivale a multiplicar los números, y por tanto el lugar exacto donde debe aparecer dicha suma, log 2'5 + log 2, es en el producto $2'5 \cdot 2 = 5$.

Siguiendo este proceso podemos realizar cualquier multiplicación, cuya ley general será :

a) se busca el multiplicando M en B;
b) se hace coincidir el 1 de A sobre M;
c) se busca el multiplicador *m* en A, y
d) debajo de *m* y en B, se encuentra el producto.



Productos mayores que 10. — Si tratásemos de realizar la operación 4·7 por el método anterior, nos veríamos imposibilitados de hacerlo. Para paliar este inconveniente, recordemos que restar logaritmos es equivalente a dividir números, ello quiere decir por ejemplo que si sobre el 9 de B deslizamos el 10 de A, lo que hacemos en realidad es multiplicar por $\frac{9}{10}$, y entonces debajo del 2 aparecería $2 \times \frac{9}{10} = 1'8$.

Consecuentes con esto, para multiplicar 4·7, operaríamos :

a) se busca 4 en B;
b) se superpone el 10 de A sobre el 4 de B;
c) se busca el 7 en A; y
d) se lee el resultado en B que será un número *c*, que multiplicado por 10 es el producto buscado.

División. — En realidad ya hemos aprendido a dividir por 10. El método para realizar cualquier división es el mismo :

a) se busca el dividendo D en B;
b) se hace coincidir el divisor *d*, buscado en la A, con D;
c) se busca el 1 de A, y
d) el cociente está en B, bajo el 1 de la A.

La regla de cálculo así construida, nos permite realizar operaciones elementales; sin embargo las actuales reglas son un poco más complicadas y su uso es más amplio que el de las simples operaciones que nosotros hemos realizado. Describiremos una de esas reglas.

Descripción. — Este instrumento consiste en una doble regla, una de las cuales llamada reglilla, se desliza sobre la otra, denominada regla. En cada una de ellas se han trazado divisiones que representan los logaritmos a una escala determinada de la longitud de la regla. La regla principal tiene dos graduaciones : la graduación superior consta de dos partes idénticas con divisiones numeradas de 1 a 10 que son la escala izquierda o primera escala y la escala derecha o segunda escala. Sobre la primera escala se han escrito los números 1, 2, ... 10, siguiendo el procedimiento que utilizamos en nuestra primera regla de cálculo.

Los intervalos [1, 2], [2, 3] etc., están a su vez graduados por el mismo procedimiento y dan, por ejemplo, entre 2 y 3 los logaritmos de números como 21, 22 etc. Podría continuarse así, pero hay que detenerse, puesto que los trazos así obtenidos están demasiado aproximados.

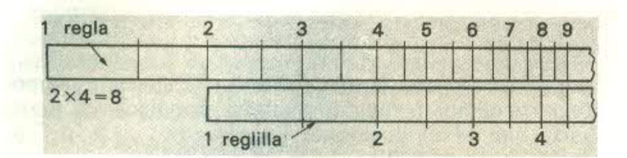
La división de segundo orden determina las décimas de los intervalos numerados : entre 20 y 30 puede leerse 21, 22, etc. Las divisiones de tercer orden no existen más que entre 1 y 2 por una parte, y 2 y 5 por la otra.

La graduación de la regla está reproducida exactamente en la parte superior e inferior de la reglilla, en las cuales se leen los números como en la regla. La parte inferior de ésta contiene una sola escala, que es por consiguiente doble de la primera escala. Es conveniente utilizarla puesto que la aproximación conseguida con su uso es doble que en la escala superior.

Para mayor facilidad en las operaciones, se utiliza un cursor que se desliza sobre los lados de la regla, y que está provisto de una línea perpendicular al eje de aquélla. Esta línea permite situar el número que se lee en la regla frente al número que se lee en la reglilla, y hacer que se correspondan los números de la escala superior con los de la inferior, y recíprocamente.

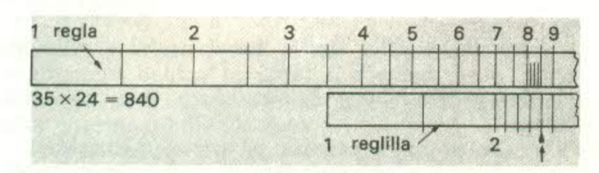
Al dorso de la reglilla hay tres escalas : la escala de uno de los bordes, señalada S, es la escala de los senos, y la del otro borde marcada T, es la escala de las tangentes. Entre ambas se encuentra la escala L, que es la escala de los logaritmos.

Operaciones aritméticas. — *Multiplicación.* — Se utilizan las dos escalas inferiores de la regla y de la reglilla. Supongamos que queremos multiplicar 2 por 4; deslizaremos la reglilla de forma que el origen de sus divisiones — el número 1 — caiga enfrente de la graduación 2 de la regla, que representa el logaritmo de 2.



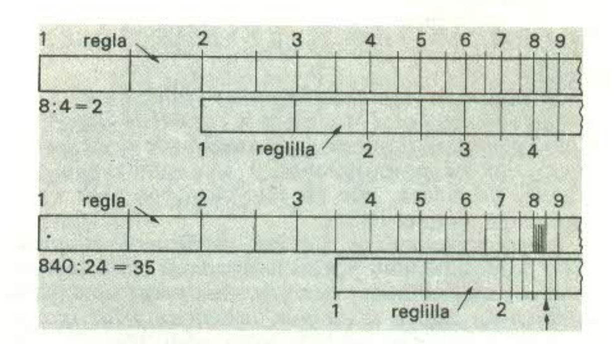
Enfrente de la graduación 4 de la reglilla, se encontrará sobre la regla el número 8.

Supongamos que queremos multiplicar dos números de dos cifras, por ejemplo 35 por 24 : efectuando mentalmente el producto de las cifras de los factores, puede obtenerse la última cifra del producto. Siempre que el producto se encuentre en la primera escala de la regla, el número de cifras del producto será igual a la suma de las cifras de los factores disminuida en una unidad; cuando se encuentre en la segunda escala; el número de cifras del producto será igual a la suma de las cifras de los factores.



División. — Es la operación inversa de la anterior. Para efectuarla se lee el dividendo sobre la regla (en la escala izquierda si la primera cifra del dividendo es mayor que la primera del divisor, y en la escala derecha si es menor) y se coloca debajo el divisor, que se lee en la escala izquierda de la reglilla. El cociente se lee sobre la regla, encima de uno de los indicadores 1 ó 10 de la reglilla.

Si el cociente y el dividendo están en dos escalas diferentes de la regla, el número de cifras enteras del cociente se obtiene, restando el número de cifras enteras del divisor del número de cifras enteras del dividendo. Si el dividendo y el cociente están en una misma escala, hay que añadir una unidad a esta diferencia.



Potencias y raíces cuadradas. — Los números de la escala superior de la reglilla y de la regla son los cuadrados de los números de la escala inferior. Bastará pues con colocar estos números frente a frente. Cuando el número se lea sobre la escala de la derecha, se multiplicará por 10.

Para extraer una raíz cuadrada, la graduación inferior de las raíces de los números de la graduación superior de la reglilla, teniendo en cuenta que si después de dividir el número en períodos de dos cifras, el último período de la izquierda sólo consta de una cifra, habrá que leer el número en la escala izquierda de la regla; si consta de dos cifras, se leerá sobre la segunda escala.

Combinación de productos y cocientes. — Supongamos el número $N = \dfrac{35 \times 4 \times 80}{76 \times 31 \times 2}$ que se quiere calcular. Se efectúan sucesivamente : el cociente $\dfrac{35}{76}$, después el cociente de $\dfrac{35}{76}$ por 31, después el producto de $\dfrac{35}{76 \times 31}$ por 4 y así se continúa.

14. — Álgebra de proposiciones

Términos y proposiciones. Valor y tabla de verdad de una proposición. Proposiciones atómicas y moleculares. Conjunción de proposiciones. Disyunción de proposiciones. Negación de una proposición. Proposición condicional. Proposición bicondicional. Incompatibilidad de proposiciones. Polinomios booleanos. Expresiones tautológicas, anfóteras y contradictorias. Expresiones equivalentes. Leyes del Álgebra de proposiciones. — **Álgebra booleana :** Definición. Principio de dualidad. — **Cuantificadores :** Negación de proposiciones con cuantificadores. Inversión de cuantificadores.

Términos y proposiciones. — El lenguaje escrito, en todas las lenguas, está formado por signos que, agrupados, constituyen palabras; y éstas a su vez, agrupadas o no, forman expresiones.

Las expresiones pueden a su vez tener o no significado. Ejemplos :

1.° Expresiones con significado :

Z = N*x* N/R, donde R es $(ab)\mathrm{R}(cd) \iff a + d = b + c$; *Yo me llamo Pedro.*

2.° Expresiones sin significado :

Amp = $2 - \forall$.

Antonio = $5 - x$.

Las expresiones con significado se denominan *términos lógicos*.

Analicemos ahora otro grupo de expresiones, que son : 8 + 5 = 10; *me llamo; el hierro es un metal.*

De estas expresiones podemos decir :

1) 8 + 5 = 10 es una proposición falsa.

2) *Me llamo,* no se puede decir que tenga significado verdadero o falso, y diremos que no es una proposición.

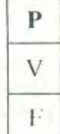
3) *El hierro es un metal,* es una proposición verdadera.

Resumiendo podemos definir : *las expresiones de las que podemos decir que son verdaderas o falsas se llaman proposiciones.*

Valor y tabla de verdad de una proposición. — Una proposición cualquiera ***p***, puede ser verdadera o falsa, pero no ambas cosas a la vez. Si ***p*** es verdadera, diremos que su valor de verdad es V, o bien 1.

Si ***p*** es falsa, diremos que su valor de verdad es F o bien 0.

Llamaremos *tabla de verdad* de una proposición a la siguiente composición :



P
V
F

Proposiciones atómicas y moleculares. — Consideremos las siguientes proposiciones :

p : *Madrid es la capital de España.*

q : *Yo soy español.*

A partir de estas proposiciones, podemos formar las siguientes :

o : *Madrid es la capital de España y yo soy español.*

r : *Yo soy español si Madrid es la capital de España.*

Como podemos observar, la formación de *o* y *r* ha sido a través de las proposiciones *p* y *q*, utilizando unas partículas de enlace, que en este caso han sido « y » y « si ».

A las proposiciones *p* y *q* las llamaremos *atómicas*.

A las proposiciones *o* y *r* las llamaremos *moleculares*.

Resumiendo, *podemos decir que las proposiciones sin partículas de enlace se llaman atómicas y las que las poseen se denominan proposiciones moleculares.*

Conjunción de proposiciones. — Dos proposiciones cualesquiera se pueden combinar a través de la partícula de enlace (en adelante también *operador*) « y », como hemos visto anteriormente, formando una proposición compuesta o molecular, que llamaremos *conjunción* de ambas proposiciones.

Si las proposiciones atómicas eran *p* y *q*, la conjunción de ambas la escribiremos simbólicamente por $p \wedge q$.

Tabla de verdad de la conjunción de proposiciones :

p	q	$p \wedge q$
V	F	F
F	F	F
F	V	F
V	V	V

El valor de verdad de la proposición $p \wedge q$, se rige por las condiciones siguientes :

Si *p* es verdadera y *q* falsa, $p \wedge q$ es falsa.

Si *p* es verdadera y *q* es verdadera, $p \wedge q$ es verdadera.

Si *p* es falsa y *q* verdadera, $p \wedge q$ es falsa.

Si *p* es falsa y *q* es falsa, $p \wedge q$ es falsa.

Ejemplo :

El hombre es un animal y el agua es roja.

El hombre es una piedra y el agua es roja.

El hombre es una piedra y el agua es incolora.

El hombre es un animal y el agua es incolora.

Solo la última proposición es verdadera.

Disyunción de proposiciones. — Dadas dos proposiciones cualesquiera, las podemos combinar utilizando el operador *o*.

La nueva proposición así formada se denomina *disyunción* de proposiciones, y la escribiremos simbólicamente como $p \vee q$.

El valor de verdad de la proposición $p \vee q$, se atiene a las condiciones siguientes :

Si *p* es verdadera y *q* es verdadera, $p \vee q$ es verdadera.

Si *p* es falsa y *q* es falsa, $p \vee q$ es falsa.

Si *p* es verdadera y *q* es falsa, $p \vee q$ es verdadera.

Si *p* es falsa y *q* es verdadera, $p \vee q$ es verdadera.

La tabla de verdad, será :

p	q	$p \vee q$
V	F	V
V	V	V
F	V	V
F	F	F

Ejemplo :

El hombre es un animal o el agua es roja.

El hombre es un animal o el agua es incolora.

El hombre es una piedra o el agua es incolora.

El hombre es una piedra o el agua es roja.

De las cuatro proposiciones anteriores, sólo la última es falsa.

Negación de una proposición. — Dada una proposición *p*, podemos formar una nueva proposición a partir de ella, que simbólicamente escribiremos $\sim p$ o $\neg p$.

Ejemplo :

Proposición *p* : *El hombre es un animal.*

Proposición $\neg p$: *El hombre no es un animal* = Es falso que el hombre sea un animal.

El valor de verdad de la proposición $\neg p$, viene determinado por el de *p*, y su tabla de verdad es :

p	$\neg p$
V	F
F	V

Proposición condicional. — Existen proposiciones de la forma $p \Longrightarrow q$ (*p* implica *q*) o (si se cumple *p* entonces se cumple *q*) o (*p* es suficiente para *q*) o (*q* es necesario para *p*).

El valor de verdad de la proposición condicional $p \Longrightarrow q$ se rige por la tabla de verdad siguiente :

Si *p* es verdadera y *q* es verdadera, $p \Longrightarrow q$ es verdadera.

Si *p* es verdadera y *q* es falsa, $p \Longrightarrow q$ es falsa.

Si *p* es falsa y *q* es verdadera, $p \Longrightarrow q$ es verdadera.

Si *p* es falsa y *q* es falsa, $p \Longrightarrow q$ es verdadera.

p	q	$p \Longrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Ejemplo :

Si Z *no es un cuerpo entonces* $2 \in Z$.

Si Z *no es un cuerpo entonces* $2 \notin Z$.

Si Z *es un cuerpo entonces* $2 \in Z$.

Si Z *es un cuerpo entonces* $2 \notin Z$.

Proposición bicondicional. — La proposición « *p* si y sólo si *q* » (también diremos una condición necesaria y suficiente para *p* es *q*), que se le denota por la expresión $p \Longleftrightarrow q$, viene definida porque su valor de verdad obedece a las condiciones :

Si *p* es verdadera y *q* es verdadera, $p \Longleftrightarrow q$ es verdadera.

Si *p* es falsa y *q* es falsa, $p \Longleftrightarrow q$ es verdadera.

Si *p* es verdadera y *q* es falsa, $p \Longleftrightarrow q$ es falsa.

Si *p* es falsa y *q* es verdadera, $p \Longleftrightarrow q$ es falsa.

La tabla de verdad de la proposición bicondicional será :

p	q	$p \Longleftrightarrow q$
V	V	V
F	F	V
V	F	F
F	V	F

Ejemplo : dados los enunciados.

$\frac{1}{2}$ *es racional* $\Longleftrightarrow \frac{1}{2} = e^p,\ p \in Z.$

$\frac{1}{2}$ *es irraccional* $\Longleftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{p}{q},\ p, q \in Z.$

$\frac{1}{2}$ *es racional* $\frac{1}{2} = \frac{p}{q},\ p, q \in Z.$

$\frac{1}{2}$ *es irracional* $\frac{1}{2} = e^p,\ p \in Z.$

Incompatibilidad de proposiciones. — Dadas dos proposiciones p y q, podemos utilizar un nuevo operador que llamaremos *incompatibilidad* y que representaremos por p/q. El valor proposicional de esta nueva proposición viene dado por la tabla adjunta :

p	q	p/q
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	V

Como podemos observar, el operador p/q es idéntico al $\neg(p \quad q)$.

Todos los operadores antes definidos (en total seis), pueden escribirse en función de la negación y la disyunción. En efecto, existe identidad entre las expresiones siguientes :

$p \wedge q$ y $\neg p \vee \neg q$
$p \Longrightarrow q$ y $\neg p \vee q$
$p \Longleftrightarrow q$ y $(p \Longrightarrow {}') \wedge (q \Longrightarrow p)$
p/q y $\neg p \vee \neg\ q$.

Incluso, podemos escribirlos todos en función del operador incompatibilidad, pues :

$\neg p$ es idéntico a p/q.
$p \vee q$ es idéntico a p/q.
$p \Longrightarrow q$ es idéntico a $p/(q/p)$.

Polinomios booleanos. — Supongamos que las proposiciones p y q no sean fijas, es decir, que les podamos dar valores cualesquiera. Combinemos ahora estas proposiciones utilizando los operadores ya conocidos $\sim$, $\vee$, $\wedge$, $\Longrightarrow$ y $\Longleftrightarrow$. La expresión resultante de la combinación se llama *polinomio booleano*, que representaremos por $f(p,q)$. Consecuentes con esta definición, las expresiones $f(p,q)=[p \wedge \sim q] \Longrightarrow [\sim p \vee q]$ y la $f(p,q,r)=p \wedge q \wedge r$, son polinomios booleanos o expresiones lógicas.

Observemos que a un polinomio booleano no le podemos asignar a priori ningún valor de verdad; sin embargo si a las variables proposicionales p, q, ... les asignamos proposiciones perfectamente conocidas p, q, ... entonces la expresión $f(q_0, q_0)$, si tiene un valor de verdad.

Ejemplo : sea el polinomio booleano $(\sim p \wedge q) \Longrightarrow (p \Longleftrightarrow q)$ y asignemos a las variables proposicionales p y q, las proposiciones particulares

p_0 : $1+1=3$; q_0 : $\frac{1}{2} \in Q$, Q = cuerpo de los números racionales.

Veamos el valor de verdad de la proposición $(\sim p_0 \wedge q_0) \Longrightarrow (p_0 \Longleftrightarrow q_0)$. Para mayor sencillez, llamemos a $\left.\begin{array}{l}\sim p_0 \wedge q_0 = s_0 \\ p_0 \Longleftrightarrow q_0 = t_0\end{array}\right\}$, con lo cual, tenemos que hallar el valor de verdad de $s_0 \Longrightarrow t_0$.

Hallemos primeramente los valores de s_0 y t_0 respectivamente. $s_0 = \sim p_0 \wedge q_0$, o sea $1+1 \neq 3$ y además $\frac{1}{2} \in Q$, que es verdadera según deducimos de la tabla adjunta.

$\sim p_0$	q_0	$\sim p_0 \wedge q_0$
V	V	V

Por otra parte $t_0 = p_0 \Longleftrightarrow q_0$, o sea $1+1=3 \Longleftrightarrow \frac{1}{2} \in Q$, que es falso puesto que tenemos :

p_0	q_0	$p_0 \Longleftrightarrow q_0$
F	V	F

Finalmente analicemos $s_0 \Longrightarrow t_0$:

s_0	t_0	$s_0 \Longrightarrow t_0$
V	F	F

Con lo que resulta que el valor de verdad de la expresión $(\sim p_0 \wedge q_0) \Longrightarrow (p_0 \Longleftrightarrow q_0)$ es falso.

Una manera de simplificar todo el proceso anterior sería mediante la construcción de la siguiente tabla de verdad.

p	q	$\sim p$	$\sim p \wedge q$	$p \Longleftrightarrow q$	$(\sim p \wedge q) \Longrightarrow (p \Longleftrightarrow q)$
V	V	F	F	V	V
V	F	F	F	F	F
F	V	V	V	F	F
F	F	V	F	V	V

En esta tabla hay todo tipo de combinaciones para hallar la solución, siendo sólo necesario ir sustituyendo las variables por los valores dados de p_0 y q_0.

Expresiones tautológicas, anfóteras y contradictorias. — Un polinomio booleano o expresión lógica, como sabemos, no tiene un valor de verdad fijo. Sin embargo si las proposiciones resultantes $f(p_0, q_0, r_0 ...)$ tienen un valor de verdad V, cualesquiera que sean los valores p_0, q_0, r_0, ..., el polinomio se denomina una *tautología* ; si es siempre falso, diremos que es una *contradicción* ; y si el valor de verdad del polinomio depende en cada caso de los valores que tomen p, q, r ... les llamaremos una expresión lógica *anfótera*.

Ejemplo :

$p \wedge q$ es anfótera
$p \vee \sim p$ es una tautología
$p \wedge \sim p$ es una contradicción.

Existen algunos tipos bastantes representativos de tautologías, como por ejemplo la del Boll :

$$p \Longrightarrow (q \wedge r) \Longrightarrow (q \vee s) \Longrightarrow (p \vee s).$$

Expresiones equivalentes. — Dadas las expresiones lógicas $f(p,q,r)$ y $g(p,q,r)$ diremos que son lógicamente equivalentes y escribimos $f(p,q,r) \equiv g(p,q,r)$ $\Longleftrightarrow$ la expresión $f(p,q,r) \Longleftrightarrow g(p,q,r)$ es una tautología.

La relación así definida se demuestra que es de equivalencia.

TEOREMA DE SUSTITUCIÓN. — Si la expresión lógica $f(p,q,r,\ldots)$ es una tautología, entonces la expresión $f[f_1(p,q,r\ldots), f_2(p,q,r\ldots);\ldots]$ es también una tautología, cualesquiera sean las expresiones $f_1, f_2, \ldots$

TEOREMA. — Si se verifica que $f(p,q,r\ldots) \equiv g(p,q,r\ldots)$, entonces se verifica que $f[f_1(p,q,r\ldots), f_2(p,q,r\ldots),\ldots] \equiv g[f_1(p,q,r\ldots), f_2(p,q,r\ldots)\ldots]$ cualesquiera que sean los polinomios $f_1, f_2, \ldots$

Este teorema nos dice que, si en expresiones equivalentes se sustituyen las proposiciones p, q, r... por expresiones cualesquiera, las proposiciones resultantes son equivalentes.

Podemos considerar este teorema como una consecuencia inmediata del principio de sustitución.

Leyes del Álgebra de proposiciones. — Es claro que podemos demostrar inmediatamente, aplicando la relación de equivalencia ya establecida para la equivalencia de proposiciones, las siguientes equivalencias, que constituyen lo que se denomina las leyes del Álgebra de proposiciones.

Observemos que la definición $f \equiv g \Longleftrightarrow \{f \Longleftrightarrow g$ es una tautología$\}$; equivale a dar la siguiente definición : $f \equiv g \Longleftrightarrow$. Poseen la misma tabla de verdad.

$p \vee p \equiv p$	$p \wedge p \equiv p$
$p \vee q \equiv q \vee p$	$p \wedge q \equiv q \wedge p$
$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$	$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$
$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
$p \vee c \equiv p$	$p \wedge t \equiv p$
$p \vee t \equiv t$	$p \wedge c \equiv c$
$p \vee \neg t \equiv t$	$p \wedge \neg p \equiv c$
$\neg\neg p \equiv p$	$\neg t \equiv c,\ \neg c \equiv t$
$\neg(p \cdot q) \equiv \neg p \wedge \neg q$	$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

c es la proposición contradicción.
t es la proposición tautología.

Aplicando el teorema de sustitución antes enunciado, así como el posterior de generalización de dicho teorema, encontraremos las leyes del Álgebra de proposiciones.

Leyes del Álgebra de proposiciones

Idempotencia	$P \vee P \equiv P$	$P \wedge P \equiv P$
Asociativas	$(P \vee Q) \vee R \equiv P \vee (Q \vee R)$	$(P \wedge Q) \wedge R \equiv P \wedge (Q \wedge R)$
Conmutativas	$P \vee Q \equiv Q \vee P$	$P \wedge Q \equiv Q \wedge P$
Distributivas	$P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$	$P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
Identidad	$\begin{cases} P \vee C \equiv P \\ P \vee T \equiv T \end{cases}$	$\begin{cases} P \wedge T \equiv P \\ P \wedge C \equiv C \end{cases}$
Complementarias	$\begin{cases} P \vee \neg P \equiv T \\ \neg\neg P \equiv P \end{cases}$	$\begin{cases} P \wedge \neg P \equiv C \\ \neg T \equiv C; \neg C \equiv C \end{cases}$
De Morgan	$\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$	$\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$

Donde P y Q son expresiones lógicas (polinomios booleanos), T es una tautologia y C una contradicción.

Álgebra booleana

En el estudio de la teoría de Conjuntos y en el de las Proposiciones, hemos encontrado ciertas propiedades parecidas y en algunos casos idénticas. La investigación generalizada de estas propiedades comunes llevó al matemático británico George BOOLE (1815-1864) al concepto que luego se ha denominado *Álgebra booleana*.

Definición — Un conjunto $\mathcal{A}$, en el que se han definido dos operaciones binarias internas $\cup$ y $\cap$, se llama Álgebra booleana si se verifican las siguientes propiedades :

A_1) $\cup$ y $\cap$ son *conmutativas*.

A_2) $\mathcal{A}$ contiene un *elemento neutro* respecto de $\cup$ y otro respecto de $\cap$.

Por ahora, llamaremos al elemento neutro de $\cup$ 0 y al elemento neutro de $\cap$ 1.

A_3) *Doble distributividad :* $\forall a, b, c \in \mathcal{A}$ se verifica :

$a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap (a \cup c)$.

$a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup (a \cap c)$.

A_4) *Complementarias :* $\forall a \in \mathcal{A}, \exists \complement a \in \mathcal{A} / a \cup \complement a = 1;$ $a \cap \complement a = 0$.

Diversos autores utilizan los signos $+$ y $\cdot$ en vez de los signos $\cup$ y $\cap$ para denotar las operaciones internas, así como los $\varnothing$ y E para los 0 y 1.

Hemos de tener muy en cuenta que el 0 y el 1 aquí utilizados no tienen ningún valor numérico, y que sólo son usados por representar ambos la idea de « no existencia » y « valor global » respectivamente.

Las propiedades o postulados A_1, A_2, A_3, A_4 que ha de cumplir $\mathcal{A}$ para ser un Álgebra booleana, es claro que no abarcan el conjunto de leyes que estudiamos para la teoría de conjuntos de proposiciones, y de las que dimos ya sendas tablas. Sin embargo, todas las que faltan pueden deducirse a partir de las A_1, A_2, A_3, A_4.

Principio de dualidad. — Todo teorema que pueda ser deducido de los postulados A_1, A_2, A_3, A_4 es igualmente válido si se cambian entre sí los signos $\cap$ *y* $\cup$ y los signos 0 *y* 1.

En efecto, veamos cómo pueden demostrarse algunas de las leyes que ya vimos para los conjuntos.

1) $\complement(\complement a) = a, \quad \forall a \in \mathcal{A}$. En efecto : $\complement(\complement a) = 1 \cap \complement(\complement a) = (a \cup \complement a) \cap \complement(\complement a) = [a \cap \complement(\complement a)] \cup [\complement(\complement a) \cap \complement a] = [a \cap \complement(\complement a)] \cup 0 = (a \cap \complement a) \cup [a \cap \complement(\complement a)] = a \cap [\complement a \cup \complement(\complement a)] = a \cap 1 = a$.

2) $\forall a \in \mathcal{A}$ el elemento $\complement(a)$ es único.

En efecto, supongamos lo contrario, es decir que existan $\complement(a)$ y $a'/a \cup \complement(a) = 1$, $a \cap \complement(a) = 0$ y también : $a \cup a' = 1$, $a \cap a' = 0$.

Entonces sabemos que

$$\complement(a) = 1 \cap \complement(a) =$$
$$(a \cup a') \cap \complement(a) = (a \cap \complement a) \cup [a' \cap \complement(a)] =$$
$$(a \cap a') \cup [a' \cap \complement(a)] = a' \cap [a \cup \complement(a)] = a' \cap 1 = a',$$

con lo que tenemos que $a' = \complement(a)$.

Cuantificadores

En la teoría de Proposiciones se consideraba que una proposición cualquiera tenía siempre un valor de verdad determinado. Sin embargo, hemos de considerar funciones proposicionales, cuyo valor dependa de un cierto elemento x. A una función de este tipo, se llama una propiedad de x. Estas funciones proposicionales pueden depender de más de un elemento $f(x, y, z \ldots)$. Por ejemplo :

$$x \text{ es número racional} \iff x = \frac{p}{q},\ p,\ q \in Z.$$

A partir de estas funciones proposicionales, podemos crear nuevas proposiciones. En el ejemplo anterior, si sustituimos x, p y q por números cualesquiera, obtendremos proposiciones que pueden ser verdaderas o falsas.

Ejemplo : sea la relación $x < y$, que es una función binomia; sustituyendo x e y por números cualesquiera, obtenemos proposiciones ... « $3 < 5$ » ... « $\frac{1}{3} < \frac{1}{5}$ » que pueden ser verdaderas o falsas.

Observemos que la variable o variables x pueden variar sobre un conjunto $\mathcal{A}$ ya determinado, que llamaremos *dominio de la función proposicional*.

DEFINICIÓN. — Se llama *Conjunto de validez* V_f de una función proposicional $f(x)$, al conjunto de todos los elementos p tales que la proposición o expresión lógica $f(p)$ es verdadera.

DEFINICIÓN. — Podemos cuantificar las funciones proposicionales mediante el empleo de dos signos llamados cuantificadores : $\forall$ y $\exists$ que se denominan *universal* y *existencial*, respectivamente. Así, dada la función $f(x)$, podemos transformarla en dos proposiciones : « $\forall x, f(x)$ » y « $\exists x, f(x)$ » que leeremos « Para todo x, se tiene $f(x)$ » y « Existe un x tal que se tiene $f(x)$ ».

Ejemplo : $\forall x \in Q,\ \exists p,\ q \in Z/x = \frac{p}{q}$.

Negación de proposiciones con cuantificadores. — Supongamos la proposición « Existe al menos un número racional que no es real », que podemos escribir $\exists\, x \in Q/x \notin R$.

Hallemos la negación de dicha proposición. Lógicamente será « Es falso que existe un número racional que no es real » y escribiremos $\forall x \in Q,\ x \in R$.

Si hacemos $x \in R \equiv f(x)$, obtenemos $\neg(\exists\, x \in Q/\exists\, f(x)) \equiv \forall x \in Q,\ f(x)$.

Este resultado obtenido, se conoce como *teorema de Morgan*.

Inversión de cuantificadores. — Si en una expresión lógica intervienen los dos cuantificadores, no se puede invertir su orden. En efecto, consideremos la siguiente proposición verdadera :

$\forall r_1 \in R,\ \exists\, r_2 \in R/r_2 < r_1$, que significa : para todo número real cualquiera, existe siempre uno menor que él.

Si invertimos el orden obtenemos :

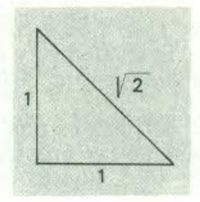
$\exists\, r_2 \in R,\ \forall r_1 \in R\ r_2 > r_1$, que es falsa, puesto que no hay ningún número real mayor que todos los demás.

Análisis

15. — Cuerpo de los números reales

Números irracionales. Sucesiones. *Regulares. Nulas. Equivalentes.* Propiedades de las sucesiones regulares. Operaciones entre sucesiones regulares. *Producto.* Adición y multiplicación en R. Cuerpo de los números reales. — **Propiedades fundamentales de R :** R es un cuerpo ordenado. R es un cuerpo arquimediano. R es un cuerpo completo. Raíz enésima de un número real. Grupo aditivo de los números reales. Grupo multiplicativo de los números reales. — **Topología de la recta real :** Intervalos abiertos y cerrados. Punto aislado. Propiedad fundamental de R. Conjuntos acotados de R. Diámetro de un conjunto. Teorema de Heine-Borel-Lebesgue. Teorema de Bolzano-Weierstrass. — **Números complejos :** Igualdad. Operaciones internas. *Adición. Producto.* Isomorfismo de C_0 en R. Unidad imaginaria. Módulo de un número complejo. Representación geométrica de los números complejos. Forma exponencial de un número complejo. Módulo, argumento y forma exponencial de un número complejo. Potencias y raíces de números complejos. *Fórmula de Moivre.* Logaritmos complejos. Potencias complejas de números complejos.

Números irracionales. — La existencia del número racional, con el cual podemos abordar la resolución de algunos problemas de medida, topa precisamente en este terreno con inconvenientes imposibles de resolver. La más elemental de las medidas, como la de la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles o el de longitud de una circunferencia, no pueden resolverse únicamente con la existencia del número racional. En efecto, el teorema de Pitágoras nos dice que la medida o longitud de la hipotenusa del triángulo de la figura adjunta es $\sqrt{2}$. ¿Es este número, $\sqrt{2}$, racional? De la misma manera, el cociente entre la longitud de una circunferencia y su diámetro es un número que llamaremos π (pi) y cuya expresión aproximada es 3'1416.



Si así fuese, $\sqrt{2}=\frac{p}{q}$, donde p y q son números enteros primos entre sí.

$\sqrt{2}=\frac{p}{q} \Longrightarrow 2=\frac{p^2}{q^2} \Longrightarrow p^2=2q^2$. Dado que $p^2=2q^2 \Longrightarrow p$ es un número par, $q^2=\frac{p}{2}\cdot p$ y entonces q^2 también sería par.

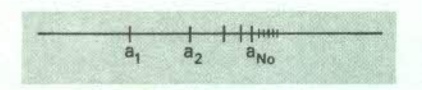
Ahora bien, si q^2 es par, esto implica que q también sería par. O sea, que a partir de la hipótesis de que p y q son primos entre sí, hemos llegado a la conclusión de que ambos son pares. Lo cual contradice la hipótesis inicial, con lo que deducimos que ésta no era verdadera, o, lo que es lo mismo, $\sqrt{2}$ no es un número racional. De igual manera podemos demostrar que $\sqrt[n]{2}\not\in Q$, $\sqrt{3}\not\in Q$ etc. Existen de esta manera una infinidad de números no racionales. El estudio de estos nuevos entes nos lleva de forma natural a la construcción de un nuevo cuerpo que llamaremos de los números reales. Existen diversos caminos para llegar a la existencia de dicho cuerpo R. Nosotros hemos preferido hacerlo a través del método de Cantor. Otro método muy común es el de las cortaduras de Dedekind.

Para hacernos una imagen intuitiva del método seguido, podemos considerar los números como puntos de una recta orientada.

Sucesiones. — *Regulares.* — Una sucesión de números racionales es un conjunto ordenado de números racionales $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ que designaremos por $\{a_n\}$. También podemos decir que es una aplicación de $N \longrightarrow Q$, definida por $f(n)=a_n$. *Una sucesión de racionales $\{a_n\}$ se dice que es regular o de Cauchy, si dado un número racional ε arbitrariamente pequeño, pero fijo,*

$\exists\, N_0\in N/\forall p, q, > N_0,\ p, q\in N \Longrightarrow |a_p - a_q| < \varepsilon$.

Intuitivamente, la imagen de una sucesión regular sobre una recta es la de una sucesión de puntos tales que a partir de uno en adelante a_{N_0}, la distancia entre dos de ellos puede ser tan pequeña como pensemos, o lo que es lo mismo, a partir del punto a_{N_0}, todos los elementos a_n, van acumulandose sobre un punto fijo.



Nulas. — *Una sucesión de números racionales $\{a_n\}$ se dice que es nula si $\forall \varepsilon > 0$, ε arbitrariamente pequeño,* $\varepsilon\in Q, \exists\, N_0/\forall n > N_0 \Longrightarrow |a_n| < \varepsilon$. Utilizando otro lenguaje, podríamos decir que $\{a_n\}$ es nula si su límite es cero.

Toda sucesión nula es regular, como podemos deducir solamente con ver que $|a_p - a_q| \leq |a_p| + |a_q|$; ahora bien

$$|a_p| < \frac{\varepsilon}{2},\ |a_q| < \frac{\varepsilon}{2} \Longrightarrow |a_p - a_q| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} \Longrightarrow |a_p - a_q| < \varepsilon.$$

Equivalentes. — *Dos sucesiones regulares $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$, se dice que son* equivalentes *y escribiremos $\{a_n\}\sim\{b_n\}$ si, y sólo si, la sucesión $\{a_n - b_n\}$ es una sucesión nula.*

La relación $\sim$ así definida es una relación de equivalencia puesto que cumple las propiedades :

1) *Reflexiva.* $\{a_n\}\sim\{a_n\}$, puesto que $\{a_n + a_n\}=\{0\}$.

2) *Simétrica.* Si $\{a_n\}\sim\{b_n\} \Longrightarrow \{b_n\}\sim\{a_n\}$ ya que $|a_n - b_n| = |b_n - a_n|$.

3) *Transitiva.* Si $\{a_n\}\sim\{b_n\}$ y $\{b_n\}\sim\{c_n\} \Longrightarrow \{a_n\}\sim\{c_n\}$ en efecto, $|a_n - c_n| = |a_n - b_n + b_n - c_n| \leq |a_n - b_n| + |b_n - c_n| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} \Longrightarrow |a_n - c_n| < \varepsilon$, para un cierto número $N > \max\{N_1, N_2\}$ donde N_1 y N_2 son dos números naturales tales que

$$\forall n > N_1,\ \forall n > N_2 \Longrightarrow |a_n - b_n| < \frac{\varepsilon}{2},\ |b_n - c_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

El conjunto cociente de las sucesiones de Cauchy sobre la relación de equivalencia antes definida se llama conjunto de los números reales R. *Un número real es así una clase de equivalencia formada por una sucesión regular y todas las infinitas sucesiones regulares equivalentes a ellas.*

Propiedades de las sucesiones regulares. — Una sucesión $\{a_n\}$ se dice que está acotada inferiormente en valor absoluto, si existe un número racional c, tal que se verifica $\forall n\in N$ que $|a_n| > c$. De idéntica manera diremos que $\{a_n\}$ está acotada superiormente, si

$\exists\, M\in Q/\forall n\in N \Longrightarrow |a_n| < M$.

Propiedad 1. Toda sucesión regular está acotada en valor absoluto superiormente.

Si $\{a_n\}$ es regular $\Longrightarrow \forall \varepsilon > 0$, $\exists\, N_0 | \forall n > N_0 \Longrightarrow |a_p - a_q| < \varepsilon$, haciendo $\varepsilon = 1$, y $p = N_0 + 1$, $q = N_0 + t$, t cualquiera, $\Longrightarrow |a_q| = |a_q - a_p + a_p| \leq |a_q - a_p| + a_p| < 1 + |a_p|$. Ahora bien, esta desigualdad $|a_q| < |a_p| + 1$, se verifica $\forall q$, lo cual implica que el mayor de los números racionales $|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{N_0}|$, $1 + |a_p|$ es una cota superior de $|a_n|$.

Propiedad 2. Toda sucesión regular no nula está acotada inferiormente en valor absoluto a partir de un cierto término. La demostración de esta propiedad es similar a la anterior.

Propiedad 3. Dada una sucesión regular $\{a_n\}$, la $\{b_n\}$ obtenida de la anterior suprimiendo un número finito de términos iniciales $a_1, \ldots, a_{N_0}$, es equivalente a la $\{a_n\}$.

La sucesión $\{b_n\} = \{a_{N_0+n}\}$ es regular, y además $|a_p - a_{N_0+n}| < \varepsilon$, $\forall p > N_0$.

Operaciones entre sucesiones regulares. — Dadas $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$, definimos la sucesión suma $\{a_n\}+\{b_n\}$ como la sucesión $\{c_n\}$, cuyo término enésimo es $c_n = a_n + b_n$.

La operación así definida es una operación interna puesto que $\{c_n\}$ es regular. En efecto : sabemos que $\forall \varepsilon > 0 \exists\, N_1,\ N_2\in N/\forall p, q, > N_1,\ N_2 \Longrightarrow |a_p - a_q| < \frac{\varepsilon}{2}$, $|b_p - b_q| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Ahora bien $|c_p - c_q| = |a_p - a_q - b_p + b_q| \leq |a_p - a_q| + |b_q - b_p| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} \Longrightarrow |c_p - c_q| < \varepsilon$ c.q.d.

1) *Asociativa.* $[\{a_n\}+\{b_n\}]+\{c_n\} = \{a_n\}+[\{b_n\}+\{c_n\}]$.

2) *Conmutativa.* $\{a_n\}+\{b_n\} = \{b_n\}+\{c_n\}$.

3) *Elemento neutro.* $\forall\{a_n\}$, la sucesión nula $\{\varepsilon_n\}$ es el elemento neutro, puesto que $\{a_n\}+\{\varepsilon_n\} = \{a_n\}$.

4) *Elemento simétrico.* $\forall\{a_n\}$ la sucesión $\{-a_n\}$ es el elemento simétrico, puesto que $\{a_n\}+\{-a_n\} = \{0\}$.

El conjunto de las sucesiones regulares respecto de la adición así definida, tiene estructura de *grupo abeliano*.

Producto. — Dadas $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ ambas regulares, definimos la sucesión $\{a_n\} \cdot \{b_n\} = \{a_n \cdot b_n\}$.

La operación así definida es interna, puesto que $|a_p b_p - a_q b_q| = |a_q (b_q - b_p) + b_p (a_q - a_p)|$.

Supongamos que A y B son cotas superiores de $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ respectivamente:

$|a_p b_p - a_q b_q| < A|b_p - b_q| + A|a_p - a_q|$ ha de ser menor que ε. Para lograr esto, haremos $|b_p - b_q| < \frac{\varepsilon}{2A}$, donde p y $q > N_1$ y $|a_p - a_q| < \frac{\varepsilon}{2B}$, $p, q < N_2$.

Haciendo ahora $p, q > \max\{N_1 N_2\}$, habremos demostrado lo que queríamos, ya que:

$$|a_p b_p - a_q b_q| < A\frac{\varepsilon}{2A} + B\frac{\varepsilon}{2B} = \varepsilon.$$

1) *Asociativa.* $[\{a_n\} \cdot \{b_n\}] \cdot \{c_n\} = \{a_n\} \cdot [\{b_n\} \cdot \{c_n\}]$.
2) *Conmutativa.* $\{a_n\} \cdot \{b_n\} = \{b_n\} \cdot \{a_n\}$.
3) *Elemento neutro.* Que es la sucesión $\{1\} = 1, 1, 1, \ldots$
4) *Elemento simétrico.* De la sucesión $\{a_n\}$ es la sucesión $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$.

Respecto del producto, el conjunto de las sucesiones regulares posee estructura de *grupo conmutativo*.

Adición y multiplicación en R. — De manera natural, definimos la suma y producto de clases de sucesiones de Cauchy; para ello no tenemos más que demostrar las propiedades uniformes de la suma y producto definidas para las sucesiones regulares.

NOTACIÓN. — La clase de equivalencia a la que pertenece la sucesión regular $\{a_n\}$ la vamos a denotar $\{\overline{a_n}\}$.

Suma : $\{\overline{a_n}\} + \{\overline{b_n}\} = \{\overline{a_n + b_n}\}$.

PROPIEDAD UNIFORME. — La suma no depende de los representantes elegidos.

Sean, en efecto, $\{a'_n\}$ y $\{b'_n\}$ tales que $\{a_n\} \sim \{a'_n\}$, $\{b_n\} \sim \{b'_n\}$. Hemos de demostrar que $\{a'_n + b'_n\} \sim \{a_n + b_n\}$, o lo que es lo mismo, que $\{a'_n + b'_n - a_n - b_n\} \sim \{0\}$.

En efecto,

$$|a'_n + b'_n - a_n - b_n| \leq |a'_n - a_n| + |b'_n - b_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

La adición de números reales así definida posee las propiedades asociativa, conmutativa, elemento neutro y elemento simétrico. O sea, R *posee un grupo aditivo abeliano*.

Multiplicación : $\{\overline{a_n}\} \cdot \{\overline{b_n}\} = \{\overline{a_n \cdot b_n}\}$.

Esta operación, definida entre clases de equivalencia, no depende para nada de los representantes elegidos. La demostración es idéntica a la anterior, y se puede afirmar como antes que los números reales *poseen un grupo multiplicativo abeliano*.

Cuerpo de los números reales. — Para demostrar que (R, +, ·) es un cuerpo, no nos queda más que ver la propiedad distributiva del producto respecto de la suma: $[\{a_n\} + \{b_n\}] \cdot \{c_n\} = \{a_n\} \cdot \{c_n\} + \{b_n\} \cdot \{c_n\}$ la cual es inmediata.

El cuerpo de los números racionales, Q, puede considerarse como un subcuerpo de R, ya que es isomorfo al conjunto Q* de las sucesiones $\{a_n\} = \left\{\frac{p}{q}\right\} = \frac{p}{q}, \frac{p}{q}, \frac{p}{q}, \ldots$

Este subconjunto Q* es un *cuerpo*, lo cual significa que a través del isomorfismo φ :

$$Q^* \longrightarrow Q$$
$$\left\{\frac{p}{q}\right\} \longrightarrow \frac{p}{q}.$$

Q es un subcuerpo de R.

Propiedades fundamentales de R

R es un cuerpo ordenado. — Esto significa que se satisfacen los siguientes axiomas:

1) $x \leq y,\ y \leq z \implies x \leq z,\ \forall x, y, z \in R$
2) $x \leq y,\ y \leq x \implies x = y$.
3) $\forall x, y \in R$, se verifica que $x \leq y$ o $y \leq x$.
4) $x \leq y \implies x + z \leq y + z$.
5) $0 \leq x \wedge 0 \leq y \implies 0 \leq x \cdot y$.

La relación de orden $\leq$, caracterizada por los axiomas anteriores, es equivalente a : $x \leq y \iff x < y$ o $x = y$ donde el signo $<$ es «menor que».

La relación «$x \leq y \wedge x \neq y$» se indica por $x < y$ o $y > x$.

DEFINICIONES. — Dados dos números reales $a, b \in R$, tal que $a < b$, el conjunto de números x tales que $a < x < b$, se llama *intervalo abierto de extremos* **a**, y **b**, y lo indicamos por (a, b) o $]a, b[\iff (a, b) = \{x \in R / a < x < b\}$. *Intervalo cerrado de extremos **a** y **b*** $[a, b]$, es el conjunto de los números $x \in R / a \leq x \leq b$. Simbólicamente escribiremos $[a, b] = \{x \in R / a \leq x \leq b\}$.

De la misma manera, podemos definir intervalos semiabiertos

$(ab] = \{x \in R / a < x \leq b\}$ o el $[ab) = \{x \in R / a \leq x < b\}$.

TEOREMA DE LOS INTERVALOS. — Dada la sucesión $\{I_n\}$ de intervalos cerrados, tales que cada intervalo está encajado en el anterior $I_n \supset I_{n+1}$, y que la longitud de I_n tiende a cero, cuando $n \longrightarrow \infty$, existe un número real, y sólo uno común a todos los intervalos.

Demostración . sea la sucesión $I_1, I_2, I_3 \ldots I_n \ldots$ de intervalos cerrados, y las parejas de números reales $a_1 b_1$; $a_2 b_2$; ...; $a_n b_n$, los extremos de dichos intervalos.

Puesto que los intervalos están encajados, se verificará : $a_1 \leq a_2 \ldots \leq a_n \ldots \leq a_q < b_q \leq \ldots \leq b_n \ldots \leq b_2 \leq b_1$.

La sucesión de números reales $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n$ es regular y define por tanto un número real I, común a todos los intervalos, ya que para todo n, se verifica que $I - a_n$ es una sucesión positiva y $I - b_n$ es una sucesión negativa.

Este número I es único, pues suponiendo que exista otro J que gozara de la misma propiedad, se verificaría :

$b_n - a_n > |I - J|$, y entonces, al ser $I \neq J \implies$ que la diferencia $b_n - a_n$ sería mayor que un cierto número fijo, lo cual implica que $\lim\limits_{n \to \infty} (b_n - a_n) \neq 0$ en contra de la hipótesis.

R es un cuerpo arquimediano. — Decir que R es arquimediano, equivale a decir que en

$\forall a,\ b \in R / 0 < a < b \implies$ existen números enteros $p / b < p \cdot a$.

Supongamos que a y b, vienen definidos por las sucesiones regulares $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$.

Sean α y β las cotas inferior y superior de $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ respectivamente.

Dado que Q es arquimediano, esto implica que existe $p / p \cdot \alpha > \beta$. Pero $a_n > \alpha \implies a \geq \alpha \implies pa \geq p\alpha$ por otra parte, $b \leq \beta$ y se verifica que $pa > b$, c.q.d.

R es un cuerpo completo. — El cuerpo R se ha obtenido del cuerpo Q, estudiando tipos especiales de sucesiones. Cabe suponer que siguiendo el mismo procedimiento y definiendo sucesiones regulares de números reales, podríamos llegar a la obtención de otro cuerpo que contuviese dentro de sí un subcuerpo isomorfo R. Es precisamente la falsedad de esta extrapolación lo que vamos a demostrar.

TEOREMA. — Toda sucesión regular de números reales es equivalente a una sucesión de números racionales, y ambas definen un número real.

Sea $\{A_n\}$ una sucesión de Cauchy de números reales, y sea A_p un número real cualquiera de esa sucesión. Es claro que A_p está definido por una sucesión de números racionales y todas sus equivalentes, o sea, $A_p = \{\overline{a_{pi}}\}$.

Una sucesión cualquiera de $\{\overline{a_{pi}}\}$ sería la a_{p1}, a_{p2}, ..., a_{pn}, ...

Es claro que podemos elegir un i de manera que $|A_p - a_{pi}| < 10^{-p}$. Haciendo ahora $a_{pi} = b_p$, una vez elegido y fijo i. La sucesión $\{A_n\}$ es equivalente a la $\{b_n\}$, puesto que $\{A_n - b_n\} \sim \{0\}$, dado que la sucesión $\{A_n\}$ es regular, también lo es la $\{b_n\}$ y define un número real A sobre R. La sucesión $\{A_n\}$ equivalente a ella, definirá el mismo número A.

DEFINICIÓN. — Un subconjunto $A \subset R$, se dice que posee una cota superior M, si $\forall x \in A$, $x < M$.

De la misma manera, $A \subset R$ posee una cota inferior m, si $\forall x \in A$, $x > m$.

Raíz enésima de un número real. — Si a es positivo, la ecuación $x^n - a = 0$, admite una raíz positiva y solamente una.

Sabemos que $P(x) = 0 \iff x^n - a = 0$, es tal que $P(0) = -a < 0$, y $P(a) > 0$, siempre que $a > 1$. Por otra parte, $P(1) > 0$ si $a < 1$. Existe pues una raíz positiva al menos.

No puede haber más de una, puesto que si $a > a' \implies a^n > a'^n$, $a > 0$, $a' > 0$.

Grupo aditivo de los números reales. — El conjunto $(R, +)$, que hemos visto es un grupo abeliano, posee además las siguientes propiedades :

1) Entre dos elementos de $(R, +)$ existen infinitos elementos de $(R, +)$.

2) $(R, +)$ es arquimediano.

3) Se cumple el principio de los intervalos.

Grupo multiplicativo de los números reales. — El conjunto $(R^+, \cdot)$ de los números reales positivos posee las siguientes propiedades :

1) Entre dos elementos de $(R^+, \cdot)$ existen infinitos elementos de $(R^+, \cdot)$.

2) $(R^+, \cdot)$ es arquimediano en el sentido siguiente : Dados dos números reales $1 < a < b$, la sucesión a, a^2, a^3, ..., a^n, ... es tal que $\exists N_0/a$ partir de a^{N_0} se verifica $\forall n > N_0$ que $a^{N_0} > b$.

3) Se cumple el principio de los intervalos.

Una vez definidos ambos grupos y conocidas las propiedades anteriores, podemos establecer una aplicación de $(R, +) \longrightarrow (R^+, \cdot)$, tal que se conserven las propiedades anteriores. Esta aplicación que vamos a definir es un isomorfismo para estas propiedades, aunque no es un isomorfismo en el sentido de que es una biyección entre $(R, +)$ y $(R^+, \cdot)$. La correspondencia la vamos a definir de la siguiente manera :

Sea el conjunto $-n \ldots -3 -2 -1\, 0\, 1\, 2 \ldots n \subset (R, +)$ y el conjunto $a^{-n} \ldots a^{-2} a^{-1}\, 1\, a\, a^2 \ldots a^n \subset (R^+, \cdot)$; definimos : $f(x) = a^x$, $f(0) = 1$.

Como podemos ver inmediatamente $f^{-1}(a^p) = p$.

Generalizando, podemos definir

$$f^{-1}(a^{\frac{p}{q}}) = \frac{p}{q} \quad \text{o} \quad f\left(\frac{p}{q}\right) = a^{\frac{p}{q}}.$$

Es esta correspondencia la que nos va a permitir más tarde la definición de funciones exponenciales y logarítmicas.

Topología de la recta real

Intervalos abiertos y cerrados. — Recordamos las definiciones ya dadas para intervalos abiertos y cerrados de R.

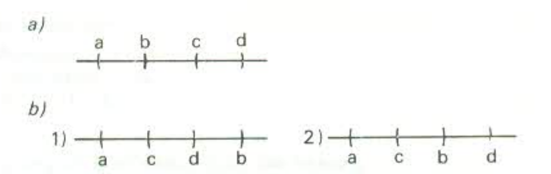
$(a, b) = \{x \in R/a < x < b\}$; $[a, b] = \{x \in R/a \leq x \leq b\}$.

TEOREMA. — La intersección finita de intervalos abiertos es un intervalo abierto.

Demostramos el teorema para el caso de $n = 2$, pues aplicando la propiedad asociativa, todo conjunto de operaciones finito que posea dicha propiedad, lo podemos reducir a operaciones entre dos elementos.

Sean (a, b) y (c, d), y analicemos $(a, b) \cap (c, d)$.

Pueden ocurrir dos casos : a) $(a, b) \cap (c, d) = \emptyset$, que consideraremos un intervalo abierto; b) $(a, b) \cap (c, d) \neq \emptyset$; a su vez distinguiremos dos subcasos : 1) que $(c, d) \subset (a, b)$ en cuyo caso $(a, b) \cap (c, d) = (c, d)$ que es abierto, y 2) que $(a, b) \not\subset (c, d) \wedge (c, d) \not\subset (a, b)$. En este último caso la intersección será (c, b) o (a, d) ambos abiertos, y que corresponden a las distintas posiciones de los extremos.



DEFINICIÓN. — Un subconjunto A de R es abierto, si es vacío, o si $\forall x \in A$, existe un intervalo abierto contenido en A y que contiene a x.

TEOREMA. — Todo intervalo abierto de la recta real es un conjunto abierto.

Sea (a, b) un intervalo abierto; hemos de ver que $\forall x \in (a, b)$ existe un intervalo abierto $(a', b') \subset (a, b)/x \in (a' b')$. La construcción de ese intervalo abierto buscado es inmediata, basta hacer $(a', b') = (a, b)$.

Una vez definidos los conjuntos abiertos de R, obtenemos las consecuencias siguientes :

T_1 : la reunión finita o infinita de abiertos es abierta;

T_2 : la intersección finita de abiertos es abierta;

T_3 : R y $\emptyset$ son abiertos.

El conjunto formado por todos los abiertos de R con las propiedades $T_1 T_2 T_3$ se denomina una Topología $\mathcal{T}$ sobre R, o bien se dice que el espacio R se ha topologizado, con la topología $\mathcal{T}$.

Las propiedades $T_1 T_2 T_3$ son inmediatas en su demostración. En efecto :

T_1 : Sean $A_1 \ldots A_n \ldots \in \mathcal{T}$, hemos de ver que $\bigcup_1^\infty A_i \in \mathcal{T}$, o lo que es lo mismo, $\forall x \in \bigcup A_i$, $\exists$ un intervalo abierto $I \subset \bigcup A_i / x \in I$.

En efecto, si $x \in \bigcup A_i \implies x \in$ a algún A_i, si $x \in A_i$, como $A_i \in \mathcal{T} \implies \exists I_i / x \in I_i \subset A_i$, pero si $I_i \subset A_i \implies I_i \subset \bigcup A_i \implies x \in I_i \subset \bigcup A_i$, c.q.d.

T_2 : Veamos el caso en que sólo hacemos intersección entre dos abiertos. Sean A y B ambos pertenecientes a $\mathcal{T}$ hemos de ver que $A \cap B \in \mathcal{T}$. Si $A \in \mathcal{T} \implies A = \bigcup_i A_i$ y $B = \bigcup_j B_j$, donde los A_i y B_j son intervalos abiertos $A \cap B = (\bigcup A_i) \cap (\bigcup B_j) = \bigcup_{ij} (A_i \cap B_j)$. Ahora bien, la

intersección de dos intervalos abiertos es abierta, lo cual implica que $A_i \cap B_j$ es abierto, y la unión de cualquier número de abiertos es abierta por $T_1 \Longrightarrow A \cap B$ es abierto.

T_3 : R es abierto, pues $\forall x \in R$, $\exists$ un intervalo $I \subset R$, $x \in I$. $\varnothing$ es abierto por la misma razón.

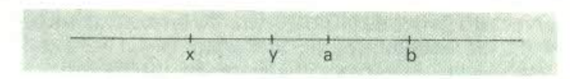
DEFINICIÓN. — *Un subconjunto* A *de* R *es cerrado, si su complementario* $\complement A$ *es abierto.*

Aplicando el principio de dualidad estudiado en el Álgebra de conjuntos, obtenemos las propiedades siguientes.

T_1' : Toda intersección de cerrados es cerrada.
T_2' : La unión finita de cerrados es cerrada.
T_3' : R y $\varnothing$ son cerrados.

TEOREMA. — Todo intervalo cerrado $[a,b] \subset R$ es un conjunto cerrado.

Basta para demostrarlo comprobar que $R-[a,b]$ es abierto. En efecto, sea $x \in R-[a,b]$ o $x \in \complement[a,b]$ un punto cualquiera. Teniendo en cuenta que entre x y a hay infinitos números reales, sea y uno cualquiera de ellos; el intervalo $(2x-y,\, y) \subset \complement A$, $\wedge\, x \in (2x-y,\, y)$, lo cual implica que $\complement A$ es abierto.



DEFINICIÓN. — *Dado un punto* $x \in R$, *se llama entorno* Vx *de* x, *cualquier subconjunto de* R *que contiene un abierto que a su vez contiene* a x.

Según esta definición, todo intervalo abierto de R que contenga a x es un entorno de x, puesto que dicho intervalo se contiene a sí mismo, que es un abierto de R.

DEFINICIÓN. — *Un punto* $x \in R$ *es punto de acumulación de un subconjunto* A *de* R, *si en todo entorno de* x *existe al menos un punto de* A *distinto de* x.

De la definición de punto de acumulación se deduce que si existe un punto de A distinto de x, existen también una infinidad de puntos distintos de x.

Si no fuese así, existiría un intervalo abierto $(a,b)/x \in (a,b)$ y que contuviese sólo un número finito de puntos y_i de A. Sea r el menor de los números $|x-y_1|$, $|x-y_2|$, ... $|x-y_n|$; entonces el entorno $V(x, r/2)$ será un entorno de x que no contendrá puntos de A distintos de x, lo cual es una contradicción.

Dado un conjunto S y un punto de acumulación de dicho conjunto x_0, x_0 no tiene necesariamente que pertenecer a dicho conjunto S. Por ejemplo, dado el conjunto $A=\{1/n\}$ de puntos de R, su punto de acumulación es 0, que no pertenece a la sucesión $\{1/n\}$.

TEOREMA. — Un conjunto cerrado contiene todos sus puntos de acumulación e inversamente todo conjunto $S \subset R$ que contenga todos sus puntos de acumulación es cerrado.

Demostración : sea S cerrado y x_0 un punto de acumulación de S. Si $x_0 \in \complement S$, como $\complement S$ es abierto $\Longrightarrow$ existe un entorno de x_0 contenido en $\complement S \Longrightarrow$ la intersección de dicho entorno con S, $V(x_0) \cap S = \varnothing$, lo cual contradice la hipótesis de que x_0 es de acumulación de S.

Inversamente, sea S un conjunto tal que $\complement S$ no contiene ningún punto de acumulación de S. Esto implica que $A\, x \in \complement S$, y existe un entorno $V(x)$ totalmente contenido en $\complement S$. Esto significa que $\complement S$ es entorno de cada uno de sus puntos o sea que es abierto o, lo que es lo mismo, que S es cerrado.

El anterior teorema nos permite definir un conjunto cerrado, como *aquel conjunto que contiene todos sus puntos de acumulación.*

Punto aislado. — Un punto $x_0 \in S$ es aislado en S, si no es de acumulación de S.

DEFINICIÓN. — Un subconjunto $A \subset R$, $A \neq \varnothing$, está *mayorado* por a, o a es una cota superior de A cuando $\forall x \in A$, $x < a$.

Extremo superior de un subconjunto $A \subset R$ es un número $a / \forall x \in A$, $x \leq a$, y si además $a' < a$, existe al menos un punto $x' \in A / a' < x' < a$.

Propiedad fundamental de R. — Toda parte no vacía y mayorada de R posee un extremo superior. O toda parte no vacía y minorada de R posee un extremo inferior.

Sea en efecto A una parte no vacía y mayorada de R, siendo b su cota superior. La semirrecta $(\longleftarrow b) \supset A$. $\forall x < b \Longrightarrow [x,b] \cap A \neq \varnothing \Longrightarrow b \in A$, o b es un punto de acumulación de A. Ahora bien, si A es cerrado $\Longrightarrow b \in A$, como b es una cota superior de A, b es el mayor elemento de A.

Conjuntos acotados de R. — Un subconjunto $A \neq \varnothing$, $A \subset R$ está acotado si está al mismo tiempo mayorado y minorado o, lo que es lo mismo, si $\exists\, [a,b] / A \subset [a,b]$.

Diámetro de un conjunto. — Dado $A \subset R$, se denomina diámetro de A, $\delta(A)$, la cota superior de las distancias entre dos puntos de A o, lo que es lo mismo,

$\delta(A) =$ extremo superior $\{|x_i - y_i| \,\forall x_i, y_i \in A\}$.

DEFINICIÓN. — Una familia de conjuntos F se dice que es un *recubrimiento* de un conjunto dado B, si $B \subset \bigcup_{A_i \in F} A_i$.

Si cada uno de los conjuntos A_i es abierto, el recubrimiento se llama *abierto*.

Teorema de Heine - Borel - Lebesgue. — De todo recubrimiento abierto de un intervalo cerrado y acotado $[a_1, b_1]$ puede extraerse un subrecubrimiento abierto y finito.

Demostración : sea $I_1 = [a_1, b_1]$ un intervalo cerrado y acotado, recubierto por la familia de abiertos $(\omega_i)_{i \in J}$, y supongamos que no existe ninguna subfamilia finita de $(\omega_i)_{i \in J}$, que recubra I_1.

Subdividamos el intervalo $[a_1, b_1]$ en dos intervalos iguales $\left[a_1, \frac{1}{2}(a_1+b_1)\right]$, $\left[\frac{1}{2}(a_1+b_1), b_1\right]$. Al menos uno de estos dos subintervalos no puede estar recubierto por una familia finita de $(\omega_i)_{i \in J}$, porque, en caso de estar recubiertos, también lo estaría $I_1 = \left[a_1, \frac{1}{2}(a_1+b_1)\right] \cup \left[\frac{1}{2}(a_1+b_1), b_1\right]$. Llamemos I_2 a dicho subintervalo, $I_2 = [a_2, b_2]$. Ahora subdividamos I_2 en dos subintervalos cerrados de la forma $\left[a_2, \frac{1}{2}(a_2+b_2)\right]$, $\left[\frac{1}{2}(a_2+b_2), b_2\right]$. Uno de estos dos subintervalos ha de ser como antes de tal manera que no pueda ser recubierto por una subfamilia finita de $(\omega_i)_{i \in J}$, pues, en caso de estarlo, I_2 estaría recubierto por una familia finita y, por tanto, también lo estaría I_1.

Continuando este proceso de subdivisión, obtenemos una sucesión de intervalos encajados $\ldots \subset I_n \subset \ldots \subset I_2 \subset I_1$, que cumplen la condición de que ninguno de ellos puede ser recubierto por una subfamilia finita de abiertos de la familia de abiertos $(\omega_i)_{i \in J}$ que recubre I.

Por otra parte, el método de subdivisión es tal que $\lim_{n \to \infty} \delta(I_n) = 0$, ya que el diámetro de un intervalo es siempre mitad que el anterior.

Aplicando el teorema de los intervalos, sabemos que existe un punto x_0 tal que $x_0 \in I_i \,\forall i$. En particular, $x_0 \in I_1$.

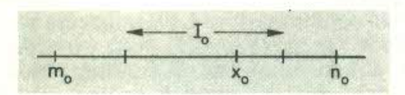
Dado que $(\omega_i)_{i\in J} \supset I_1 \implies \exists\, i_0 \in J / x_0 \in \omega_{i0}$, donde $\omega_{i0} = [m_0, n_0]$, $m_0 < x < n_0$.

Ahora bien, dado que $\lim\limits_{n\to\infty} \delta(I_n) = 0 \implies$

$$\exists N_0 \in N / \delta(I_{N_0}) < \min(x_0 - m_0, n_0 - x_0).$$

Cuando esto ocurre, significa que $I_{N_0} \subset [m_0, n_0]$.

Pero esto significa que existe un intervalo de la sucesión $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \ldots$ que está recubierto por la familia $(\omega_i)_{i\in J}$, en contra de la hipótesis de que ningún intervalo de dicha sucesión estaba recubierto. Por consiguiente, esta última hipótesis es falsa y el teorema enunciado es verdadero.



Teorema de Bolzano - Weierstrass. — Todo subconjunto infinito S de un intervalo cerrado y acotado $[a, b]$ tiene por lo menos un punto de acumulación sobre $[a, b]$. Este enunciado es equivalente a : todo subconjunto S de $[a, b]$, que no posee ningún punto de acumulación sobre $[a, b]$, es finito.

Demostración : Si ningún $x \in [a, b]$ es de acumulación de S, todo punto $x \in [a, b]$ posee un entorno abierto V_x, que contiene como máximo un punto de S, que es el mismo x. Los entornos V_x, cuando x recorre todo $[a, b]$, constituyen una familia de entornos abiertos que recubre $[a, b]$. Según el teorema de Heine - Borel - Lebesgue, podemos extraer de dicha familia una subfamilia finita V_{xj}, $j = 1, 2, \ldots, n$, que recubre $[a, b]$. Por la forma de construcción de los V_x, $V_x \cap S = \varnothing$ ó $V_x \cap S = x$, y entonces S tiene como máximo n puntos x_j ($j = 1, 2, \ldots n$).

Observemos que el resultado anterior no se extiende a los intervalos de la recta real que no sean al mismo tiempo cerrados y acotados; por ejemplo, haciendo $S = \left\{\frac{1}{n}\right\}$, $S \subset (0, 1]$, S es infinito, y sin embargo su punto de acumulación que es $0 \notin (0, 1]$.

Ejercicios : 1.° Demostrar que la intersección arbitraria de intervalos abiertos no es necesariamente abierta.

Construyamos la familia de intervalos abiertos de R, $A_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$, $n \in N$.

La intersección de esta familia es $\bigcap\limits_{1}^{\infty} A_n = \{0\}$, que es un único punto. Ahora bien, $\{0\}$ no es un conjunto abierto de R.

2.° Dado un conjunto $A \subset R$, se llama conjunto derivado de A, A' al conjunto de todos los puntos de acumulación de A. Hallar el conjunto derivado de Q y de Z.

a) Todo número real es punto de acumulación de Q, pues en todo entorno de centro $r \in R$ existen infinitos números racionales; es decir $Q' = R$.

b) El conjunto Z no tiene puntos de acumulación, luego $Z' = \{\varnothing\}$.

3.° Demostrar que existen en R conjuntos que no son ni abiertos ni cerrados.

En efecto, el intervalo $[a, b]$ no es abierto, puesto que no existe ningún entorno de centro b que esté contenido en $[a, b]$. Tampoco es cerrado, puesto que a es un punto de acumulación de $[a, b]$, y sin embargo $a \notin [ab]$.

4.° Sea R, y definamos un abierto de R como cualquier subconjunto $A \subset R$ tal que $A = R$ o $A_a = \{x \in R, / x < a\}$. Demuéstrese que los conjuntos abiertos así definidos forman una topología para A.

Solución *a*) Con la definición de A_a es inmediato que $\varnothing \in \mathcal{C}$; luego ya tenemos que R, $\varnothing \in \mathcal{C}$.

Solución *b*) Veamos como es $\bigcup\limits_{a\in I\subset R} A_a$. Pueden ocurrir dos subcasos : i) Que I no sea acotado por la izquierda, entonces $\bigcup\limits_{a\in I\subset R} A_a = R$; ii) I sea acotado por la izquierda, entonces tendrá un elemento ínfimo i_0, y se verificará $\bigcup\limits_{a\in I\subset R} A_a = A_{i0}$, que es un abierto.

Solución *c*) $A_a \cap A_b = A_m$, $m = \text{máx}(a, b)$.

Como podemos observar, se cumplen las tres condiciones para la existencia de una topología, la formada por los abiertos A_a.

Números complejos

Observemos que una sencilla ecuación de la forma $x^2 + 1 = 0$ no tiene solución en el cuerpo de los números reales. Un nuevo tipo de números, llamados *complejos*, nos resuelve el problema planteado por la resolución de esta ecuación. Naturalmente, este nuevo conjunto nos va a resolver, en general, el problema de encontrar todas las raíces de las ecuaciones de la forma

$$a_0 + a_1 x^2 + \ldots + a_n x^n = 0.$$

DEFINICIÓN. — Sea el conjunto $R \times R$. Llamaremos C (Cuerpo de los números complejos) al conjunto de pares ordenados $(x_1 x_2)$, $x_1 \in R$, $x_2 \in R$.

Igualdad. — Dos números complejos son iguales $(x_1 x_2) = (y_1 y_2) \iff x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$. La relación así definida es de equivalencia.

A x_1 se le llama *parte real* del número complejo y a x_2 se le llama *parte imaginaria*.

Operaciones internas. — *Adición.* — Definimos $(x_1 x_2) + (y_1 y_2) = (x_1 + y_1 + x_2 + y_2)$. La operación así definida posee las propiedades.

1) *Asociativa :* $[(x_1 x_2) + (y_1 y_2)] + (z_1 z_2) = (x_1 x_2) + [(y_1 y_2) + (z_1 z_2)]$.

2) *Conmutativa :* $(x_1 x_2) + (y_1 y_2) = (y_1 y_2) + (x_1 x_2)$.

3) *Elemento neutro :* $(x_1 x_2) + (0\ 0) = (x_1 x_2)$.

4) *Elemento simétrico :* $(x_1 x_2) + (-x_1 - x_2) = (0\ 0)$.

Producto. — Por definición, escribimos :

$$(x_1 x_2) \cdot (y_1 y_2) = (x_1 y_1 - x_2 y_2, \quad x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

PROPIEDADES. — Se verifican las propiedades *asociativa* y *conmutativa*.

Elemento neutro : es el número $(1\ 0)$, puesto que $(x_1 y_1) \cdot (1\ 0) = (x_1 y_1)$.

Elemento simétrico : dado el número complejo (xy), definimos su inverso que representaremos por $(xy)^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \frac{-y}{x^2 + y^2}\right)$. Con esta definición, todos los números complejos tienen inverso para la multiplicación excepto el $(0\ 0)$, como es inmediato comprobar.

Distributiva de la multiplicación respecto de la suma : $(x_1 x_2) \cdot [(y_1 y_2) + (z_1 z_2)] = (x_1 x_2) \cdot (y_1 y_2) + (x_1 x_2) \cdot (z_1 z_2)$.

El conjunto C, con las operaciones antes definidas, tiene estructura de cuerpo conmutativo.

Isomorfismo de C_0 en R. — Consideremos el conjunto de los números complejos de la forma $(x\ 0)$, que representaremos por C_0, y establezcamos la aplicación j de

$C_0 \longrightarrow R$

$(x0) \longrightarrow x$

Esta aplicación es un isomorfismo, con lo cual podemos identificar el conjunto R con C_0, correspondiéndose las operaciones y propiedades de uno y otro conjunto. Por esto podemos considerar, en virtud del anterior isomorfismo, los números reales R como una parte de los números complejos, aquella cuyos elementos tienen su parte imaginaria igual a cero.

NOTACIÓN. — Vamos a representar de aquí en adelante a un número complejo indistintamente mediante las notaciones (xy), $x + iy$ o z.

Unidad imaginaria. — El número complejo (0 1) recibe el nombre de *unidad imaginaria*. Este número posee la importante propiedad de que elevado al cuadrado da el número (− 1 0). Al número complejo (0 1) lo representaremos por i. En virtud del isomorfismo j, antes definido, podemos escribir que $i^2 = -1$.

TEOREMA. — El número complejo (ab) puede escribirse en la forma $a + ib$. En efecto, en virtud de j, $a = (a\ 0)$, $b = (b\ 0)$; $ib = (0\ 1) \cdot (b\ 0) = (0\ b) \Longrightarrow (a\ 0) + (0\ b) = (ab)$, pero $(a\ 0) = a$, $(0\ b) = ib$ luego $(ab) = a + ib$.

Se llama *conjugado* del número $a + ib$ al número $a - ib$.

Módulo de un número complejo. — Dado $z = (x_1 x_2)$, definimos $|z|$, valor absoluto de z o módulo de z, como la aplicación de $C \longrightarrow R_+$:

$$(x_1 x_2) \longrightarrow +\sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

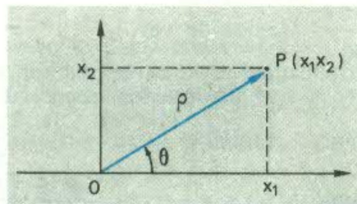
De la anterior definición deducimos las consecuencias siguientes : a) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

b) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$, sí $z_2 \neq 0$.

c) $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Representación geométrica de los números complejos. — Podemos establecer una biyección f entre el conjunto C y el conjunto de los vectores de R^2. $f : C \longrightarrow R^2$
$(x_1 x_2) \longrightarrow (x_1 x_2)$.

A través de esta correspondencia, al número complejo $x_1 + ix_2$ le hacemos corresponder el vector $\vec{v}$ de coordenadas $(x_1 x_2)$. El punto $(x_1 x_2)$ se llama *afijo* del número $x_1 + ix_2$.



Inversamente, dado el vector $\overrightarrow{OP}(x_1 x_2)$ de módulo $\rho = |\overrightarrow{OP}|$ y argumento θ, queda completamente definido el número complejo $x_1 + ix_2$, puesto que $x_1 = \rho \cos \theta, x_2 = \rho \operatorname{sen} \theta$, y entonces podemos escribir $x_1 + ix_2 = \rho (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$. Esta manera de anotar el complejo $(x_1 x_2)$ se llama *forma trigonométrica*.

Aún podemos escribir una nueva forma de representar el número $(x_1 x_2)$, es la llamada *módulo-argumental* ρ_θ.

Forma exponencial de un número complejo. — Vamos a definir una función que llamaremos exponencial compleja e^z. Para hacerlo, establezcamos un paralelismo con la función exponencial real e^x, $x \in R$. Este paralelismo se fundamentará en que las principales propiedades de la exponencial real se conserven para la compleja e^z. En el caso de que $z = (x\ 0)$, la función e^z coincide con la e^x.

La relación para las exponenciales reales $e^{a+b} = e^a \cdot e^b$, se nos debe de convertir en $a^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$.

Es natural que se conserve la igualdad $e^0 = 1$.

La función e^z es periódica, de período $2\pi i$.

La única diferencia que podemos apreciar entre ambas funciones son las relativas a las desigualdades.

DEFINICIÓN. — Definimos $e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot (\cos y + i \operatorname{sen} y)$ donde el número z es el (xy).

TEOREMA. — $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$. En efecto, $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{x_1} \cdot (\cos y_1 + i \operatorname{sen} y_1) \cdot e^{x_2} \cdot (\cos y_2 + i \operatorname{sen} y_2) = e^{x_1} \cdot e^{x_2} \cdot (\cos y_1 \cos y_2 - \operatorname{sen} y_1 \operatorname{sen} y_2) + i$ $(\operatorname{sen} y_1 \cos y_2 + \cos y_1 \operatorname{sen} y_2)] = e^{x_1 + x_2}[\cos (y_1 + y_2) + i \operatorname{sen}(y_1 + y_2)]$, por otra parte $e^{z_1 + z_2} = e^{x_1 + x_2}[\cos (y_1 + y_2) + i \operatorname{sen}(y_1 + y_2)]$.

TEOREMA. — $e^0 = 1$, puesto que $e^0 = e^{0+0_i} = e^0 \cdot (\cos 0 + i \operatorname{sen} 0) = 1 \cdot 1 = 1$.

TEOREMA. — $e^{z_1} = e^{z_2} \iff z_1 - z_2 = 2\pi\ in$, siendo $n \in Z$.

TEOREMA. — $e^z = 1$, si z es un múltiplo entero de $2\pi i$, y recíprocamente.

En efecto, si $z = 2\pi ni$. $\Longrightarrow e^{2\pi ni} = e^{0 + i\,2\pi n} = e^0 \cdot (\cos 2\pi n + i \operatorname{sen} 2\pi n) = 1 \cdot 1 = 1$.

Recíprocamente, si $e^z = 1 \Longrightarrow e^{x+iy} = 1$, $e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y) = 1 \Longrightarrow e^x \cos y = 1$, $e^x \operatorname{sen} y = 0$, como $e^x \neq 0 \Longrightarrow \operatorname{sen} y = 0 \Longrightarrow y = k\pi, k \in Z$, por otra parte $e^x \cdot \cos k\pi = e^x \cdot (-1)^k \Longrightarrow e^x = \dfrac{1}{(-1)^k} = (-1)^k$, como la función e^x es siempre positiva $\Longrightarrow k$ ha de ser par $\Longrightarrow y = 2k\pi$.

Módulo, argumento y forma exponencial de un número complejo. — Hemos visto que el número $\rho (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) = e^x \cdot e^{iy} \Longrightarrow \rho = e^x$, $\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta = e^{iy}$. El número $z = (xy)$ queda unívocamente determinado por ρ y θ, salvo en los múltiplos de 2π, o sea que $y = \theta + 2k\pi$, $k \in Z$. Para cada valor de k obtenemos de esa manera un argumento de z; de todos estos infinitos argumentos, llamaremos argumento principal al que resulta haciendo $k = 0$, o sea θ, y que representaremos por $\arg(z)$, con lo que obtenemos la siguiente definición.

DEFINICIÓN. — Todo número complejo z puede ponerse bajo la forma $z = \rho \cdot e^{i\theta}$, donde $\rho = |z| = e^x$, $\theta = \arg(z) + 2k\pi$, $k \in Z$.

Potencias y raíces de números complejos. — *Fórmula de Moivre.* — Dado el número complejo z, definimos $z^n = (\rho \cdot e^{i\theta})^n = \rho^n \cdot e^{in\theta}$, $z^{-n} = \dfrac{1}{z^n} = (z^{-1})^n$.

Por otra parte $(z_1 \cdot z_2)^n = z_1^n \cdot z_2^n$. Veamos la extracción de raíces.

Dado un número complejo z existen exactamente n números complejos $z_0, z_1, \ldots, z_n$, llamados raíces enésimas de z, definidas por : $z_k = r \cdot e^{i\alpha_k}$.

Hallemos r y α_k. Sabemos que se ha de verificar que

$$(z_k)^n = z \Longrightarrow (re^{i\alpha_k})^n = \rho \cdot e^{i\theta} = \rho \cdot e^{i\theta}$$
$$\Longrightarrow r^n \cdot e^{in\alpha_k} = \rho \cdot e^{i\theta}$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} r^n = \rho; \quad r = \sqrt[n]{\rho} \\ n \cdot \alpha_k = \theta + 2k\pi; \ \alpha_k = \dfrac{\theta + 2k\pi}{n} \end{cases}$$

Resumiendo : las raíces enésimas de un número complejo z son números complejos, cuyo módulo es la raíz enésima de z y cuyo argumento es $\dfrac{\theta + 2k\pi}{n}$, donde $\theta = \arg(z)$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Ejemplos : 1.º Hallar las raíces cúbicas de 1.

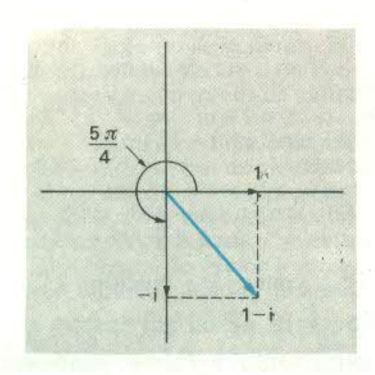
$$1 = 1 + 0i = 1 \cdot e^{0i} \implies \begin{Bmatrix} \rho = 1 \\ \arg(1) = 0^0 \end{Bmatrix} \implies r = \sqrt[3]{1} = 1$$

$$\alpha_1 = \frac{0}{3},\ \alpha_2 = \frac{0 + 2\pi}{3},\ \alpha_3 = \frac{4\pi}{3}$$

Obteniendo

$$\begin{cases} z_1 = 1 \cdot e^0 = 1 \\ z_2 = 1 \cdot e^{i\frac{2}{3}\pi} = \cos 120 + i \operatorname{sen} 120 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} + i\dfrac{1}{2} \\ z_3 = 1 \cdot e^{i\frac{4\pi}{3}} = \cos 240 + i \operatorname{sen} 240 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} - i\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

2.º Hallar las raíces cuartas de 1



$$\left.\begin{array}{l} \arg(z) = \dfrac{5}{4}\pi \\ |z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \end{array}\right\} \implies 1 - i = \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{5\pi}{4}}.$$

Las raíces, por tanto, serán :

$re^{i\alpha_1}$

$re^{i\alpha_2}$ donde $\gamma = \sqrt[4]{|z|} = \sqrt[4]{\sqrt{2}} = \sqrt[8]{2}$

$re^{i\alpha_3}$

$re^{i\alpha_4}$ $\alpha_i = \dfrac{\arg(z) + 2k\pi}{n}$, $k = 0, 1, 2, 3.$

resultando finalmente

$$\alpha_1 = \frac{\frac{5\pi}{4}}{4} = \frac{5}{16}\pi \qquad z_1 = \sqrt[8]{2}\, e^{\frac{5}{16}\pi}$$

$$\alpha_2 = \frac{\frac{5\pi}{4} + 2\pi}{4} = \frac{\frac{5}{4}\pi + \frac{8}{4}\pi}{16} = \frac{13}{16}\pi \qquad z_2 = \sqrt[8]{2}\, e^{\frac{13}{16}\pi}$$

$$\alpha_3 = \frac{\frac{5\pi}{4} + 4\pi}{4} = \frac{\frac{5}{4}\pi + \frac{16}{4}\pi}{4} = \frac{21}{16}\pi \qquad z_3 = \sqrt[8]{2}\, e^{\frac{21}{16}\pi}$$

$$\alpha_4 = \frac{\frac{5}{4}\pi + 6\pi}{4} = \frac{\frac{5}{4}\pi + \frac{24}{4}\pi}{4} = \frac{29}{4}\pi; \qquad z_4 = \sqrt[8]{2}\, e^{\frac{29}{16}\pi}$$

Logaritmos complejos. — Es lógico que ampliemos los conceptos y operaciones conocidos para R a C. Ahora vamos a hacerlo con el concepto de logaritmo.

TEOREMA. — Si z es un número complejo, existen infinitos números complejos t tales que : $e^t = z$. Uno de tales números es $\ln|z| + i \arg(z)$, teniendo todos los demás la forma $\ln|z| + i\arg(z) + 2k\pi i,\ k \in Z$.

En efecto $e^{\ln|z| + i\arg(z)} = e^{\ln|z|} \cdot e^{i\arg(z)} = |z| \cdot e^{i\arg(z)} = \rho \cdot e^{i\arg(z)} = z$.

A cada uno de los números t se les denomina logaritmo neperiano de z. De ellos existe uno, el $\ln|z| + i\arg(z)$, que llamaremos logaritmo principal de z.

Ejemplo : hallar el logaritmo principal de i y de $1 - i$,

$$i = 1 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} \implies \begin{cases} |z| = 1 \\ \arg(z) = \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \implies \begin{array}{l} \rho n\, i + \ln 1 + i \cdot \dfrac{\pi}{2} \\ = 0 + i \cdot \dfrac{\pi}{2}. \end{array}$$

$$1 - i = \sqrt{2}\, e^{i\frac{5}{4}\pi} \implies \begin{cases} |z| = \sqrt{2} \\ \arg(z) = \dfrac{5}{4}\pi \end{cases} \implies \begin{array}{l} \ln(1-i) \\ = \ln\sqrt{2} + i\dfrac{5}{4}\pi. \end{array}$$

Potencias complejas de números complejos. — Dados dos números complejos z y t, definimos el número complejo z^t como el número $e^{t \ln z}$.

Ejemplos : hallar las siguientes potencias :

1^i, $\quad i^{(-i)} \cdot 1^i = 1^i = e^{i \ln 1}$; $\quad \ln 1 = \ln|1| + i \cdot 0 = 0 \implies 1^i = e^{i \cdot 0} = 1.$

$i^{-i} = e^{-i \ln i} = e - i \cdot i\frac{\pi}{2} = r - i^2 \cdot \frac{\pi}{2} = e^{\frac{\pi}{2}}.$

Ejercicios : 1.º Resolver la ecuación $x^2 + x + 1 = 0$;

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2} i;$$

$$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i;\ x_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i.$$

2.º Escribir en forma binómica el cociente $\dfrac{1 + 3i}{4 - i}$.

Multiplicando numerador y denominador por el conjugado del denominador, nos queda :

$$\frac{(1+3i)(4+i)}{(4+i)(4-i)} = \frac{4 + i + 12i + 3i^2}{4^2 - i^2} = \frac{1 + 13i}{5} = \frac{1}{5} + \frac{13}{5} i.$$

3.º Demostrar que el conjunto de todas las raíces enésimas de la unidad poseen estructura de grupo abeliano respecto de la multiplicación.

Sean $1_{\alpha_0} 1_{\alpha_1} \ldots 1_{\alpha_k} \ldots 1_{\alpha_{n-1}}$ las n raíces enésimas de 1, donde $\alpha_k = \dfrac{2\pi k}{n}$. Hemos de ver.

a) La multiplicación es una operación *interna*; en efecto : $1_{\alpha_k} \cdot 1_{\alpha_j} = 1_{\alpha_k + \alpha_j}$, y pueden ocurrir dos casos.

i) $k + j < n$. Entonces $\alpha_k + \alpha_j = \dfrac{2\pi k}{n} + \dfrac{2\pi j}{n} = \dfrac{2\pi(k+j)}{n}$, como $k + j < n \implies \dfrac{2\pi(k+j)}{n}$ será uno de los argumentos de alguna raíz.

ii) $k + j > n \implies k + j - n < n$, puesto que $k < n,\ j < n$; en ese caso tenemos que $1_{\alpha_k + \alpha_j} = 1\dfrac{2\pi(k+j)}{n} = 1\dfrac{2\pi(k+j-n)}{n}$, también una de las raíces enésimas.

b) Es *asociativa*. $(1_{\alpha_i} \cdot 1_{\alpha_j}) \cdot 1_{\alpha_k} = 1_{\alpha_i} \cdot (1_{\alpha_j} \cdot 1_{\alpha_k})$.

c) Es *conmutativa*. $1_{\alpha_i} \cdot 1_{\alpha_j} = 1_{\alpha_j} \cdot 1_{\alpha_i}$.

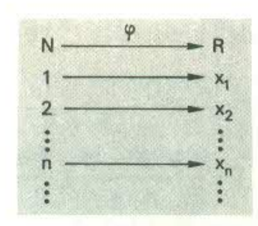
d) *Elemento neutro*. Que es la raíz enésima 1.

e) *Elemento simétrico*. Para toda raíz enésima $1_{\alpha_k} = 1\dfrac{2\pi k}{n}$ existe otra raíz, la $1\dfrac{2\pi(n-k)}{n}$ tal que se verifica $1\dfrac{2\pi k}{n} \times 1\dfrac{2\pi(n-k)}{n} = 1_{2\pi} = 1$, c.q.d.

16. — Sucesiones de números reales

Definición. Límite de una sucesión. Criterio general de convergencia de Cauchy. Operaciones con sucesiones convergentes. Sucesiones divergentes. Número *e*. — **Series de números reales :** Concepto de serie. Una condición necesaria de convergencia. Criterio general de convergencia de Cauchy. Series de términos positivos. Criterio de comparación. Serie armónica generalizada. Criterios. *De d'Alembert o del cociente. De Cauchy o de la raíz. De Raabe.* Series de términos positivos y negativos. Series alternadas. — **Funciones :** Definición. Gráfica de una función. — **Límite :** Límite de una función. Otra definición de límite. Límites por la derecha y por la izquierda. Algunas propiedades importantes. Límites infinitos. Cálculo de límites. Infinitésimos. Álgebra de infinitésimos. — **Continuidad :** Noción de continuidad. Discontinuidades. Continuidad uniforme. Álgebra de las funciones continuas. Propiedades de las funciones continuas.

Definición. — Una sucesión de números reales es una aplicación del conjunto N en R.



Los números $x_i \in R$ se llaman *términos* de la sucesión. Una sucesión de números reales se llama *finita*, si el número de sus términos es finito, e *infinita*, si el número de sus términos es infinito. En este caso su original coincide con el conjunto N.

Una sucesión infinita la representaremos por $\{x_n\}$, y a x_n le llamaremos su término general. Dicho término suele venir dado en forma de una expresión matemática, que nos da la ley de formación de toda la sucesión. Ejemplo, la sucesión $\{x_n\} = \left\{\frac{2n+1}{n}\right\}$ es la

$$x_1 = \frac{3}{1},\ x_2 = \frac{2\cdot 2+1}{2} = \frac{5}{2},$$

$$x_3 = \frac{2\cdot 3+1}{3} = \frac{7}{3} \dots x_n = \frac{2n+1}{n}, \dots$$

Una sucesión la llamaremos *acotada*, si el conjunto $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots\}$ es acotado.

Una sucesión se llama *monótona creciente*, si se verifica que $x_n < x_{n+1}, \forall n \in N$.

Una sucesión se llama *monótona decreciente*, si se verifica que $x_n > x_{n+1}, \forall n \in N$.

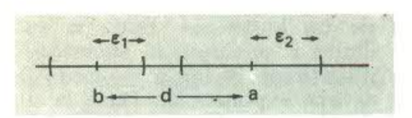
Límite de una sucesión. — *La sucesión de números reales* $\{x_n\}$ *converge hacia* a, *o tiene por límite* a *y se expresa* $\lim_{n\to\infty} x = a$,

si $\forall \varepsilon > 0,\ \exists\ N_0 \in N / \forall n > N_0 \implies |x_n - a| < \varepsilon$.

De otra manera, y utilizando la terminología de entornos, podemos decir : *La sucesión* $\{x_n\}$ *tiene por límite* a, *si para todo entorno de centro* a *y radio cualquiera* ε *existe un número finito de elementos* x_i *fuera de ese entorno.*

Ejemplo : la sucesión $\{x_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$ converge hacia 0, puesto que cualquier entorno de centro O y radio ε contiene un número infinito de elementos de la sucesión.

Si una sucesión $\{x_n\}$ tiene por límite *a*, *a* es un punto de acumulación de dicha sucesión, como lo demuestra la misma definición de límite, y además es el único punto de acumulación de dicha sucesión, pues suponiendo exista *b*, tal que *b* sea de acumulación de $\{x_n\}$, se verifica :



Supongamos sea *d* la distancia entre *a* y *b*, y tomemos $V(b, \varepsilon_1)$, donde $\varepsilon_1 < \frac{d}{2}$. Este entorno $V(b, \varepsilon_1)$ contiene x_i en número infinito por ser *b* de acumulación, $x_i \in \{x_n\}$. Esto implica que el entorno $V(a, \varepsilon_2)$ no contiene infinitos elementos de la sucesión, luego *a* no sería el punto de acumulación de $\{x_n\}$ en contra de la hipótesis. Luego $a = b$.

Por otra parte, si $\{x_n\}$ tiene límite, significa que está acotada, luego podemos decir :

$\{x_n\}$ *tiene límite* $\iff$ *1) está acotada; 2) tiene un solo punto de acumulación.*

Una sucesión se dice *divergente* cuando su límite es infinito $\iff \forall M \in R,\ \exists\ N_0 \in N / \forall n > N \implies |x_n| > M$.

Una sucesión que no tiene límite se llama *oscilante*. Ejemplo : la 1, 0, 1, 0, 1, ...

Criterio general de convergencia de Cauchy. — *La condición necesaria y suficiente para que la sucesión de números reales* $\{x_n\}$ *sea convergente, es que* $\forall \varepsilon > 0,\ \exists\ N_0 \in N,\ \forall p, q, > N_0 \implies |x_p - x_q| < \varepsilon$.

Aun cuando no damos la demostración del teorema, éste significa que una *sucesión es convergente si, y sólo si, la diferencia entre dos términos cualesquiera avanzados de la sucesión es tan pequeña como queramos.*

Operaciones con sucesiones convergentes. — *a*) Límite de una suma de sucesiones. Dadas dos sucesiones convergentes $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ de límites respectivos *a* y *b*, se trata de conocer el límite, si existe, de la sucesión $\{a_n + b_n\}$.

Por ser $\{a_n\}$ convergente, se verifica que

$$\forall \varepsilon > 0 \exists\ N_0 / \forall n > N_0 \implies |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por ser $\{b_n\}$ convergente, se verifica que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\ N_1 / \forall n > N_1 \implies |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sumando las dos desigualdades finales se tiene $|a_n + b_n - (a+b)| < \varepsilon \iff$ que la sucesión $\{a_n + b_n\} \longrightarrow a + b$. Resumiendo : *el límite de una suma o diferencia de sucesiones convergentes es otra sucesión convergente que tiene por límite la suma o diferencia de los límites.*

b) Límite de un producto de sucesiones convergentes. Dadas $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ convergentes, se puede demostrar de igual manera que la sucesión producto de ambas $\{a_n \cdot b_n\}$ es otra sucesión convergente cuyo límite es el producto de los límites $a \cdot b$.

c) Límite de un cociente de sucesiones convergentes. Dadas $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ de límites respectivos a y b, la sucesión cociente $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ es convergente, siempre que $b \neq 0$, siendo su límite $\frac{a}{b}$. Si límite $b_n = 0 \implies \lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$. Si $\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} b_n = 0 \implies \lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{0}{0} =$ indeterminado.

d) Límite de una potencia. El límite de una sucesión convergente $\{a_n\}$ elevada a una potencia constante k es el límite de dicha sucesión elevada a

$$k \cdot \iff \lim_{n \to \infty} a_n^k = a^k.$$

e) Límite de un logaritmo. Dada la sucesión $\{x_n\}$ positiva, de límite x positivo, la sucesión $\{\log_a x_n\}$ es convergente y su límite es $\log_a x$.

f) Límite de una exponencial. Dada la sucesión $\{x_n\}$ convergente de límite x, la sucesión $\{a^{x_n}\}$, $a \in \mathrm{R}$, es también convergente de límite a^x.

g) Límite de una función polinómica racional. Dada la sucesión $\frac{a_n x^n + \ldots + a_0}{b_p x^p + \ldots + b_0}$, su límite, cuando $x \longrightarrow \infty$, se resuelve fácilmente dividiendo numerador y denominador por x^{M}, donde $\mathrm{M} = \max(n, p)$ y haciendo después que $x \longrightarrow \infty$. Ejemplos: hallar $\lim_{n \to \infty} \log_e \frac{3n^2+1}{4n^2}$ y $\lim_{n \to \infty} \sqrt{\frac{3n^3}{n^5+1}}$:

$$\lim_{n \to \infty} \ln \frac{3n^2+1}{4n^2} = \ln\left(\lim_{n \to \infty} \frac{3n^2+1}{4n^2}\right) = \ln\left[\lim_{n \to \infty} \frac{3+\frac{1}{n^2}}{4}\right] = \ln \frac{3}{4},$$

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt{\frac{3n^3}{n^5+1}} = \sqrt{\lim_{n \to \infty} \frac{3n^3}{n^5+1}} = \sqrt{\lim_{n \to \infty} \frac{\frac{3}{n^2}}{1+\frac{1}{n^5}}} = \sqrt{0} = 0.$$

Sucesiones divergentes. — Vamos a suponer ahora que alguna o todas las sucesiones que han intervenido en el apartado anterior sean divergentes. El resultado final, al efectuar operaciones, cambia como veremos a continuación.

a) Suma de dos sucesiones divergentes. Dadas $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ divergentes, la sucesión suma $\{a_n + b_n\}$ es también divergente. En el caso de que $\lim_{n \to \infty} a_n = a$, $\lim_{n \to \infty} b = \infty$ entonces $\lim_{n \to \infty} (a_n + b_n) = \infty$.

b) Diferencia de dos sucesiones divergentes. Si

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \infty, \quad \lim_{n \to \infty} b_n = \infty \implies \lim_{n \to \infty} (a_n - b_n) =$$

indeterminado. Resultado que expresaremos escribiendo: $\infty - \infty =$ indeterminado.

c) Producto de sucesiones divergentes. Simbólicamente expresaremos: i) $\infty \cdot \infty = +\infty$; ii) $\infty \cdot (-\infty) = -\infty$; iii) $(-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$.

d) Producto de sucesiones divergentes y convergentes: i) $a \cdot \infty = \infty$; ii) $0 \cdot \infty =$ indeterminado.

e) Cociente de sucesiones divergentes. i) $\frac{\infty}{\infty} =$ indeterminado.

f) Cociente de sucesiones convergente y divergente: i) $\frac{a}{\infty} = 0$; ii) $\frac{\infty}{a} = \infty$.

g) Se demuestra además que existen otros casos de indeterminación. Estos son ∞^0; 0^0; 1^∞.

Como ejemplo de particular importancia, vamos a estudiar la convergencia de la sucesión $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, cuyo límite es el número e irracional trascendente, de un valor aproximado $e = 2'718\,281\,828\,4\ldots$

Número e. — Los primeros términos de la sucesión $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ son: $a_1 = 2$, $a_2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2$, $a = \left(\frac{4}{3}\right)^3 \ldots$

Desarrollando el término enésimo según la fórmula de Newton, encontramos:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \binom{n}{0}1^n + \binom{n}{1}1^{n-1}\cdot\frac{1}{n} + \binom{n}{2}1^{n-2}\cdot\frac{1}{n^2} + \ldots +$$

$$\binom{n}{n}\cdot\frac{1}{n^n} = 1 + \frac{n}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3} +$$

$$\ldots + \frac{n!}{n!}\cdot\frac{1}{n^n} = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\frac{n(n-1)}{n \cdot n} + \frac{1}{3!}\frac{n(n-1)(n-2)}{n \cdot n \cdot n} +$$

$$\ldots + \frac{1}{n!}\frac{n(n-1)(n-2)\ldots 3\cdot 2\cdot 1}{n\cdot n\cdot n\cdot\ldots\cdot n} = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) +$$

$$\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \ldots$$

$$+ \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

Como podemos observar, cada término de la suma es positivo. Si ahora hallamos el término a_{n+1}, utilizando el mismo método se tiene:

1) Cada término del desarrollo de a_{n+1} de la forma $\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\ldots$ es mayor que el término correspondiente del desarrollo de a_n.

2) El número de términos de a_{n+1} es mayor que el número de términos de a_n. Lo anterior nos permite afirmar que $a_{n+1} > a_n$, luego la sucesión es monótona creciente.

Además es acotada, puesto que $1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}$. Los términos racionales de esta suma son términos de una progresión geométrica ilimitada de razón $\frac{1}{2}$, luego $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1/2}{1-1/2} = 1 \implies \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$.

Pero toda sucesión monótona acotada tiene límite, luego la sucesión $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ lo tiene, siendo éste e. Para obtener su expresión no hace falta más que, en el desarrollo de a_n, hacer que $n \longrightarrow \infty$:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots +.$$

Series de números reales

Concepto de serie. — Dada la sucesión de números reales $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, a partir de ella podemos formar la siguiente sucesión de sumas parciales:

$S_1 = a_1$
$S_2 = a_1 + a_2$
$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$
.
.
.
$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$
.
.
.

Llamaremos *serie* a la expresión $\sum\limits_1^\infty a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$, que abreviadamente escribiremos $\sum\limits_1^\infty a_n$.

A cada uno de los términos de la sucesión $\{a_n\}$ le llamaremos términos de la serie, y a a_n, término general de la misma.

Dada una serie $\sum\limits_1^\infty a_n$, diremos que esta es *convergente, divergente* u *oscilante,* según que la sucesión de sumas parciales $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n \dots$ sea convergente, divergente u oscilante. En el caso de que sea convergente, se llama suma de la serie al número real $S = \lim\limits_{n \to \infty} S_n = \lim\limits_{n \to \infty} (a_1 + \dots + a_n + \dots)$.

El problema fundamental al estudiar una serie es hallar su convergencia y suma. Dado que la suma no es siempre fácil o posible de hallar con exactitud, recurriremos a métodos aproximados para obtenerla.

Una condición necesaria de convergencia. — Sea la serie $\sum\limits_1^\infty a_n$ que suponemos convergente. El término enésimo a, es $a_n = S_n - S_{n-1}$, $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \lim\limits_{n \to \infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim\limits_{n \to \infty} S_n - \lim\limits_{n \to \infty} S_{n-1} = S - S = 0$. Y podemos decir que *una condición necesaria para que una serie sea convergente es que su término general tienda hacia 0.*

Ejemplo: las series de términos generales $a_n = \sqrt[n]{n}$, $a_n = \dfrac{3n}{5n+1}$ no son convergentes, pues sus términos generales no tienden hacia 0.

Criterio general de convergencia de Cauchy. — Dado que la serie $\sum\limits_1^\infty a_n$ se puede escribir en la forma $S_1, S_2, S_3 \dots$ y que de esta sucesión depende el carácter de la serie, podemos aplicar a dicha sucesión el criterio de Cauchy para sucesiones. $\{S_n\}$ es convergente $\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in N / \forall p, q > N \Longrightarrow |S_p - S_q| < \varepsilon$.

Sea $p > q$, entonces, $S_p - S_q = a_{q+1} + a_{q+2} + \dots + a_p \Longrightarrow |a_{q+1} + \dots + a_n + \dots| < \varepsilon$ o lo que es lo mismo: *La serie $\sum\limits_1^\infty a_n$ es convergente si, y sólo si, la suma de sus términos, a partir de uno de ellos en adelante, es menor que un cierto número* ε.

Series de términos positivos. — Una serie $\sum\limits_1^\infty a_n$, en la que todos sus términos son positivos, se llama de *términos positivos*. Tales series son siempre monótonas crecientes, pues la sucesión de sumas parciales verifica que: $S_1 < S_2 < S_3 < \dots < S_n < \dots$ Dado que una condición necesaria y suficiente para que este tipo de sucesiones tenga límite es que sea acotada, se tiene ya una condición necesaria y suficiente para que una serie de términos positivos sea convergente, a saber, que esté acotada.

Si no está acotada, la serie es divergente.

En la práctica, interesa conocer el carácter de una serie, aún más que su suma, pues ésta es en la mayoría de las veces más difícil de averiguar que su convergencia. Para hallar el carácter, existen diversos criterios, que a continuación estudiamos.

Criterio de comparación — Dadas dos series de términos positivos $\sum\limits_1^\infty a_n$ y $\sum\limits_1^\infty b_n$, si se verifica que $a_n \leqslant b_n$, $\forall n$, se dice que $\sum\limits_1^\infty b_n$ es *mayorante* de $\sum\limits_1^\infty a_n$. Si se verifica que $a_n \geqslant b_n$, n se dice que $\sum\limits_1^\infty b_n$ es *minorante* de $\sum\limits_1^\infty a_n$.

TEOREMA. — Si $\sum\limits_1^\infty a_n$ es mayorante de $\sum\limits_1^\infty b_n$ y $\sum\limits_1^\infty a_n$ es convergente, entonces $\sum\limits_1^\infty b_n$ es convergente.

En efecto. Sean $\sum\limits_1^i a_i = S_i$ y $\sum\limits_1^i b_i = S'_i$; se verifica que

$$S'_i < S_i, \forall i \Longrightarrow S'_n < S_n \, \forall n \Longrightarrow$$
$$\lim_{n \to \infty} S'_n < \lim_{n \to \infty} S_n \Longrightarrow \lim_{n \to \infty} S'_n < S,$$

donde S es la suma de la serie $\sum\limits_1^\infty a_n \Longrightarrow \sum\limits_1^\infty b_n$ es convergente.

De la misma manera, si $\sum\limits_1^\infty a_n$ es minorante de $\sum\limits_1^\infty b_n$ y $\sum\limits_1^\infty a_n$ es divergente, también lo es $\sum\limits_1^\infty b_n$.

Serie armónica generalizada. — Vamos a hallar por comparación el carácter de la serie $1 + \dfrac{1}{2^\alpha} + \dfrac{1}{3^\alpha} + \dots + \dfrac{1}{n^\alpha} + \dots$ que se llama *armónica generalizada* de razón α.

Esta serie la podemos escribir:

$$1 + \left(\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha}\right) + \left(\frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} + \frac{1}{6^\alpha} + \frac{1}{7^\alpha}\right) + \left(\frac{1}{8^\alpha} + \dots + \frac{1}{15^\alpha}\right) + \dots$$

donde el número de sumandos de cada paréntesis representa las potencias sucesivas de 2 : 2, 4, 8, 16, ...

Esta serie la vamos a comparar con la $1 + \left(\dfrac{1}{2^\alpha} + \dfrac{1}{2^\alpha}\right) + \left(\dfrac{1}{4^\alpha} + \dfrac{1}{4^\alpha} + \dfrac{1}{4^\alpha} + \dfrac{1}{4^\alpha}\right) + \left(\dfrac{1}{8^\alpha} + \dots + \dfrac{1}{8^\alpha}\right) + \dots$ Si $\alpha > 1$, los términos de la primera serie son mayores o iguales que los de la segunda, o, lo que es igual, la primera serie es mayorante de la segunda. Ahora bien, la segunda es

$$1 + \frac{2}{2^\alpha} + \frac{4}{4^\alpha} + \frac{8}{8^\alpha} + \dots = 1 + \frac{1}{2^{\alpha-1}} + \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^3 + \dots$$

que podemos sumar, pues es una serie geométrica de razón $\dfrac{1}{2^{\alpha-1}}$. Su suma es $S = \dfrac{1/2^{\alpha-1}}{1 - 1/2^{\alpha-1}} = \dfrac{1}{2^{\alpha-1}}$. Si $\alpha > 1$, es convergente. Si $\alpha = 1$, la serie es la $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dots$ que

podemos reorganizar así : $1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \ldots$ que es mayorante de la $1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \ldots = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots$ que es divergente.

Si $\alpha < 1$, la serie armónica generalizada $1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \ldots + \frac{1}{n^\alpha} + \ldots$ es mayorante de la armónica $1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$ que es divergente, luego la armónica generalizada de razón $\alpha < 1$ es divergente. Resumiendo :

$$\text{La serie } \sum_1^\infty a_n,\ a_n = \frac{1}{n^\alpha} \text{ es } \begin{cases} \text{divergente si } \alpha < 1 \\ \text{divergente si } \alpha = 1. \\ \text{convergente si } \alpha > 1 \end{cases}$$

Criterios. — De d'Alembert o del cociente. — Aunque lo daremos sin demostración, este criterio nos dice :

$$\text{Si } \lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \text{ es } \begin{cases} < 1 \text{ la serie es convergente} \\ = 1 \text{ nada podemos afirmar.} \\ > 1 \text{ la serie es divergente.} \end{cases}$$

Ejemplo : estudiar el carácter de la serie $\sum_1^\infty a_n,\ a_n = \frac{1}{n!}$ $\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{(n+1)!} : \frac{1}{n!}\right) = \lim_{n \to \infty} \frac{n!}{(n+1)!} =$

$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1$, luego la serie es convergente.

De Cauchy o de la raíz. — Si se verifica que para $\forall n > N_0 \in N$, $\sqrt[n]{a_n} \leq k < 1$, siendo $k > 0$, la serie es convergente.

Demostración : escribiremos algunas raíces de términos sucesivos :

$$\begin{rcases} \sqrt[n]{a_n} \leq k \\ \sqrt[n+1]{a_{n+1}} \leq k \\ \sqrt[n+2]{a_{n+2}} \leq k \end{rcases} \Longrightarrow$$

$a_n \leq k^n$, $a_{n+1} \leq k^{n+1}$, $a_{n+2} \leq k^{n+2}$..., lo cual significa que la serie $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$, tiene como mayorante a la serie

$k + k^2 + k^3 + \ldots + k^n + \ldots$ que es geométrica de razón $k < 1$, luego es convergente, y su minorante, la $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ también lo será.

Si se verifica, por el contrario, que $\sqrt[n]{a_n} \geq 1 \Longrightarrow a_n \geq 1$, la serie es divergente, ya que su término general no tiende hacia 0. Resumiendo :

$$\text{Si } \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} \text{ es } \begin{cases} < 1 \text{ la serie es convergente.} \\ > 1 \text{ la serie es divergente.} \\ = 1 \text{ nada puede afirmarse} \end{cases}$$

Ejemplo : estudiar la convergencia de la serie $1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n^n}$ $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0 < 1$,

luego la serie es convergente.

De Raabe. — Este criterio es más amplio que los anteriores, y suele utilizarse cuando no puede determinarse el carácter de la serie empleando los criterios de d'Alembert o de Cauchy.

Dicho criterio dice :

$$\text{si } \lim_{n \to \infty} n \cdot \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \text{ es } \begin{cases} > 1 \text{ la serie es convergente} \\ < 1 \text{ la serie es divergente} \\ = 1 \text{ nada puede afirmarse} \end{cases}$$

Ejemplo : estudiar la serie $\sum_1^\infty a_n,\ a_n = \frac{1}{n(n+1)}$.

Aplicando d'Alembert, se tiene :

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \to \infty} \left[\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n(n+1)}\right] =$$

$\lim_{n \to \infty} \frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)} = 1$, no pudiéndose afirmar nada.

Aplicando Raabe : $\lim_{n \to \infty} n \cdot \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) =$

$\lim_{n \to \infty} n \cdot \frac{2}{n+2} = 2 > 1$, luego la serie es convergente.

Series de términos positivos y negativos. — Hasta ahora hemos estudiado series de términos positivos. Pero, en general, una serie puede constar también de términos negativos. Ahora se trata de encontrar la convergencia de este tipo de series.

Si la serie consta únicamente de términos negativos, multiplicando todos sus términos por -1, la nueva serie es de términos positivos, pudiéndole aplicar los criterios ya enunciados. Si es convergente y de suma S, bastará multiplicar dicha suma por -1 para encontrar la suma de la serie primitiva.

Si una serie tiene términos positivos o negativos en número finito, podemos prescindir de esos términos y estudiar la serie infinita restante, la cual será o no convergente. Sumando o restando los términos finitos, encontraremos la suma de la serie en el caso de que sea convergente.

Finalmente, una serie puede constar de infinitos términos positivos y negativos. Para estudiar dicha serie, vamos a descomponerla en otras dos, una de términos positivos y otra de negativos.

Sea la serie $a_1 - b_1 + a_2 - b_2 + \ldots + a_n - b_n \ldots$ de la que obtenemos las series :

$$\sum_1^\infty a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$$

$$\sum_1^\infty b_n = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n + \ldots$$

1) Supongamos que ambas series $\sum_1^\infty a_n$ y $\sum_1^\infty b_n$ son convergentes de sumas A y B, y llamemos $S_{2n} = a_1 - b_1 + a_2 - b_2 + \ldots + a_n - b_n = A_n - B_n$. Tomando límites en ambos miembros :

$$\lim_{n \to \infty} S_{2n} = \lim_{n \to \infty} (A_n - B_n) = \lim_{n \to \infty} A_n - \lim_{n \to \infty} B_n = A - B,$$

luego la serie total es convergente y su suma es la diferencia de las sumas de las series parciales.

2) Si una serie parcial es convergente y la otra divergente, la total es divergente.

3) Si ambas series parciales son divergentes, la serie total es divergente.

Resumiendo, podemos afirmar que, si la serie de los valores absolutos es convergente, entonces la serie total también lo es, y, si la serie de los valores absolutos es divergente, la serie total es divergente.

Series alternadas. — Entre las series de términos positivos y negativos, tienen especial importancia aquellas cuyos términos son alternativamente positivos y negativos y a las que llamaremos series alternadas.

Supongamos la serie alternada $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + a_{2n+1} - a_{2n+2} + \ldots$ que supondremos decreciente en valor absoluto, es decir, que se verifica :

$|a_1| \geq |a_2| \geq |a_3| \geq \ldots \geq |a_n| \geq \ldots$ Las sumas parciales de orden par e impar son :

$$s_1 = a_1$$
$$s_3 = a_1 - a_2 + a_3 = s_2 + a_3 = s_1 - (a_2 - a_3)$$
$$s_5 = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 = s_4 + a_5 = s_3 - (a_4 - a_5)$$
$$\vdots$$
$$s_2 = a_1 - a_3 = s_1 - a_2$$
$$s_4 = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 = s_3 - a_4 = s_2 + (a_3 - a_4)$$
$$s_6 = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 = s_5 - a_6 = s_4 + (a_5 - a_6).$$

Como se ve, las sumas parciales de orden impar s_1, s_3, s_5, ... forman una sucesión monótona decreciente, pues cada término se obtiene del anterior restándole un número positivo. Por otra parte, las sumas parciales de orden par forman una sucesión monótona creciente, dado que cada término se obtiene del anterior, sumándole un número positivo.

Finalmente, observemos que toda suma de orden par es menor que toda suma de orden impar. Gráficamente podemos representar estas conclusiones en una recta orientada.

S_2 S_4 S_6 S S_5 S_3 S_1

Las dos sucesiones monótonas, una creciente, otra decreciente, definen un número real S, si $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$, que es la suma de la serie alternada. Que ambas sucesiones definen el mismo número real S es claro, puesto que :

$$S_{2n} = S_{2n-1} - a_{2n} \implies \lim_{n \to \infty} S_{2n} = \lim_{n \to \infty} (S_{2n} - a_{2n}), \text{ ahora bien, } \lim_{n \to \infty} a_{2n} = 0 \implies \lim_{n \to \infty} S_{2n} = \lim_{n \to \infty} S_{2n-1} = S.$$

Hemos visto, de esta manera, que las condiciones impuestas a una serie alternada para que sea convergente son : 1) que los términos sean decrecientes en valor absoluto y 2) el término general de la sucesión a_n ha de tender hacia 0.

A veces no puede hallarse la suma S de la serie, y entonces se puede tomar como valor aproximado de dicha suma una suma parcial S_n, de tal manera que el error cometido con tal aproximación es siempre menor en valor absoluto que el primer término despreciado.

Ejemplo : estudiar la convergencia de la serie $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots \pm \ldots$

Se verifica : 1) es decreciente; y 2) su término general $a_n = \frac{1}{n}$ tiende hacia 0. Luego la serie es convergente.

Si tomamos como suma de la misma la suma parcial S_5, el error cometido es siempre en valor absoluto menor que $\frac{1}{6}$, y podemos escribir :

$$S = \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) \pm \frac{1}{6} = \frac{47}{60} \pm \frac{1}{6}.$$

Funciones

Definición. — *Una aplicación del conjunto de los números reales en sí mismo recibe el nombre de función real de una variable real, aunque más generalmente se ha definido como función todo subconjunto del producto cartesiano de* $R \times R$.

Nosotros vamos a tomar en nuestro estudio la primera definición; de esta manera, a un número real cualquiera le ha de corresponder, mediante una función, un único número real, eliminando de nuestro concepto aquellas correspondencias de la forma $y = \pm\sqrt{x}$, pues a un valor de x, mediante esta correspondencia, le corresponden dos valores de y.

Una función se llama *explícita* cuando viene dada en la forma $y = f(x)$, donde f representa la relación existente entre x e y. Ejemplo : $y = x^2 + 1$.

Por el contrario, si la relación entre x e y viene expresada en la forma $f(x, y) = 0$, diremos que la función es *implícita*. Ejemplo : $y - x^2 \cdot (y + 1) = 0$.

Si la función es de la forma $z = f(x, y)$, donde x e y toman valores reales cualesquiera, la función se dice de *dos variables reales*.

Generalizando, podemos definir funciones de la forma $z = f(x, y, t, \ldots, m)$ como aplicaciones del conjunto $\overbrace{R \times R x \ldots x R}^{n \text{ veces}} \longrightarrow R$, aplicaciones a las que llamaremos funciones reales de n variables reales. Por ejemplo, las funciones $z = x^2 + y^2 + t^2$ y $z = x \cdot y \cdot t \cdot v$ son de tres y cuatro variables reales, respectivamente.

Gráfica de una función. — Supongamos la función $y = f(x)$, que como sabemos está formada por parejas de valores (x_1, y_1), (x_2, y_2)... Cada una de estas parejas la podemos considerar como un punto del plano cartesiano $R \times R$, y entonces el conjunto de todas las parejas (x_n, y_n), que forman la función, tendrán una representación gráfica en dicho plano.

Si la variable x toma sus valores en un conjunto infinito $C \subset R$, y además es continua, puede ocurrir que la función $f(x)$ también lo sea, en cuyo caso la representación de la función es una línea continua. Ejemplo : la función $f(x) = x + 1$ tiene como representación la recta de la figura adjunta (*fig.* 1).

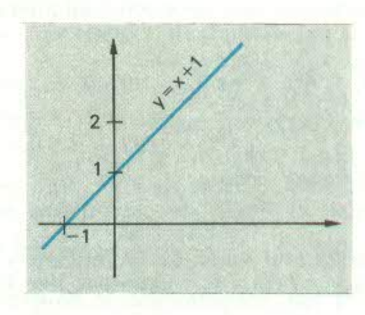


Fig. 1

Función inversa. — Dada una función $y = f(x)$, podemos despejar la variable x de dicha ecuación, encontrando una relación de la forma $x = g(y)$, que llamaremos función inversa de la $f(x)$ y que representaremos mediante $f^{-1}(y)$.

Ejemplo : hallar la función inversa de $y = e^x$.

Tomando logaritmos en base e, queda $\ln y = x \ln e = x$, luego la función inversa de $y = e^x$ es la $x = \ln y$.

Límite

Límite de una función. — De forma parecida a como definimos el límite de una sucesión de números reales, vamos a definir el límite de una función real $f(x)$ en un punto x_0.

Cuando escribimos que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0$, queremos expresar la idea de que, cuando x se aproxima a x_0 tanto como queramos, mediante los términos de una sucesión, los valores que toma $f(x)$ son también lo suficiente próximos a y_0. De manera rigurosa, escribiríamos :

DEFINICIÓN. — $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \iff \forall \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0 / |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon$.

Dicha definición viene interpretada gráficamente en la *fig.* 2 mediante la representación de las dos sucesiones :

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \longrightarrow x_0$$
$$f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n) \ldots \longrightarrow A$$

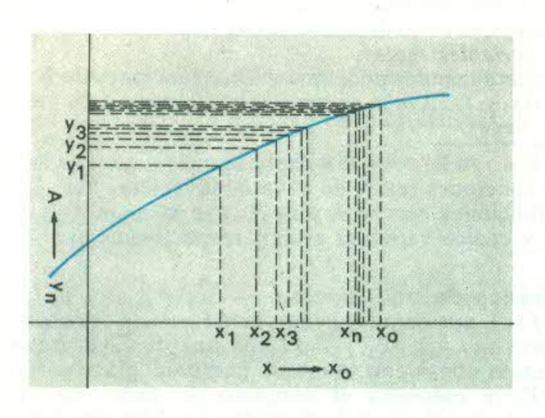


Fig. 2

En la *fig.* 2 se ha escrito en el eje de ordenadas la sucesión $f(x_1)$, $f(x_2) \ldots$ mediante la notación $y_1, y_2, y_3, \ldots y_n \ldots$ Como se comprenderá, ambas notaciones son equivalentes.

Ejemplos : 1.° Sea la función $y = x^2$. Hallar $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$.

Para ello formanos una sucesión cualquiera que tenga como límite 2, por ejemplo :

x_1, x_2, x_3, x_4, ... x_n, ...
1'9, 1'99, 1'999, 1'9999,... 1'9...9, ... $\longrightarrow$ 2

La sucesión $f(x_n) = x_n^2$, sería :

$f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3)$, $f(x_4)$, ..., $f(x_n)$,...
3'61, 3'9601, 3'9960, 3'9996,..., 3'99...9... $\longrightarrow$ 4.

Como vemos, el límite de esta última sucesión es claramente 4.

Observemos que el valor de la función $y = x^2$ en el punto $x = 2$ es $y = f(2) = 4$, y entonces $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$.

2.° Hallar $\lim \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ y también $f(2)$.

Las sucesiones antes escritas serán :

x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, ...
2'1, 2'01, 2'001, 2'0001, 2'00001, ... $\longrightarrow$ 2
$f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3)$, $f(x_4)$, $f(x_5)$, ...
4'1, 4'01, 4'001, 4'0001, 4'00001, ... $\longrightarrow$ 4

Sin embargo, $f(2) = \dfrac{4-4}{2-2} = \dfrac{0}{0}$, que es indeterminado. La función no está definida para $x_0 = 2$.

Este ejemplo nos aclara que una cosa es el límite de una función en un punto, y otra muy distinta el valor de la función en dicho punto. Y sin embargo, como ocurre en el primer ejemplo, ambos valores pueden coincidir para ciertos tipos de funciones.

Otra definición de límite. — Vamos a tratar de dar una definición de límite para funciones en lenguaje de entornos. Para ello observemos que la definición anterior empezaba : $\forall \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0$, y que ambos números ε y δ servían para definir unos entornos $V(A, \varepsilon)$ y $V(x_0, \delta)$, que cumplían la condición de que, si $x_i \in V(x_0, \delta) \implies f(x_i) \in V(A, \varepsilon)$. Una vez sentadas estas ideas, establecemos la siguiente definición.

DEFINICIÓN. — Sea $y = f(x)$ una función real y definida en un intervalo $(a, b) \subset R$, con valores en otro intervalo $(c, d) \subset R$. Sea x_0 un punto de acumulación de (a, b) y sea $A \in (c, d)$. Entonces $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \iff \forall V(A) \subset (c, d), \exists$ un entorno $V(x_0) \subset (a, b) / x \in \left\{ V(x_0) - \{x_0\} \right\} \cap (a, b) \implies f(x) \in V(A)$.

El hecho de que escribamos $x \in \left\{ V(x_0) - \{x_0\} \right\} \cap (a \cdot b)$ es para asegurarnos de que x va a permanecer dentro de (a, b), que es el intervalo donde $f(x)$ está definida.

Por otra parte, escribimos $V(x_0) - \{x_0\}$ para asegurarnos de que la función esté definida, pues, como vimos en el segundo ejemplo anterior, no estaba definida en x_0.

Finalmente, exigimos que x_0 sea un punto de acumulación de (a, b), para tener la seguridad de que $V^*(x_0) \cap (a, b) \neq \emptyset$.

El entorno $V(x_0) - \{x_0\}$ que escribiremos de aquí en adelante $V^*(x)$ es un entorno reducido de x_0, es decir que lo forman puntos de (a, b), exceptuando el punto x_0.

Gráficamente lo anterior equivale a decir que la gráfica de la función $f(x)$ permanece dentro del rectángulo rayado $V(x_0) \times V(A)$. [*Fig.* 3.]

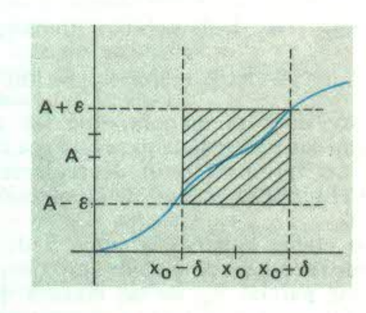


Fig. 3

Límites por la derecha y por la izquierda. — Un caso particular de la definición de límite ocurre cuando el punto x_0 es el punto extremo de un intervalo de R o, lo que es lo mismo, que consideremos intervalos a la izquierda o a la derecha de x_0.

Entonces escribiremos : $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ o $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$.

Puede ocurrir que los límites a la derecha y a la izquierda de una función en un punto sean distintos; en ese caso decimos que no existe $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

Para que exista $\lim_{x \to x_0} f(x)$, *es necesario que existan los dos límites laterales y que además ambos sean iguales.*

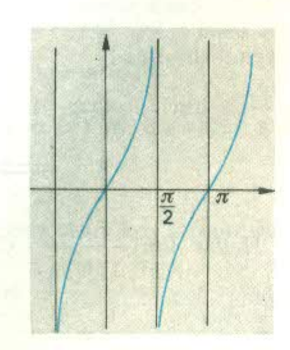


Fig. 4

Ejemplo : la función $y = \operatorname{tg} x$ (*fig.* 4) verifica : $\lim_{x \to \frac{\pi^-}{2}} \operatorname{tg} x = +\infty$, y $\lim_{x \to \frac{\pi^+}{2}} \operatorname{tg} = -\infty$.

Ambos límites son distintos, luego no existe $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x$.

Algunas propiedades importantes. — Sean f y g dos funciones reales, definidas en el mismo intervalo $(a, b) \subset R$, y k_1 y k_2 dos constantes cualesquiera. Entonces se verifican los siguientes teoremas :

1.° Si $f(x) = k_1$, $\forall x \in (a, b)$, $\Longrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = k_1$, $x_0 \in (a, b)$.

2.° Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = A_1$ y $\lim_{x \to x_0} g(x) = A_2$, se verifica $\lim_{x \to x_0} [f(x) \pm g(x)] = A_1 \pm A_2$.

3.° $\lim_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = A_1 \cdot A_2$.

4.° Si $A_2 \neq 0$, se verifica $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A_1}{A_2}$.

5.° $\lim_{x \to x_0} k_2 f(x) = k_2 \cdot A_1$.

Límites infinitos. — Al hallar $\lim_{x \to x_0} f(x)$, puede ocurrir que la sucesión $\{f(x_n)\}$ crezca o disminuya sin límite. En tales casos, escribimos que $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ o $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$. Estos símbolos no representan números reales, sino que representan una manera de expresar un hecho matemático. Decir que $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$ significa que $\forall$ M, M positivo, $\exists\ \varepsilon$, ε función de M/$f(x) > M$, siempre que $|x - x_0| < \varepsilon$. Análogamente, decir que $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ significa que $\forall$ M positivo y real, $\exists\ \varepsilon$, $\varepsilon = \varepsilon(M)/f(x) < -M$, $\forall x$ que cumpla que $|x - x_0| < \varepsilon$.

También diremos que $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$, si $\forall \varepsilon$, $\exists$ N positivo, $/|f(x) - A| < \varepsilon$ siempre que $x > N$.

Cálculo de límites. — El método utilizado en los ejemplos anteriores para hallar límites funcionales no es el más adecuado para toda clase de funciones, sino que se puede decir que cada límite nos marca un camino para averiguarlo.

1) Límite de la forma $\lim_{x \to \infty} \frac{P_1(x)}{P_2(x)}$, donde P_1 y P_2 son polinomios en x. Para hallar dicho límite dividiremos numerador y denominador por la máxima potencia de x.

Ejercicios : *a*) Hallar $\lim_{x \to \infty} \frac{x^3 + 2x - 1}{2x^3 + 4}$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^3 + 2x - 1}{2x^3 + 4} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x^3}{x^3} + \frac{2x}{x^3} - \frac{1}{x^3}}{\frac{2x^3}{x^3} + \frac{4}{x^3}} = \lim_{x \to \infty} \frac{1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^3}}{2 + \frac{4}{x^3}}.$$

Ahora bien $\frac{2}{x} \longrightarrow 0$ cuando $x \longrightarrow \infty$, e igual ocurre con $\frac{1}{x^3}$ y $\frac{4}{x^3}$, con lo que $\lim_{x \to \infty} \frac{x^3 + 2x - 1}{2x^3 + 4} = \frac{1}{2}$.

b) Hallar $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + 1}{x^4}$;

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + 1}{x^4} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}}{1} = \frac{0}{1} = 0.$$

2) Límite de la forma $\lim_{x \to x_0} \frac{p_1(x)}{P_2(x)}$, donde x_0 es una raíz común a P_1 y P_2. Si x_0 es una raíz común, podemos escribir : $\frac{P_1(x)}{P_2(x)} = \frac{P_1'(x)(x - x_0)}{P_2'(x)(x - x_0)} = \frac{P_1'(x)}{P_2'(x)}$, donde P_1' y P_2' son polinomios inferiores en un grado a P_1 y P_2 respectivamente. Entonces escribimos : $\lim_{x \to x_0} \frac{P_1(x)}{P_2(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{P_1'(x)}{P_2'(x)}$, límite que es un número real si la raíz $x = x_0$ no es una raíz múltiple común a P_1 y P_2.

Ejercicios : *a*) Hallar $\lim_{x \to -\sqrt{2}} \frac{x^2 - 2}{x + \sqrt{2}}$

$$\lim_{x \to -\sqrt{2}} \frac{x^2 - 2}{x + \sqrt{2}} = \lim_{x \to -\sqrt{2}} \frac{(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})}{x + \sqrt{2}} = \lim_{x \to -\sqrt{2}} (x - \sqrt{2}) = -2\sqrt{2}.$$

b) Hallar $\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 5x^2 + 7x - 3}{x^3 - x^2 - x + 1}$. La raíz 1 es doble en el numerador y en el denominador, por lo tanto :

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 5x^2 + 7x - 3}{x^3 - x^2 - x + 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)^2 (x - 3)}{(x - 1)^2 (x + 1)} = \lim_{x \to 1} \frac{x - 3}{x + 1} = \frac{-2}{2} = -1.$$

3) $\lim_{x \to 0} \frac{P_1(x)}{P_2(x)}$. Para resolver este límite, se divide numerador y denominador por la mímima potencia en que aparezca x.

Ejercicios : *a*) Hallar $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2+x}{2x^3-x}$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2+x}{2x^3-x} = \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{x^2}{x}+\dfrac{x}{x}}{\dfrac{2x^3}{x}-\dfrac{x}{x}} = \lim_{x \to 0} \frac{x+1}{2x^2-1} = \frac{1}{-1} = -1.$$

b) Hallar $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^7-7x^2}{5x^5+x^2}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^7-7x^2}{5x^5+x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{x^7}{x^2}-\dfrac{7x^2}{x^2}}{\dfrac{5x^5}{x^2}+\dfrac{x^2}{x^2}} = \lim_{x \to 0} \frac{x^5-7}{5x^3+1} = \frac{-7}{1} = -7.$$

4) Límites de funciones trigonométricas.

Para resolver estos límites, es necesario conocer unos límites base, a partir de los cuales podremos hallar los demás; entre estos límites base está $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$.

Para hallarlo, dibujemos la circunferencia trigonométrica (*fig.* 5), y en ella las funciones representativas de $\operatorname{sen} x$, $\cos x$ y $\operatorname{tg} x$ de un cierto ángulo central $x = \operatorname{arco} x$.

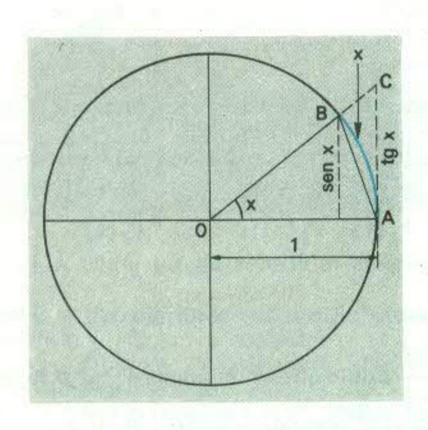


Fig. 5

Entre los triángulos $\widehat{AOB}$, $\widehat{AOC}$ y el sector circular $\widehat{AOB}$, se verifican las siguientes relaciones : área $\widehat{AOB}$ < área $\widehat{AOB}$ < área $\widehat{AOC}$; $\dfrac{1}{2}\operatorname{sen} x < \dfrac{1}{2}x < \dfrac{1}{2}\operatorname{tg} x$, donde el área del sector la hemos hallado multiplicando la mitad de su base x por su altura 1.

La relación puede escribirse $\operatorname{sen} x < x < \operatorname{tg} x$, y dividiendo por $\operatorname{sen} x$: $1 < \dfrac{x}{\operatorname{sen} x} < \dfrac{1}{\cos x}$; invirtiendo los dos términos de las desigualdades, se obtiene : $1 > \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} > \cos x$. Extrayendo límites cuando $x \longrightarrow 0$, se tiene :

$$1 > \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} > \lim_{x \to 0} \cos x \iff 1 > \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} > 1$$
$$\iff \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$

Al mismo tiempo, si en las desigualdades $\operatorname{sen} x < x < \operatorname{tg} x$ dividimos por $\operatorname{tg} x$, se tiene :

$\dfrac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} x} < \dfrac{x}{\operatorname{tg} x} < 1 \iff \cos x < \dfrac{x}{\operatorname{tg} x} < 1$; invirtiendo los términos y extrayendo límites :

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} > \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} > \lim_{x \to 0} 1, \iff 1 > \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} > 1$$
$$\Longrightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1.$$

Ejercicios : *a*) Hallar $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos x}{\dfrac{x^2}{2}}$. Como sabemos,

$1 - \cos x = 2\operatorname{sen}^2 \dfrac{x}{2} = 2\operatorname{sen}\dfrac{x}{2} \cdot \operatorname{sen}\dfrac{x}{2}$. Dividiendo ambos miembros por $\dfrac{x^2}{4}$, queda :

$$\frac{1-\cos x}{\dfrac{x^2}{4}} = \frac{2\operatorname{sen}\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}} \cdot \frac{\operatorname{sen}\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}};$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{\dfrac{x^2}{4}} = 2 \Longrightarrow \lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{\dfrac{x^2}{2}} = 1.$$

b) Hallar $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} px}{x}$, p = constante.

Si multiplicamos numerador y denominador por p, se tiene :

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} px}{x} = \lim\limits_{x \to 0} p \cdot \dfrac{\operatorname{sen} px}{px}$, pero $px \longrightarrow 0$, cuando $x \longrightarrow 0$, $\Longrightarrow \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} px}{x} = p$.

c) Hallar $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} px}{\operatorname{sen} qx}$, siendo p y q constantes.

$$\frac{\operatorname{tg} px}{\operatorname{sen} qx} = \frac{\dfrac{\operatorname{tg} px}{x}}{\dfrac{\operatorname{sen} qx}{x}}; \quad \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} px}{\operatorname{sen} qx} = \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{\operatorname{tg} px}{x}}{\dfrac{\operatorname{sen} qx}{x}} = \frac{p}{q}.$$

Infinitésimos. — Un *infinitésimo* o *función infinitésima* en el punto x_0 es una función que verifica que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$. Más generalmente, podemos decir que toda sucesión convergente hacia 0 es un infinitésimo.

Ejemplo : la función $y = \operatorname{sen} x$ es un infinitésimo, así como la $\underset{x \to 0}{y} = x$ o la $\underset{x \to \infty}{y} = \dfrac{1}{x}$.

A los infinitésimos los designaremos mediante letras griegas, en la forma $\alpha(x)$, $\beta(x)$,... o simplemente α, β.

DEFINICIÓN. — Dos infinitésimos $\alpha(x)$ y $\beta(x)$ se dice que son comparables cuando $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ es un número real determinado.

Diremos que $\alpha(x)$ es de orden superior a $\beta(x)$ si $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$.

Diremos que $\alpha(x)$ es del mismo orden que $\beta(x)$ si $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = r \neq 0,\ r \neq \infty$.

Diremos que $\alpha(x)$ es de orden inferior a $\beta(x)$ si $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$.

Ejemplo: comparar los infinitésimos $\underset{x \to 0}{\operatorname{sen} x}$ y $\underset{x \to 0}{x^2}$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \frac{1}{x} = 1 \cdot \infty = \infty, \implies \operatorname{sen} x$ es de orden inferior a x^2.

Definición. — Dos infinitésimos $\alpha(x)$ y $\beta(x)$ se llaman equivalentes cuando $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$.

Ejemplo: $\underset{x \to 0}{\operatorname{sen} x}$ y x son equivalentes, pues $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$.

Álgebra de infinitésimos. — 1) La suma de infinitésimos es un infinitésimo.

2) La diferencia de infinitésimos es un infinitésimo.

3) El producto $\{a_n\} \cdot \{\alpha_n\}$ es un infinitésimo, siendo $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a,\ a \in \mathrm{R},\ a$ finito.

4) El cociente $\frac{\{\alpha_n\}}{\{a_n\}}$ es un infinitésimo, siendo $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a,\ a \in \mathrm{R},\ a$ finito.

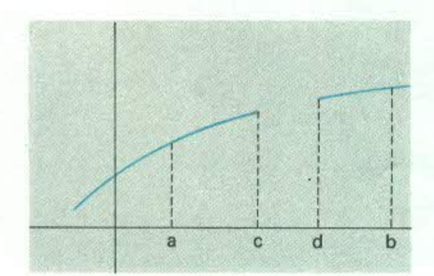
5) El cociente $\frac{\{a_n\}}{\{\alpha_n\}}$ es un infinito, siendo $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a,\ a \in \mathrm{R},\ a$ finito.

Continuidad

Noción de continuidad. — La noción de *continuidad* es una idea intuitiva: la de que la gráfica de una función no tiene saltos; de que podemos perfectamente dibujarla sin levantar la pluma del papel. Vamos a tratar de esquematizar matemáticamente estas ideas intuitivas.

Para ello vamos a considerar cuáles serían los requisitos que se exigirían a un tal tipo de funciones continuas. Por supuesto, el tipo de función representada en la *fig.* 6 no cumple con uno fundamental, a saber: no existe función en un trozo de intervalo, el (c, d), luego no puede ser continua.

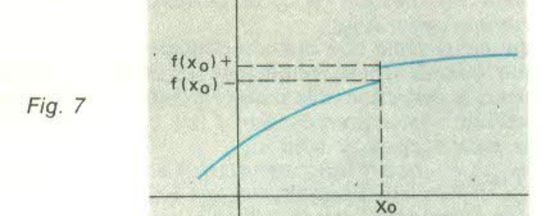
Fig. 6



La función representada en dicha figura, la convertiríamos en continua, haciendo que entre c y d continuara la línea de la gráfica. Matemáticamente esto significaría que la función existiese en (c, d) o que estuviese definida en (c, d).

La función de la *fig.* 7 también vemos que no es continua. ¿Cuál es el requisito que impondríamos para que lo fuese? Sencillamente, que los valores de la función a la izquierda y a la derecha del punto x_0 coincidiesen. Es decir $f(x_0)_- = f(x_0)_+$.

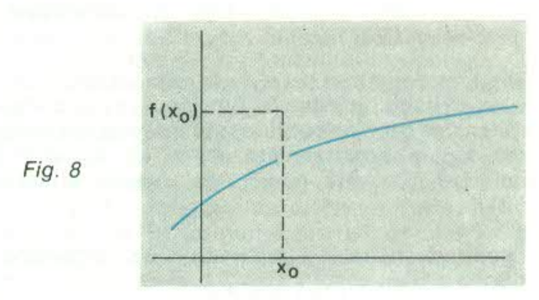
Fig. 7



¿Pero qué es $f(x_0)_-$? Inmediatamente deducimos: $f(x_0)_- = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ y $f(x_0)_+ = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$.

Finalmente, vamos a ver otro tipo de función no continua intuitivamente: la gráfica de la *fig.* 8 representa un tal tipo de función. Es una función que es continua en todo punto excepto en el x_0, pues $f(x_0)$ queda por encima de la gráfica restante. En su lugar, en la gráfica, hay un hueco que se rellenaría con sólo el punto $(x_0, f(x_0))$, que está más arriba. Para convertir dicha función en continua, no hay más que bajar el punto $(x_0, f(x_0))$ o, lo que es lo mismo, hacer que $f(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, puesto que el límite $\lim\limits_{x \to x_0}$ de $f(x)$, cuando x tiende a x_0, es precisamente el hueco de la *fig.* 8.

Fig. 8



Estos tres tipos diferentes de funciones discontinuas, que corresponden a distintos tipos de discontinuidad, nos van a permitir dar una definición precisa de continuidad de una función.

Definición. — La función $y = f(x)$, real y definida en (a, b), es continua en $x_0 \in (a, b)$ si, y sólo si,

1) La función existe en x_0, o sea $\exists\, f(x_0)$ y es finito.

2) Existe $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

3) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Condiciones que hemos visto corresponden a las imposiciones antes hechas a las funciones representadas.

Realmente, las tres condiciones anteriores pueden reducirse a la 3), puesto que, al cumplirse ésta, se verifica que $\exists\, f(x_0)$, o sea 1), y que $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, o sea 2).

Aunque ésta es en esencia la noción de continuidad, existen no obstante otras definiciones que vienen a significar lo mismo. Es frecuente encontrar en textos matemáticos la definición basada en la noción de incremento.

4) Significa : $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta / |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. O, lo que es lo mismo, cuando la diferencia $x - x_0 = \Delta x_0$ se hace infinitamente pequeña, entonces la diferencia $f(x) - f(x_0) = \Delta f(x_0)$ se hace también infinitamente pequeña. Esta idea es la que ha hecho que se utilice la siguiente definición de continuidad.

Una función f(x) *es continua en* $x = x_0$, *cuando a un incremento infinitésimo* Δx_0 *le corresponde un incremento infinitésimo* Δy_0.

Exactamente igual que cuando consideramos la noción de límite lateral, ahora podemos considerar funciones continuas a la derecha o a la izquierda, sin más que variar la definición. Así, diremos que $f(x)$ es continua a la derecha en $x = x_0$ si, y sólo si,

1) $\exists f(x_0)$,

2) $\exists \lim_{x \to x_{0+}} f(x)$,

3) $\lim_{x \to x_{0+}} f(x) = f(x_0)$.

De la misma manera definiremos el límite por la izquierda.

Diremos que una función $y = f(x)$ *es continua en el intervalo* (a, b) *cuando es continua en todos y cada uno de los puntos de dicho intervalo.*

Discontinuidades. — Una función no continua se dice que es discontinua. De la definición de continuidad podemos fácilmente deducir cuando una función es discontinua, a saber, cuando no cumpla una de las tres condiciones.

La carencia de cada una de esas condiciones da lugar a un tipo especial de continuidad, que podemos clasificar del siguiente modo :

a) Discontinuidad evitable. *Una discontinuidad en* $x = x_0$ *se dice evitable cuando existe* $\lim_{x \to x_0} f(x)$, *pero no existe* $f(x_0)$, *es decir, no se cumple la primera condición.*

Se llama evitable, porque la función $f(x)$ la podemos convertir en una función continua sin más que definirla en el punto x_0, y precisamente darle en x_0 el valor $y_0 = \lim_{x \to x_0} f(x)$. De esta manera se cumple la tercera condición.

Así, pues, si creamos a partir de $f(x)$, la función

$$g(x) = \begin{cases} f(x), \ \forall x \neq x_0 \\ \lim_{x \to x_0} f(x) \text{ para } x = x_0. \end{cases}$$

Dicha función $g(x)$ tiene todas las propiedades de $f(x)$, y, además, es continua en x_0.

b) Discontinuidad inevitable de primera especie. *La función* $y = f(x)$ *es discontinua de primera especie, si no se cumple la tercera condición.* En el caso de que $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$, también diremos que es discontinua de primera especie.

Ejemplo : la función $f(x) = \begin{cases} |x|, \text{ para } x < 0 \\ -1 \text{ para } x \geqslant 0 \end{cases}$ es discontinua de salto -1 (*fig.* 9).

Llamanos *salto* de $f(x)$ en $x = x_0$ a la diferencia $\lim_{x \to x_{0+}} f(x) - \lim_{x \to x_{0-}} f(x)$.

La función $f(x) = \dfrac{1}{|x|}$ es también de primera especie, pues $\nexists \lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$ (*fig.* 10).

c) Discontinuidad inevitable de segunda especie. *Una función discontinua en* x_0 *es de segunda especie, cuando no existen uno o los dos límites laterales,* o cuando uno de ellos es $+\infty$ y el otro $-\infty$.

Ejemplo : la función $y = \dfrac{1}{x}$ tiene una discontinuidad de este tipo en $x = 0$ (*fig.* 11).

Continuidad uniforme. — Sea $y = f(x)$ real y definida en un intervalo (a, b). Diremos que $f(x)$ es uniformemente continua si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta, \quad \delta = \delta(\varepsilon), \quad \delta \neq \delta(x, z) / \forall x, z \in (a, b) / |x - z| < \delta \implies |f(x) - f(z)| < \varepsilon.$$

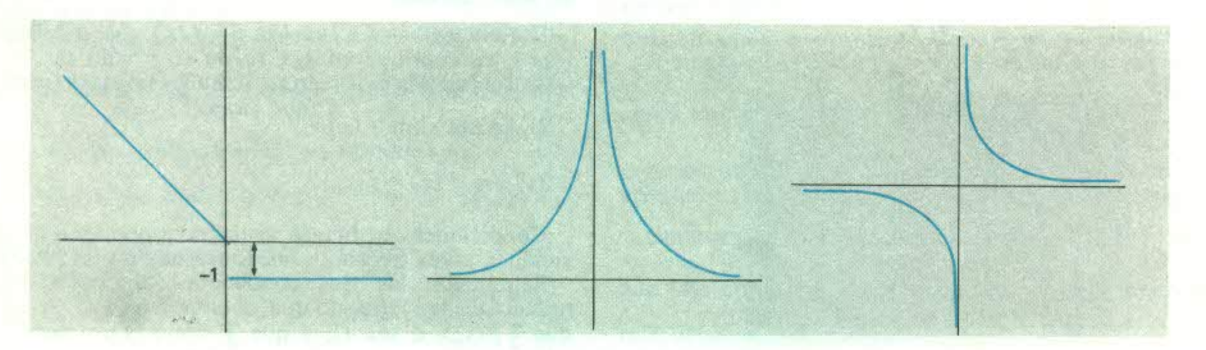
La continuidad uniforme implica la continuidad normal antes estudiada; basta para ello hacer $z = x_0$. La diferencia en la definición estriba en que, en la continuidad definida anteriormente, el número δ era función de ε y del punto x_0, mientras que en la continuidad uniforme, δ sólo es función de ε, o lo que es lo mismo, se puede encontrar un solo δ para todos los puntos del intervalo (a, b).

Ejemplo : vamos a considerar una función continua en un intervalo y que no sea uniformemente continua en él.

Sea $y = \operatorname{tg} x$, $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$. [*Fig.* 12.]

Esta función es continua en el intervalo $(0, \frac{\pi}{2})$, sin embargo no es uniformemente continua. En efecto, dados $x, z \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, supongamos

Fig. 9 *Fig. 10* *Fig. 11*



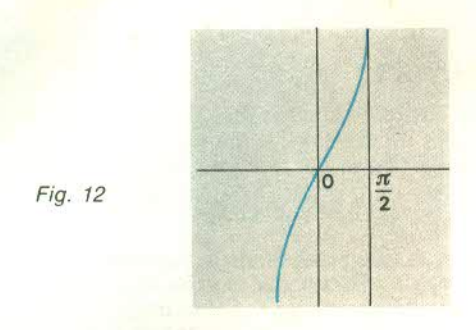


Fig. 12

$z = x + \delta, \implies f(z) - f(x) = f(x+\delta) - f(x) =$
$\operatorname{tg}(x+\delta) - \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}\delta}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg}\delta} - \operatorname{tg} x =$
$\frac{-\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x \cdot \operatorname{tg}\delta + \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}\delta}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg}\delta} = \frac{\operatorname{tg}(1 + \operatorname{tg}^2 x)}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg}\delta},$

dividiendo numerador y denominador por $\operatorname{tg}\delta$, se tiene :
$f(z) - f(x) = \frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{\frac{1}{\operatorname{tg}\delta} - \operatorname{tg} x} > \frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{\frac{1}{\operatorname{tg}\delta}}$. Por pequeño que sea ε, siempre podemos tomar x suficientemente próximo a $\frac{\pi}{2}$, para que $\frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{\frac{1}{\operatorname{tg}\delta}}$ sea mayor que cualquier número ε dado, luego la convergencia no es uniforme.

Ejemplos : 1.° La función $y = x^2$, definida en $0 < x < 1$, es uniformemente continua en dicho intervalo. En efecto, $|f(x) - f(z)| = |x^2 - z^2| = |(x+z)(x-z)| < 2|x - y|$, puesto que $x \in (0, 1)$, $z \in (0, 1)$. Si hacemos $|x - z| = \delta$, $\implies |f(x) - f(z)| < 2\delta$. Luego, dado un ε, basta tomar $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ para asegurar que $|f(x) - f(z)| < \varepsilon$, $\forall x$, $z \in (0, 1)$.

2.° Demostrar que la función $y = x$ es continua en cualquier punto $x = x_0$.

Demostrémoslo a partir de las definiciones.

1) $f(x)$ existe $\forall x \in \mathrm{R}$ y su valor es $f(x_0) = x_0$.

2) $\lim_{x \to x_0} f(x)$ también existe, pues $\lim_{x \to x_0} x = x_0$.

3) $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, pues según 1) y 2) ambos valen x_0.

Según la segunda definición, dado un $\varepsilon > 0$, ha de existir $\delta > 0 / |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, siempre que $|x - x_0| < \delta$. En efecto, basta tomar $\delta = \varepsilon$, y tenemos : si $|x - x_0| < \varepsilon \implies |f(x) - f(x_0)| = |x - x_0| < \varepsilon$.

3.° Analizar la continuidad de la función $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$.

Encontrar una nueva función $g(x)$, tal que $f(x) = g(x)$ en todo punto excepto en x_0, si en x_0 la función $f(x)$ tiene una discontinuidad evitable.

$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ está definida $\forall x_i \neq 0$, y es continua en dichos puntos x_i. El único punto en que no está definida es en $x_0 = 0$, luego no es continua en dicho punto.

Por otra parte, $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$, luego la función

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \text{para } x \neq 0 \\ 1 \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

conserva las mismas propiedades de $f(x)$, $x \neq 0$ y además $g(0) = 1$, verificándose por tanto que $\lim_{x \to 0} g(x) = 1$.

Álgebra de las funciones continuas. — Se demuestran fácilmente las siguientes proposiciones.

Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones continuas en x_0 se verifica :

1) $f(x) + g(x)$ es continua en x_0,
2) $\lambda f(x)$ y $\mu g(x)$ son continuas en x_0, $\forall \lambda$, μ constantes,
3) $\lambda f(x) + \mu g(x)$ es continua en x_0,
4) $f(x) \cdot g(x)$ es continua en x_0,
5) $\frac{f(x)}{g(x)}$ es continua en x_0, si $g(x_0) \neq 0$,
6) Si $f(x_0) > 0$, $\log_b f(x_0)$ es continua en x_0, $\forall b$ = constante,
7) sen $[f(x_0)]$ y cos $[f(x_0)]$ son continuas en x_0,
8) en general podemos afirmar que toda función racional de la forma $\frac{\mathrm{P}(x)}{\mathrm{Q}(x)}$ es continua en todo x, excepto para los puntos en que se anule el denominador.

Propiedades de las funciones continuas. — A continuación se enuncian, sin demostración, algunas propiedades importantes de las funciones continuas.

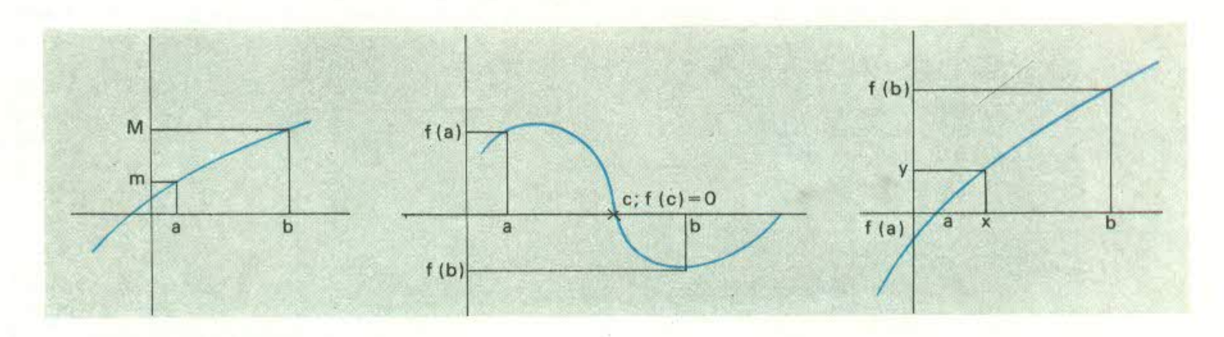
1) *Teorema de Weierstrass*. Toda función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ admite un máximo y un mínimo absoluto en dicho intervalo (*fig.* 13).

2) *Teorema de Bolzano*. Toda función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, que toma valores de signos opuestos en los extremos de dicho intervalo, se anula al menos una vez en un punto interior de (a, b) [*fig.* 14].

3) *Teorema de Heine*. Toda función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ es uniformemente continua en $[a, b]$.

4) *Teorema de Darboux*. Toda función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, tal que $f(a) \neq f(b)$, toma todos los valores $y / f(a) \leq y \leq f(b)$ [*fig.* 15].

Fig. 13 Fig. 14 Fig. 15



17. — Derivación

Definición. Significado físico de la derivada. Interpretación geométrica de la derivada. Derivadas sucesivas. Cálculo de derivadas. — **Diferenciación** : Definición. Diferenciales sucesivas. Crecimiento y decrecimiento de una función en un punto. Máximos y mínimos de una función. Teorema de Rolle. Teorema del valor medio. Teorema de L'Hospital.

Definición. — Dada una función $y = f(x)$, llamaremos incremento de la variable y en el punto x_0, correspondiente a un incremento Δx_0 de la variable x, a la diferencia $\Delta y_0 = f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0)$, donde Δy_0 es el incremento de la variable y.

Ejemplo : hallar el incremento de la función $y = x^2$, cuando x varía de $x = 2$ hasta $x_0 + \Delta x_0 = 2'5$.

$\Delta y_0 = f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0) = f(2'5) - f(2) = 2'5^2 - 2^2 = 6'25 - 4 = 2'25.$

Una vez hecha esta definición, podemos dar la de *derivada de una función* en un punto x_0, como el $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0)}{\Delta x_0}$ cuando éste existe.

Si una función admite derivadas en todos los puntos de un intervalo abierto (a, b), diremos que tiene derivada en dicho intervalo; de esta manera podemos considerar las parejas de la forma $(x_0, f'(x_0))$, $(x_1, f'(x_1))$, ... que nos definen otra función, que llamaremos función derivada de la $y = f(x)$, y que representaremos mediante las notaciones y'_x, $f'(x)$, o $\dfrac{dy}{dx}$.

Ejemplo : hallar la derivada de la función $y = x^2$ en el punto de abscisa $x_0 = 4$.

$y + \Delta y = (x + \Delta x)^2 = x^2 + 2x\,\Delta x + (\Delta x)^2;$

$\Delta y = x^2 + 2x\,\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2 = 2x\,\Delta x + (\Delta)^2;$

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{2x\,\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x;$

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2.$ La función derivada es la $y'_x = 2x$, y $f'(4) = 2 \cdot 4 = 8$.

Significado físico de la derivada. — La noción de velocidad es, como sabemos, un concepto difícil de precisar, si no especificamos que deseamos saber la velocidad de un móvil en un tiempo determinado. Por ejemplo, si deseamos conocer la velocidad de un móvil que ha recorrido 200 km en dos horas, responderíamos que la velocidad media de dicho móvil ha sido de 100 km/h. Pero nosotros sabemos que dicha velocidad no ha sido constante en todo el recorrido. Para conocer la velocidad en un momento preciso, efectuaríamos el cociente $\dfrac{e_2 - e_1}{t_2 - t_1}$, donde e_2 y e_1 son los espacios recorridos por el móvil en los tiempos t_2 y t_1.

Aun así, habremos hallado la velocidad media entre los tiempos t_2 y t_1. Para hallar la velocidad en el momento t_1, habríamos de hacer que t_2 fuese muy cercano a t_1, o, lo que es lo mismo, que el incremento $t_2 - t_1 = \Delta t_1$ tendiese hacia 0.

El cociente $\dfrac{e_2 - e_1}{t_2 - t_1}$, cuando $\Delta t_1 \longrightarrow 0$, se convierte en un límite, y la velocidad la podemos definir como $\lim\limits_{t_2 \to t_1} \dfrac{e_2 - e_1}{t_1 - t_2}$, que nos dice que la velocidad es la derivada del espacio respecto del tiempo.

TEOREMA. — Si una función posee derivada en un punto, es continua en dicho punto.

En efecto, si $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} \iff \left| \dfrac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x_0) \right| < \varepsilon$ una vez fijado $\varepsilon \implies \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \varepsilon \implies \Delta y = [f'(x_0) + \varepsilon] \cdot \Delta x.$

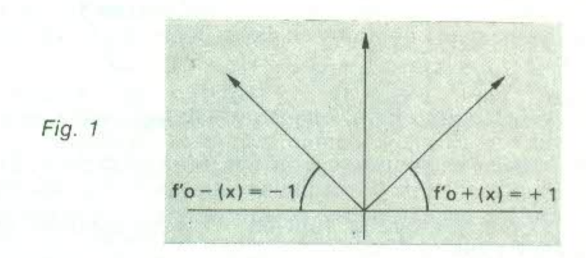


Fig. 1

Si hacemos que $\Delta x \longrightarrow 0, \implies \Delta y \longrightarrow 0$, ó, lo que es igual, $y = f(x)$ es continua.

Lo contrario no es cierto, pues una función puede ser continua en un punto y no tener derivada en dicho punto. Por ejemplo, la función $y = |x|$ es continua en el punto $x = 0$, y sin embargo no posee derivada en dicho punto. (*Fig.* 1.)

Interpretación geométrica de la derivada. — Sea la función $y = f(x)$ continua, cuya gráfica viene representada en las *fig.* 2 y 3.

La *fig.* 2 nos muestra la secante AB y el ángulo α_n que forma dicha secante con el eje de abscisas. Entonces, el

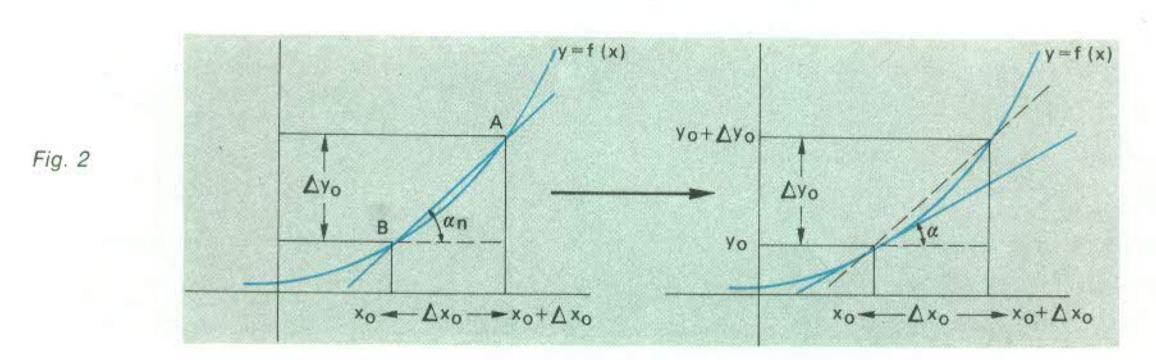


Fig. 2 *Fig. 3*

cociente $\frac{\Delta y_0}{\Delta x_0}$ viene representado por la tangente de dicho ángulo α_n : $\operatorname{tg}\alpha_n$.

Si hacemos ahora que $\Delta x_0 \longrightarrow 0$, la secante AB tiende a convertirse en la tangente en el punto B, y el ángulo α_n en el α, que forma dicha tangente con el eje de abscisas. O, de otra manera, el ángulo α es el ángulo límite de la sucesión $\{\alpha_n\}$ cuando $\Delta x_0 \longrightarrow 0$. Entonces se tiene que :

$$\operatorname{tg}\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg}\alpha_n = \lim_{\Delta x_0 \to 0} \frac{\Delta y_0}{\Delta x_0} = f'(x_0).$$

Esta importantísima relación nos dice que *el valor de la derivada de una función en un punto es la tangente del ángulo que forma dicha curva con el eje de abscisas.*

Ejercicio : hallar la ecuación de la tangente a la curva $y = x^2 + 5$ en el punto de abscisa $x_0 = 3$.

Si $x_0 = 3$, $y_0 = 14$, y la ecuación de la tangente es : $y - y_0 = m(x - x_0)$; $y - 14 = f'(x_0)(x - 3)$; pero $f'(x) = 2x$, $f'(3) = 6 \Longrightarrow y - 14 = 6(x - 3) \Longrightarrow y = 6x - 4$.

Derivadas sucesivas. — Hemos visto que, dada una función, se puede considerar a su derivada como una nueva función $f'(x)$. A su vez esta función puede tener derivada, encontrando de esta manera la derivada segunda de la función $y = f(x)$, que representaremos por y''_x o $f''(x)$, y así sucesivamente.

Ejemplo : hallar la derivada segunda de $y = x^2$.

Anteriormente se ha visto que $y' = 2x$. Derivando, se obtiene : $y' + \Delta y' = 2(x + \Delta x) = 2x + 2\Delta x$;

$$\Delta y' = 2x + 2\Delta x - 2x = 2\Delta x ; \quad \frac{\Delta y'}{\Delta x} = \frac{2\Delta x}{\Delta x} = 2;$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\Delta y'}{\Delta x} = \lim_{x \to 0} 2 = 2 \Longrightarrow y''_x = 2.$$

Cálculo de derivadas. — Dado que la operación derivación la vamos a utilizar muy a menudo, conviene establecer unas reglas generales que nos permitan, dada una función, hallar su derivada sin necesidad de tener que recurrir a la laboriosidad del método utilizado hasta ahora.

1) *Derivada de una constante.*

Sea $y = k$, dado que k es constante, $\Longrightarrow \Delta y = 0$, y por consecuencia $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0 \Longrightarrow y'_x = 0$, $\Longleftrightarrow$. La derivada de una constante es 0.

2) *Derivada de una función por una constante.*

Sea $y = k \cdot f(x)$; $\Delta y = k\,[f(x + \Delta x) - f(x)]$;

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = k \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = k \cdot f'(x) \Longleftrightarrow .$$

La derivada de una constante por una función es igual a la constante por la derivada de la función.

3) *Derivada de una suma de funciones.*

Sea $y = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)$; $\Delta y = f_1(x + \Delta x) - f_1(x) + f_2(x + \Delta x) - f_2(x) + \ldots + f_n(x + \Delta x) - f(x) = \Delta f_1(x) + \Delta f_2(x) + \ldots + \Delta f_n(x)$.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta f_1(x)}{\Delta x} + \ldots + \frac{\Delta f_n(x)}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f_1(x)}{\Delta x}$$

$$+ \ldots + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f_n(x)}{\Delta x} = f'_1(x) + f'_2(x) + \ldots + f'_n(x).$$

La derivada de una suma de funciones es la suma de las derivadas de cada una de las funciones.

4) *Derivada de la función inversa.*

Sea la función $y = f(x)$ continua y su inversa $x = f^{-1}(y)$ que suponemos también continua. La derivada de dicha función inversa será :

$$x'_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{y'_x}.$$

Y resumiendo, *la derivada de una función inversa es la inversa de la derivada.*

5) *Derivada de una función compuesta.*

Sea la función $y = f(z)$, donde $z = \varphi(x)$; queremos hallar y'_x, suponiendo que exista, y que tanto f como φ son continuas. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta z} \cdot \frac{\Delta z}{\Delta x}$. Tomando límites, $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta z} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x}$; ahora bien, la hipótesis de continuidad implica que si

$\Delta x \longrightarrow 0 \Longrightarrow \Delta z \longrightarrow 0$, y entonces :

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_x = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta z} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} = y'_z \cdot z'_x.$$

6) *Derivada de* $y = \log_a x$.

$y + \Delta y = \log_a (x + \Delta x)$; $\quad \Delta y = \log_a (x + \Delta x) - \log_a x$

$$= \log_a \frac{x + \Delta x}{x} = \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right); \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}$$

$$= \frac{1}{x} \cdot \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}; \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \log_a e.$$

7) *Derivada del logaritmo de una función.*

Dada la función $f(x)$, se trata de encontrar la derivada de $y = \ln f(x)$; ésta es una función compuesta, que podemos escribir en la forma $y = \ln z$, $z = f(x)$. Por tanto su derivada es : $y'_x = z'_x \cdot y'_z = \frac{1}{z}$; $f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$. O sea, la derivada de $y = \ln f(x)$ es $y'_x = \frac{f'(x)}{f(x)}$.

8) *Derivada de la función potencial.*

Sea la función $y = [f(x)]^n$; tomando logaritmos se tiene : $\ln y = n \cdot \ln f(x)$; derivando encontramos :

$$\frac{y'}{y} = n \cdot \frac{f'(x)}{f(x)}; \quad y' = n \cdot f'(x) \cdot \frac{[f(x)]^n}{f(x)} = n \cdot [f(x)]^{n-1} \cdot f'(x).$$

En el caso particular de $y = x^n$, obtenemos $y' = n \cdot x^{n-1}$.

9) *Derivada de la función exponencial.*

Sea la función $y = e^x$; su función inversa es $x = \ln y$, y la derivada de dicha función inversa es $x'_y = \frac{1}{y}$. Dado que $y'_x = \frac{1}{x'_y} = y$, entonces $y'_x = e^x$.

En general, la derivada de la función $y = a^x$ es la $y'_x = a^x \cdot \ln a$.

10) *Derivada de un producto de funciones.*

Sea $y = u(x) \cdot v(x)$; tomando logaritmos y derivando se tiene : $\ln y = \ln u(x) + \ln v(x)$,

$$\frac{y'}{y} = \frac{u'(x)}{u(x)} + \frac{v'(x)}{v(x)} = \frac{v(x) \cdot u'(x) + v'(x) \cdot u(x)}{u(x) \cdot v(x)};$$

$$y' = y \frac{v(x) \cdot u'(x) + u(x) \cdot v'(x)}{y} =$$

$$u(x) \cdot v'(x) + v(x) \cdot u'(x).$$

11) *Derivada de un cociente de funciones.*

Sea $y = \frac{f(x)}{g(x)}$, donde $g(x) \neq 0$; $\ln y = \ln f(x) - \ln g(x)$,

y además :

$$\frac{y'}{y} = \frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{f(x) \cdot g(x)};$$

$$y' = y \cdot \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{f(x) \cdot g(x)} = \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{[g(x)]^2}.$$

12) *Derivada de* $y = \operatorname{sen} x$.

Aplicando el método de los incrementos para hallar la derivada, se tiene :

$$y = \operatorname{sen}(x + \Delta x) - \operatorname{sen} x = 2 \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \operatorname{sen} \frac{\Delta x}{2};$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} \cdot \operatorname{sen} \frac{\Delta x}{2} = \frac{\frac{2}{2} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \operatorname{sen} \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}};$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \frac{\operatorname{sen} \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \lim_{\Delta x \to 0} \cdot \cos x = \cos x.$$

La derivada de $y = \operatorname{sen} x$ es $y = \cos x$.

13) *Derivada de* $y = \cos x$.

Podemos escribir $\cos x = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, y derivando esta función se tiene : $y'_x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot (-1) = -\operatorname{sen} x$.

14) *Derivada de* $y = \operatorname{tg} x$.

Escribiendo dicha función en la forma $y = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$, y aplicando la regla de derivación para un cociente, se tiene :

$$y'_x = \frac{\cos^2 x - \operatorname{sen} x \cdot (-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x.$$

15) *Derivada de la función* $y = \operatorname{arc\,sen} x$.

Esta función es la inversa de $x = \operatorname{sen} y$, cuya derivada es $x'_y = \cos y = \sqrt{1 - x^2}$, $\Longrightarrow$ $y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

16) *Derivada de la función* $y = \operatorname{arc} \cos x$.

La función inversa es la $x = \cos y$, cuya derivada es la

$$x'_y = -\operatorname{sen} y = -\sqrt{1 - x^2}, \Longrightarrow y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

17) *Derivada de la función* $y = \operatorname{arc\,tg} x$.

Su función inversa es la $x = \operatorname{tg} y$, cuya derivada es

$$x'_y = 1 + \operatorname{tg}^2 y = 1 + x^2, \Longrightarrow y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

18) *Para encontrar las derivadas de las demás funciones circulares o inversas, se utilizan los mismos métodos que los hasta aquí encontrados, verificándose :*

FUNCIONES	DERIVADAS
$y = \operatorname{cotg} x$	$y'_x = \frac{-1}{\operatorname{sen}^2 x}$
$y = \operatorname{arc\,cotg} x$	$y'_x = \frac{-1}{1 + x^2}$.

Ejemplos : hallar las derivadas de las siguientes funciones : $y = \operatorname{sen}^2 x$, $y = \frac{x}{\operatorname{sen} x}$, $y = \sqrt{3^x}$, $y = \ln \operatorname{tg} x$, $y = x^x$, $y = 3x^2 \cdot (1 + x)^2$, $y = \operatorname{arc\,sen} \sqrt{x}$, $y = \operatorname{arc\,tg} 2^x$.

$y = \operatorname{sen}^2 x$; $y = (\operatorname{sen} x)^2 = u^2$; $y'_x = y'_u \times u'_x = 2u \cos x = 2 \operatorname{sen} x \cdot \cos x$

$$y = \frac{x}{\operatorname{sen} x};\ y'_x = \frac{\operatorname{sen} x - x \cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$$

$$y = \sqrt{3^x};\ y'_x = \frac{1}{2\sqrt{3^x}} \cdot 3^x \cdot \ln 3$$

$$y = \ln \operatorname{tg} x;\ y'_x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}(1 + \operatorname{tg}^2 x)$$

$y = x^x$. Tomando logaritmos $\ln y = x \ln x$, y derivando :

$$\frac{y'}{y} = x \cdot \frac{1}{x} + \ln x;\ y'_x = y(1 + \ln x) = x^x(1 + \ln x)$$

$$y = 3x^2(1 + x)^2;$$

$$y'_x = (1 + x)^2 \cdot 6x + 3x^2 \cdot 2(1 + x) = (1 + x)[(1 + x)6x + 6x^2] = 6x(1 + x)(1 + 2x)$$

$$y = \operatorname{arc\,sen} \sqrt{x};\ y'_x = \frac{1}{\sqrt{1 - x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$y = \operatorname{arc\,tg} 2^x;\ y'_x = \frac{1}{1 + (2^x)} \cdot 2^x \ln 2 = \frac{2^x \ln 2}{1 + 2^{2x}}.$$

Diferenciación

Definición — Sea la función $y = f(x)$, que suponemos derivable en el punto $(x_0 y_0)$. *Llamaremos diferencial de* y, *y representaremos* dy, *a una nueva función obtenida del producto* $f'(x_0) \cdot \Delta x_0$, *donde* Δx_0 *es un incremento cualquiera de* x *en el punto* x_0.

Geométricamente, la noción de diferencial viene aclarada en la *fig.* 4. De las definiciones anteriores sabemos que

$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha \cdot TB = f'(x_0) \cdot \Delta x_0 \Longrightarrow TB = (dy)_{x = x_0}.$$

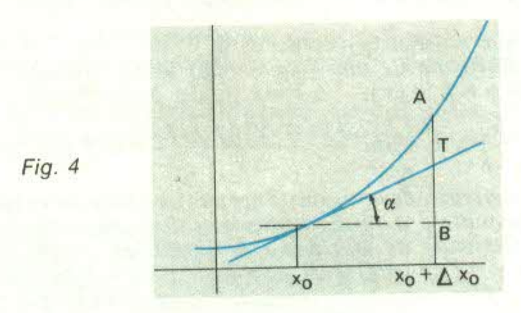


Fig. 4

Por otra parte, sabemos que

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) \Longrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon \Longrightarrow$$

$$\Delta y = [f'(x) + \varepsilon] \cdot \Delta x = [f'(x)] \Delta x + \varepsilon \cdot \Delta x = dy + \varepsilon\, \Delta x \Longleftrightarrow \Delta y = dy + \varepsilon\, \Delta x,$$

o sea, un incremento de la función $y = f(x)$ es la suma de la diferencial de dicha función y de un infinitésimo de orden superior.

Δy es un infinitésimo equivalente a dy; en efecto,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{dy} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{f'(x)\cdot \Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x)\cdot \Delta x + \varepsilon\, \Delta x}{f'(x)\cdot \Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x)+\varepsilon}{f'(x)} = 1.$$

Si hallamos la diferencial de la función $y = x$, encontramos que $dy = dx$, y por otra parte $dy = f'(x)\cdot \Delta x = 1\cdot \Delta x \Longrightarrow \Delta x = dx$, y podemos escribir $dy = f'(x)\cdot dx \Longleftrightarrow f'(x) = \frac{dy}{dx}$, relación que justifica la notación que ya dimos para la derivada.

La operación de encontrar la diferencial de una función queda reducida a hallar la derivada de dicha función y multiplicarla por dx.

Diferenciales sucesivas. — Igual que definíamos las derivadas sucesivas de una función, podemos considerar las diferenciales sucesivas de una función, definidas por :

$d^2 y = f''(x)\, dx^2$
$d^3 y = f'''(x)\, dx^3$ y en general $dn^{n)} y = f^{n)}(x)\, dx^n$.

Ejemplos : 1.º hallar dy en las funciones siguientes : $y = x^2 + x - 1$; $y = (2x^2 - 5)$.

$dy = d(x^2) + d(x) + d(-1) = 2xdx + dx + 0 = (2x + 1)\, dx$

$dy = d(2x^2) - d\,5 = 4 \times dx$.

2.º Hallar con valor aproximado :
sen 61º; $\log_{10} 10'5$.

Haciendo $x_0 = 60^0$, y $dx = 1^0$, se tiene : $y = \operatorname{sen} x$; $dy = \cos x dx$; $dy = \cos 60 \cdot dx$; $dx = 0'018$ radianes. $dy = \frac{1}{2} 0'018 = 0'009$, $y + \Delta y = \operatorname{sen} 61^0 = \frac{1}{2} + 0'009 = 0'5009$.

Tomando $x_0 = 10$, y $dx = 0'5$, se tiene : $y = \log x$; $dy = \frac{\log e}{x} dx$, $dy = \log e \frac{0'5}{10} = 0{,}05 \log e$.

Teniendo en cuenta que $\log 10 = 1 \Longrightarrow y + \Delta y = 1 + 0'05 \log e$.

Crecimiento y decrecimiento de una función en un punto. — Supongamos que una función $y = f(x)$ es tal que en un punto x_0 se verifica : a un incremento Δx_0 positivo le corresponde un incremento también positivo Δy_0. El cociente de incrementos $\frac{\Delta y_0}{\Delta x_0}$ será positivo, así como la derivada en el punto x_0. Resumiendo, podemos decir que una función con derivada positiva en un punto es tal que a variaciones del mismo signo de x le corresponden variaciones del mismo signo de $f(x)$. *A un tal tipo de funciones se les llama crecientes, o también que la función* y = f (x) *es creciente en el punto* x = x_0 (*fig.* 5).

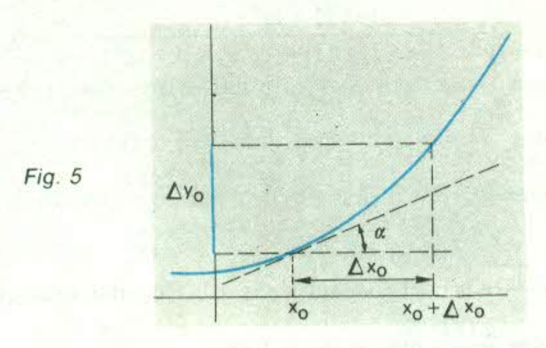


Fig. 5

Por el contrario, *diremos que la función* y = f (x) *es decreciente en el punto* x = x_0, *cuando a un incremento positivo de la variable independiente* x *le corresponde un incremento negativo de la variable* y, *o cuando a un incremento* Δx_0 *negativo le corresponde un incremento* Δy_0 *positivo*.

En estas condiciones, vemos claramente que el cociente de incrementos $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ es siempre negativo, y por tanto la derivada de $y = f(x)$ en el punto $x = x_0$ será también negativa (*fig.* 6).

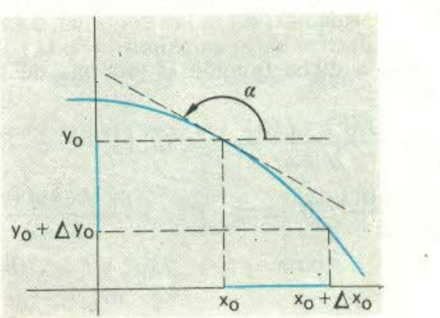


Fig. 6

Ejemplo : estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función $y = \operatorname{sen} x$ en el punto $x = \frac{\pi}{4}$.

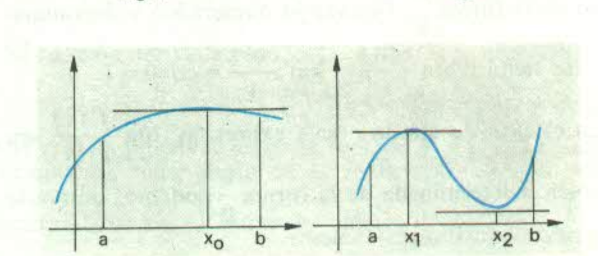
La función $y = \operatorname{sen} x$ tiene por derivada $y' = \cos x$, cuyo valor en el punto de abscisa $x_0 = \frac{\pi}{4}$ es : $y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$, luego la función es creciente en $x = \frac{\pi}{4}$.

Máximos y mínimos de una función. — Anteriormente hemos considerado las características de una función, cuando su primera derivada era mayor o menor que 0. *Ahora vamos a ver que ocurre cuando* f' (x_0) = 0. *En tal caso se dice que la función posee un máximo, un mínimo o un punto de inflexión*.

Teorema de Rolle. — Sea $y = f(x)$ una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en el abierto (a, b), tal que se cumple que $f(a) = f(b)$. Entonces existe al menos un punto interior $x_0 \in (a, b) / f'(x_0) = 0$. En efecto, dado que $f(a) = f(b)$, y que además $f(x)$ es continua en $[a, b]$, en virtud del teorema de Bolzano-Weierstrass, la función alcanza su máximo y mínimo absolutos en $[a, b]$. Si dichos máximo y mínimo se alcanzan en los extremos del intervalo, la función es constante en todo el intervalo $\Longrightarrow f'(x_0) = 0 \; \forall x \in [a, b]$. Si el máximo o el mínimo se alcanzan en el interior del intervalo, en los puntos de abscisa correspondientes, se verifica que $f'(x) = 0$.

Geométricamente, el teorema significa que la gráfica de la función posee al menos un punto en (a, b) tal que la tangente en dicho punto es paralela al eje OX. (*Fig.* 7 y 8.)

Fig. 7 Fig. 8



Teorema del valor medio. — Sea $f(x)$ continua en $[a,b]$ y con derivada en (a,b). Existe entonces un punto $x_0 \in (a,b)$ tal que se verifica que $f(b)-f(a)=f'(x_0)(b-a)$.

El teorema de Rolle lo podemos considerar como un caso especial del teorema del valor medio, cuando $f(a)=f(b)=0$.

Para demostrarlo, definamos la función

$$\varphi(x)=f(x)-f(a)-(x-a)\cdot\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

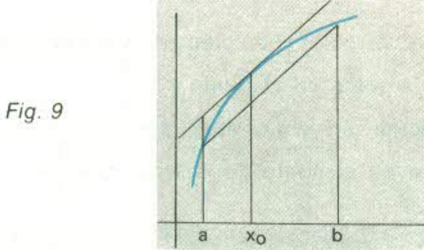
Con las condiciones del teorema, se verifica que $\varphi(a)=\varphi(b)=0$. Además, si $f(x)$ es continua, $\varphi(x)$ lo es también; y si es derivable, lo es asimismo $\varphi(x)$. Luego podemos aplicar a dicha función el teorema de Rolle: $\varphi'(x_0)=0$, pero

$$\varphi'(x_0)=f'(x_0)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a},\ x_0\in(a,b),\ \Longleftrightarrow$$

$$f'(x_0)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0 \Longrightarrow f'(x_0)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$\Longrightarrow f(b)-f(a)=f'(x_0)(b-a).$$

Fig. 9



Geométricamente, esto significa que $\exists\, x_0 \in (a,b)$, tal que la tangente en dicho punto es paralela a la secante de extremos $(a,f(a))$, $(b,f(b))$. [*Fig.* 9.]

Teorema de L'Hospital. — Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones tales que se anulan para $x=x_0$. Sean $f'(x)$ y $g'(x)$ las derivadas de dichas funciones, tales que verifican:

1) $g'(x)\neq 0$. 2) $\exists \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$. En esas condiciones se tiene que: $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Este teorema, que es conocido también por *regla de L'Hospital,* nos permite obtener los límites de algunas expresiones indeterminadas de la forma $\frac{0}{0}$, directamente, sin más que derivar el numerador y el denominador de la expresión y hallar el límite del nuevo cociente.

Ejemplo: hallar $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}$. Este límite es indeterminado de la forma $\frac{0}{0}$. Derivando numerador y denominador, se tiene: $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=\cos 0=1$.

En el caso de que la nueva expresión $\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ sea también indeterminada de la forma $\frac{0}{0}$ podemos derivarla de nuevo, y así sucesivamente.

La regla de L'Hospital también puede aplicarse en el caso de que $x_0=\infty$.

Dicho teorema, no sólo es aplicable a la forma de indeterminación $\frac{0}{0}$, sino que, mediante cambios adecuados, podemos extenderlo a otras formas indeterminadas.

Forma $\frac{\infty}{\infty}$. Supongamos que $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\infty}{\infty}$.

Ahora bien, $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\left[\frac{1}{g(x)}:\frac{1}{f(x)}\right]=\frac{0}{0}$ con lo cual hemos transformado la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$ en la $\frac{0}{0}$.

Se demuestra también que $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=$ $\ldots=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{n)}(x)}{g^{n)}(x)}$, cuando son de la forma $\frac{\infty}{\infty}$.

Ejemplo: hallar $\lim_{2\to\infty} x^2 e^{-x}$.

$$\lim_{x\to\infty} x^2\cdot e^{-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{e^x}=0.$$

Forma $\infty-\infty$. De manera general podemos decir que la expresión que nos da la indeterminación $\infty-\infty$ es posible convertirla en otra del tipo $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$, con lo cual, una vez realizada esta transformación, basta aplicar la regla de L'Hospital.

Supongamos que $\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty$,

$$\lim_{x\to x_0} g(x)=\infty \Longrightarrow \lim_{x\to x_0}[f(x)-g(x)]=\infty-\infty,$$

pero

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)-g(x)]=\lim_{x\to x_0}\left[\left(\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}\right):\frac{1}{f}(x)\cdot g(x)\right],$$

cuya expresión del segundo miembro es de la forma $\frac{0}{0}$ y podemos, por tanto, aplicar la regla de L'Hospital.

Ejemplo: hallar $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\operatorname{tg} x}-\frac{1}{x}\right)$,

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\operatorname{tg} x}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{tg} x}{x\cdot\operatorname{tg} x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-1-\operatorname{tg}^2 x}{(1+\operatorname{tg}^2 x)+\operatorname{tg} x}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{tg}^2 x}{(1+\operatorname{tg}^2 x)+\operatorname{tg} x}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{-2\operatorname{tg} x\,(1+\operatorname{tg}^2 x)}{(1+\operatorname{tg}^2 x)+x\cdot 2\operatorname{tg} x\,(1+\operatorname{tg}^2 x)+1+\operatorname{tg}^2 x}=\frac{0}{2}=0.$$

Forma $0\cdot\infty$. Sean $f(x)$ y $g(x)$, tales que $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$ y $\lim_{x\to x_0} g(x)=\infty$, entonces $\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x)=0$.

Operando, $\lim_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$, que es de la forma $\frac{\infty}{\infty}$, a la cual podemos aplicar L'Hospital, igual que a la $\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$, que es de la forma $\frac{\infty}{\infty}$.

Ejemplo : hallar $\lim_{x \to 0_+} x \cdot \ln x$,

$$\lim_{x \to 0_+} x \cdot \ln x = \lim_{x \to 0_+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0_+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x \to 0_+} -x = 0.$$

Formas ∞^0, 0^0, y 1^∞.

Supongamos que $f(x)$ y $g(x)$ sean dos funciones a partir de las cuales formamos la función $[f(x)]^{g(x)}$.

Las formas indeterminadas de $[f(x)]^{g(x)}$ vendrán expresadas por el siguiente cuadro :

$\lim f(x)$	$\lim g(x)$	$\lim f(x)^{g(x)}$
∞	0	∞^0
0	0	0^0
1	∞	1^∞

En los tres casos, si tomamos logaritmos en la expresión $[f(x)]^{g(x)}$, se tiene : $\ln [f(x)]^{g(x)} = g(x) \cdot \ln f(x)$, y la expresión del segundo miembro es siempre de la forma $0 \cdot \infty$, que la podemos tratar, como ya hemos visto, por la regla de L'Hospital. Ahora bien, hemos de tener en cuenta que hemos hallado el límite de la función $\ln [f(x)^{g(x)}]$. Supongamos que dicho límite sea A; para hallar el límite de $f(x)^{g(x)}$, tendremos que hacer :

$$\lim_{x \to x_0} \ln [f(x)]^{g(x)} = A \Longrightarrow \lim_{x \to x_0} [f(x)]^{g(x)} = e^A.$$

Ejemplo : hallar $\lim_{x \to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}}$ y $\lim_{x \to \infty} (e^x - x)^{\frac{1}{x}}$.

Estos dos límites corresponden a las formas indeterminadas 1^∞ y ∞^0 :

$$\ln (\cos x)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x} \ln \cos x; \quad \lim_{x \to 0} \frac{\ln \cos x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x}}{1} =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{-\operatorname{tg} x}{1} = 0, \Longrightarrow, \text{ dado que } \lim (\ln \cos x^{\frac{1}{x}} = \ln (\lim \cos x^{\frac{1}{x}}), \lim_{x \to \infty} \cos x^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1;$$

$$\ln (e^x - x)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x} \ln (e^x - x); \quad \lim_{x \to \infty} \frac{\ln (e^x - x)}{x} =$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\frac{e^x - 1}{e^x - x}}{1} = \lim_{x \to \infty} \frac{e^x - 1}{e^x - x} = \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{e^x - 1} =$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{e^x} = 1 \Longrightarrow, \text{ dado que } \lim (\ln \cos x^{\frac{1}{x}} = \ln (\lim \cos x^{\frac{1}{x}}), \lim_{x \to \infty} (e^x - x)^{\frac{1}{x}} = e^1 = e.$$

18. — Representación de curvas

Crecimiento y decrecimiento. Concavidad y convexidad. — **Máximos y mínimos :** Definición. Determinación de los máximos y mínimos de una función. Puntos de inflexión. Determinación de los puntos de inflexión. Asíntotas. Simetrías. Construcción de la gráfica de una función. Problema y aplicación de máximos y mínimos. — **Series funcionales :** Definición. Series potenciales. Desarrollo de un polinomio en función de sus derivadas sucesivas. Teorema de Taylor. Serie de Mac-Laurin de una función. Desarrollo en serie de la función e^x. Desarrollo de $y = \operatorname{sen} x$.

Crecimiento y decrecimiento. — Diremos que una función $y = f(x)$ es *creciente* en el punto de abscisa $x = x_0$, si se verifica para todo Δx_0 suficientemente pequeño que $f(x_0 - \Delta x_0) < f(x_0) < f(x_0 + \Delta x_0)$.

Análogamente diremos que $f(x)$ es *decreciente* en $x = x_0$ si se verifica : $f(x_0 - \Delta x_0) > f(x_0) > (x_0 + \Delta x_0)$.

Otra definición de función creciente (o decreciente) la conocíamos ya a través de la derivada de dicha función $f'(x_0) > 0$ (ó $f'(x_0) < 0$) [*fig.* 1 y 2].

Fig. 1 *Fig. 2*

El concepto de crecimiento o decrecimiento de una función es una noción puntual, pero se puede extender a todo un intervalo de la recta real. Puede enunciarse :

Una función y = f(x) *es creciente en* S ⊂ R *si es creciente en cada uno de sus puntos. De igual manera definimos funciones decrecientes en un intervalo* S ⊂ R.

Ejemplo : estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función $y = x^3 - 2x$.

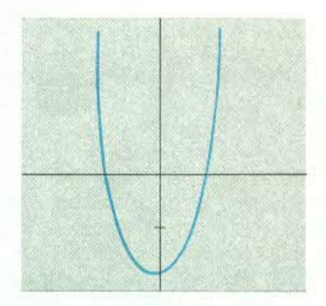


Fig. 3

Su función derivada $y' = 3x^2 - 2$ (*fig.* 3) es negativa en el intervalo $-\sqrt{\frac{2}{3}} < x < +\sqrt{\frac{2}{3}}$. En los demás puntos de la recta real es positivo, luego la función $y = x^3 - 2x$ será creciente en todo punto de la recta real, excepto los comprendidos en el intervalo abierto $\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, +\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$, como puede verse en la *fig.* 3.

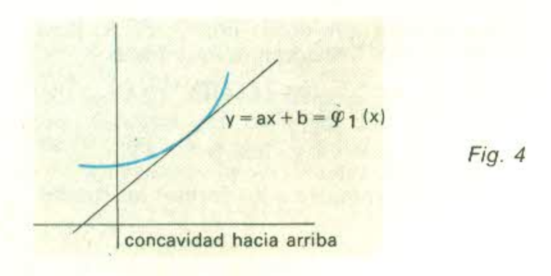


Fig. 4

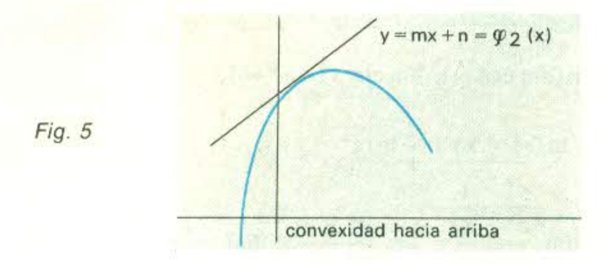


Fig. 5

Concavidad y convexidad. — *Una función* y = f (x), *diremos que es cóncava hacia arriba en el punto* x_0, *cuando la tangente geométrica en el punto* x_0 *deja a la curva por encima de ella* (*fig.* 4).

También diremos que una curva y = f (x) *es convexa hacia arriba en* x_0, *si la tangente geométrica en este punto deja a la curva debajo de ella* (*fig.* 5.)

Como consecuencia de la definición, si las tangentes respectivas son las rectas $y = ax + b$ e $y = mx + n$, las ordenadas $f(x_0 - \Delta x_0)$ y $f(x_0 + \Delta x_0)$ verifican :

$$\begin{aligned}\varphi_1(x_0 - \Delta x_0) &< f(x_0 - \Delta x_0)\\ \varphi_1(x_0 + \Delta x_0) &< f(x_0 + \Delta x_0)\end{aligned} \quad \text{y}$$

$$\begin{aligned}\varphi_2(x_0 - \Delta x_0) &> f(x_0 - \Delta x_0)\\ \varphi_2(x_0 + \Delta x_0) &> f(x_0 + \Delta x_0)\end{aligned}$$

Por otra parte, las tangentes geométricas en los puntos $(x_0 - \Delta x_0)$ y $(x_0 + \Delta x_0)$ son crecientes en la concavidad hacia arriba y decrecientes en la convexidad hacia arriba, como puede verse en las *fig.* 6 y 7.

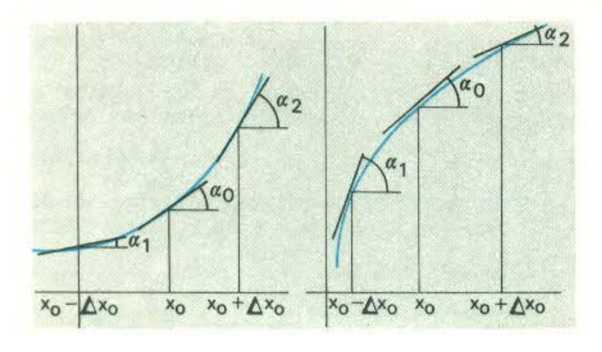


Fig. 6 Fig. 7

Dado que la pendiente a una curva en un punto dado viene dada por su derivada, resulta que en una función cóncava hacia arriba, al ser su primera derivada creciente en x_0, su segunda derivada será positiva; y por el contrario, en una función convexa hacia arriba, al ser su primera derivada decreciente en x_0, su segunda derivada será negativa. Resumiendo, podemos decir que se dispone de dos criterios para conocer la concavidad o convexidad de una función en un punto dado :

1) Criterio de la derivada primera.

Para que la función sea cóncava hacia arriba en x_0, la derivada primera ha de ser creciente en x_0, $\Longleftrightarrow$ $f'(x_0 - \Delta x_0) < f'(x_0) < f'(x_0 + \Delta x_0)$. Si la función es convexa hacia arriba, se verifica que la derivada primera es una función decreciente en x_0, lo cual implica que $f'(x_0 - \Delta x_0) > f'(x_0) > f'(x_0 + \Delta x_0)$.

2) Criterio de la derivada segunda.

Al ser $f'(x_0)$ creciente cuando la función es cóncava hacia arriba, entonces la derivada segunda $f''(x_0)$ será positiva. Análogamente, si la función es convexa hacia arriba, su primera derivada es decreciente y su segunda derivada es negativa $f''(x_0) < 0$.

En la práctica, este segundo criterio es el más fácil de aplicar.

Ejemplo : estudiar la concavidad y convexidad de la curva $y = x^2 - 5$ en el punto de abscisa $x_0 = 3$.

$y = x^2 - 5$; $y' = 2x$; $y'' = 2 > 0$, luego la función es cóncava hacia arriba en todo el campo real.

Máximos y mínimos

Definición. — Dada la función $y = f(x)$, diremos que ésta tiene un *máximo* en el punto (x_0, y_0), cuando se verifica $f(x_0 - \Delta x_0) < f(x_0) > f(x_0 + \Delta x_0)$. **[1]**

Análogamente, diremos que una función $y = f(x)$ tiene un mínimo en (x_0, y_0), si se verifica que
$f(x_0 - \Delta x_0) > f(x_0) < f(x_0 + \Delta x_0)$ [*fig.* 8 y 9]. **[2]**

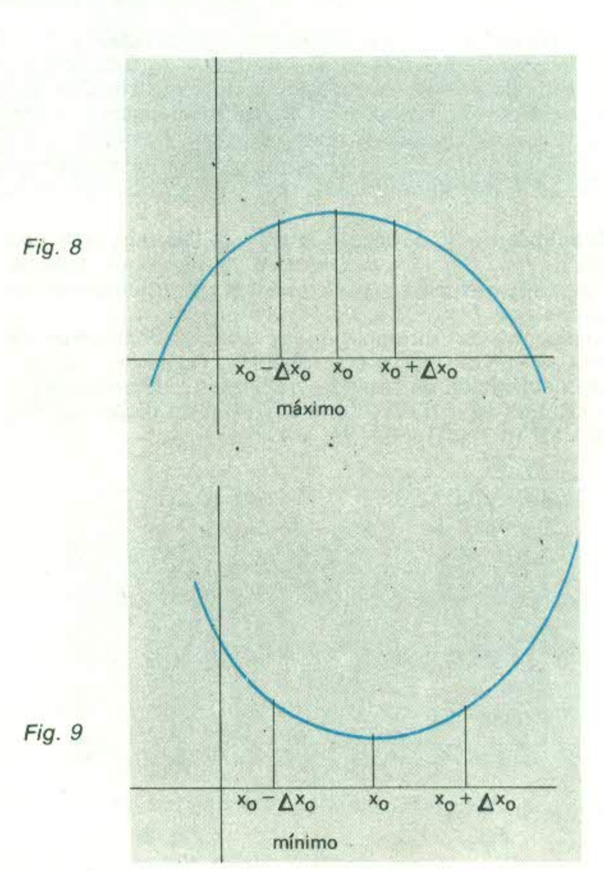


Fig. 8

Fig. 9

Como vimos al estudiar la teoría de derivadas, una condición necesaria, pero no suficiente para la existencia en la función $f(x)$ de un máximo o mínimo, es que $f'(x_0)=0$ cuando existe $f'(x_0)$. En el caso de que no exista, habremos de reconocer el máximo o mínimo, recurriendo a su definición. Por ejemplo, la función $y=|x|$ posee un mínimo en $x_0=0$, y no tiene derivada en él, pues dicho punto posee dos tangentes distintas de ángulos 45^0 y -45^0, respectivamente (*fig.* 10). Además, puede ocurrir que haya puntos que verifiquen que $f'(x_0)=0$, y que no sean máximos ni mínimos; por ejemplo, la función $y=x^3$ tiene su primera derivada nula en $x_0=0$ y no posee máximos ni mínimos en $(0,0)$ [*fig.* 11].

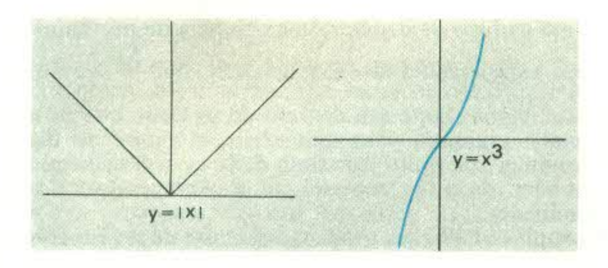


Fig. 10 *Fig. 11*

Una función que posee máximos o mínimos, diremos que posee extremos. Finalmente, se verifica que si una función posee un máximo, a la izquierda de dicho extremo la función es creciente y a la derecha decreciente. Inversamente, en un mínimo se verifica que $f(x)$ es decreciente a la izquierda y creciente a la derecha.

Determinación de los máximos y mínimos de una función. — De las definiciones ya dadas, podemos deducir los siguientes criterios :

1) *Criterio de la función.*

Si la función es derivable, verificará la ecuación $f'(x)=0$, que resuelta nos dará los puntos x_i, donde existan extremos. Para cada raíz hallada x_i, se verá cuáles de ellas verifican las relaciones [1] y [2] del párrafo anterior, que nos dirán qué puntos de los x_i son máximos y cuáles son mínimos.

Dado que en un máximo la función a la izquierda del punto x es creciente y a la derecha decreciente, la primera derivada será positiva a la izquierda y negativa a la derecha.

2) *Criterio de la derivada primera.*

Existiendo la derivada primera, ésta ha de cumplir que $f'(x)=0$, de la que, extrayendo sus raíces, encontraremos los máximos y los mínimos que pueda haber.

Si a la izquierda de x_0, $f'(x_0-\Delta x_0)<0$ y a la derecha $f'(x_0+\Delta x_0)>0$, la función tiene un mínimo en x_0. Si a la izquierda de x_0, $f'(x_0-\Delta x_0)>0$ y a la derecha $f'(x_0+\Delta x_0)<0$, la función tiene un máximo en x.

3) *Criterio de la derivada segunda.*

Como en los casos anteriores, resolvemos la ecuación $f'(x)=0$. Si $f(x)$ tiene un mínimo en

$x_0 \Longrightarrow f'(x_0-\Delta x_0)<0$ y $f'(x_0+\Delta x_0)>0$, lo que quiere decir que la función $f'(x)$ es creciente en x_0, luego la derivada segunda $f''(x_0)>0$.

Si $f(x)$ tiene un máximo en

$$x_0 \Longrightarrow \left\{\begin{matrix} f'(x_0-\Delta x_0)>0 \\ f'(x_0+\Delta x_0)<0 \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \text{la función } f'(x) \text{ en}$$

x_0 es decreciente; luego la derivada segunda $f''(x_0)<0$.

Ejemplo : encontrar los máximos y mínimos de $y=3x^3+2x^2$,

$$y'=9x^2+6x=x(9x+6):$$

$$\text{si } y'=0 \begin{cases} x=0 \\ 9x+6=0;\ x=-\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

$$y''=18x+6 \begin{cases} y''(0)=6 \text{ mínimo} \\ y''\left(-\dfrac{2}{3}\right)=-6 \text{ máximo} \end{cases}$$

$$y(0)=0$$

$$y\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{16}{9}.$$

Luego la función $3x^3+2x$ tiene un máximo en $\left(-\frac{2}{3},\frac{16}{9}\right)$ y un mínimo en $(0,0)$.

Puntos de inflexión. — *Una función* $y=f(x)$ *se dice que tiene un punto de inflexión en* x_0, *si en dicho punto la función pasa de cóncava hacia arriba a convexa hacia arriba o viceversa. Una definición equivalente es que la recta tangente en* x_0 *atraviesa la curva, dejando una parte de ella a un lado de la tangente y la otra parte al otro lado* (*fig.* 12 *y* 13).

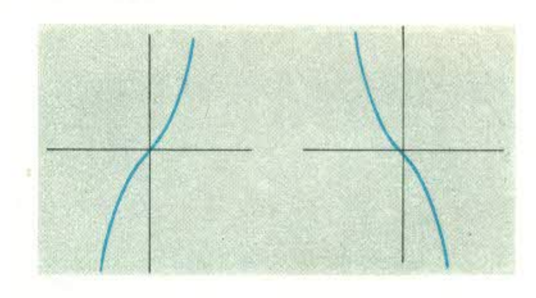


Fig. 12 *Fig. 13*

Dado que en un punto de inflexión x_0 la función pasa de cóncava a convexa o de convexa a cóncava, la segunda derivada pasará de positiva a negativa o de negativa a positiva en x_0, o sea que en dicho punto la derivada segunda se hace nula.

Determinación de los puntos de inflexión. — La función $f''(x)$ hemos visto se anula cuando existen puntos de inflexión, luego dichos puntos vendrán dados por la resolución de la ecuación $f''(x)=0$.

Los dos casos que se presentan de puntos de inflexión vienen representados en las *fig.* 12 y 13, respectivamente. En el primer caso, *fig.* 12, la función pasa de convexa a cóncava, con lo cual la primera derivada pasa de decreciente a creciente y existe un mínimo en x_0. En el segundo caso, *fig.* 13, la función pasa de cóncava a convexa o, lo que es lo mismo, la primera derivada pasa de creciente a decreciente y existe un máximo en x_0. Las relaciones matemáticas que nos expresan los resultados anteriores serán :

$$\text{Para la } fig.\ 12 \quad \left.\begin{matrix} f'(x_0-\Delta x_0)>f'(x_0) \\ f'(x_0+\Delta x_0)>f'(x_0) \end{matrix}\right\} \text{ y}$$

$$\text{para la } fig.\ 13 \quad \left.\begin{matrix} f'(x_0-\Delta x_0)<f'(x_0) \\ f'(x_0+\Delta x_0)<f'(x_0) \end{matrix}\right\}$$

Estas cuatro relaciones son las que nos facilitarán la búsqueda de un punto de inflexión cuando éste exista.

Ejemplos : hallar los puntos de inflexión de las curvas $y = x^2$, e $y = x^3$.

$y = x^2$, $y' = 2x$; $y'' = 2 \neq 0$, $\Longrightarrow$ no tiene puntos de inflexión.

$y = x^3$, $y' = 3x^2$; $y'' = 6x$; $y'' = 0$, $\Longrightarrow$ $x = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} y'(0 - \Delta x_0) = y'(-\Delta x_0) = 3(\Delta x)^2 > 0 \\ y'(0 + \Delta x_0) = y'(\Delta x_0) = 3(\Delta x)^2 > 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{luego}$$

existe un punto de inflexión en (0, 0).

Asíntotas. — *Las asíntotas son las rectas tangentes en los puntos del infinito de la curva* y = f (x). Dada una curva cualquiera, estas rectas tangentes pueden ser paralelas a los ejes o no paralelas.

1) *Asíntotas paralelas al eje de abscisas.*

Estas asíntotas se obtienen hallando $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ y $\lim_{x \to -\infty} f(x)$. En general, ambos límites serán diferentes, habiendo por tanto dos asíntotas paralelas al eje de las x, de ecuación $y = b_1$, $y = b_2$ (*fig.* 14).

2) *Asíntotas paralelas al eje de ordenadas.*

Cuando existen, dichas rectas tienen de ecuación $x = a_1$, $x = a_2$, y las obtendremos de la ecuación de la curva resolviendo las ecuaciones $\lim_{x \to a_1} f(x) = \infty$ y $\lim_{x \to a_2} f(x) = \infty$. En la práctica, lo que se hace es dar a $f(x)$ el valor ∞, y resolver para qué valores de x se obtiene dicha igualdad (*fig.* 15).

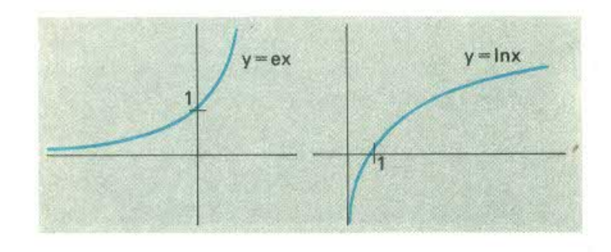


Fig. 14 *Fig. 15*

Ejemplos : hallar las asíntotas de las funciones $y = e^x$ e $y = \ln x$.

$y = e^x$. Para $x = -\infty$, la función vale $\lim_{x \to -\infty} e^{+x} = 0$, luego la recta $y = 0$ es una asíntota de dicha función.

En la función $y = \ln x$, si hacemos $y = -\infty$, $\Longrightarrow$ $x = 0$, luego la función tiene una asíntota paralela al eje de ordenadas, que es el mismo eje OY (*fig.* 14 *y* 15).

3) *Asíntotas oblicuas.*

Al ser una recta cualquiera del plano una asíntota oblicua, la ecuación de dicha recta será $y = ax + b$, y tendremos que hallar a y b para poder conocerlo.

Dado que en el límite las funciones $f(x)$ y $ax + b$ son tangentes, dicho punto será común a ambas funciones, lo que implica : $\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} ax + b \Longrightarrow$ $\lim_{x \to \infty} ax = \lim_{x \to \infty} f(x) - b$; $a \lim_{x \to \infty} x = \lim_{x \to \infty} f(x) - b$, $\Longrightarrow$ $a = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} - \lim_{x \to \infty} \frac{b}{x}$; pero $\lim_{x \to \infty} \frac{b}{x} = 0$, $\Longrightarrow$ $a = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$. Para hallar b, lo hacemos como $\lim_{x \to \infty} [f(x) - ax]$.

Como es fácil de deducir, la existencia de una asíntota oblicua está ligada a la existencia del $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$, y que, además, dicho límite sea distinto de 0. Dado que es una expresión racional, para que exista el límite de dicha expresión, y sea finito y distinto de 0, es necesario que el numerador de $f(x)$ sea de un grado superior al del denominador.

Ejemplos : hallar las asíntotas oblicuas de las funciones $y = \frac{2x^2 - 1}{x + 3}$, $y = x^5 + 1$.

$$y = \frac{2x^2 - 1}{x + 3}, \quad a = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \cdot \frac{2x^2 - 1}{x(x - 3)} = 2$$

$$b = \lim_{x \to \infty} (f(x) - a \cdot x) =$$

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{2x^2 - 1}{(x - 3)} - 2x\right) = \lim \left(\frac{-1 - 6x}{x + 3}\right) = -6.$$

Luego la asíntota oblicua es la recta $y = 2x - 6$:

$$y = x^5 + 1, \quad a = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^5 + 1}{x} = \lim_{x \to \infty} x^4 = \infty;$$

dado que a no es finito, la función $y = x^5 + 1$ no posee asíntotas oblicuas.

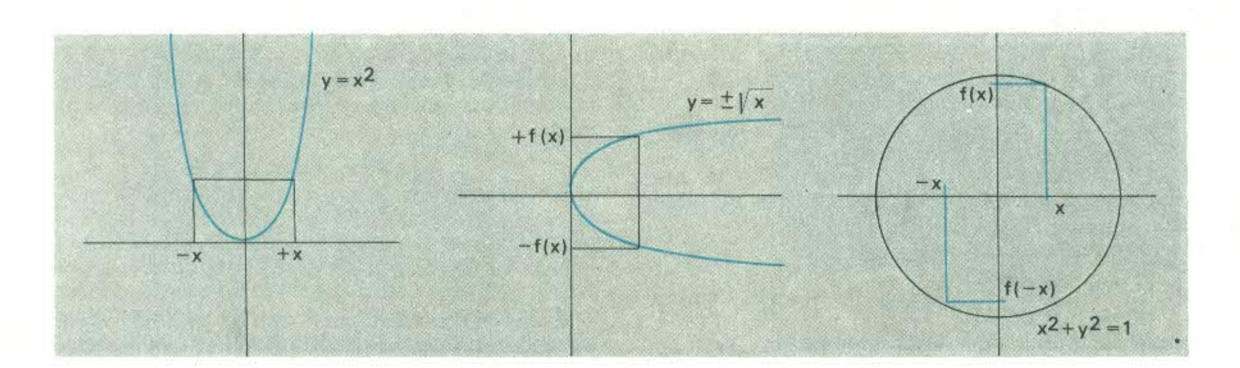
Simetrías. — Es útil, a la hora de construir una curva, conocer si dicha curva es simétrica respecto de alguno de los ejes coordenados (de ambos a la vez) o de algunas rectas que se consideren de particular importancia.

Si $f(x)$ es tal que $f(x) = f(-x)$, la curva es simétrica respecto del eje de ordenadas (*fig.* 16).

Si $f(x)$ es tal que podemos escribirla en forma explícita en la forma $y = \pm \varphi(x)$, la curva es simétrica respecto del eje de abscisas (*fig.* 17).

Si $f(x)$ es tal que $f(x) = -f(-x)$, la curva es simétrica respecto del origen de coordenadas (*fig.* 18).

Fig. 16 *Fig. 17* *Fig. 18*



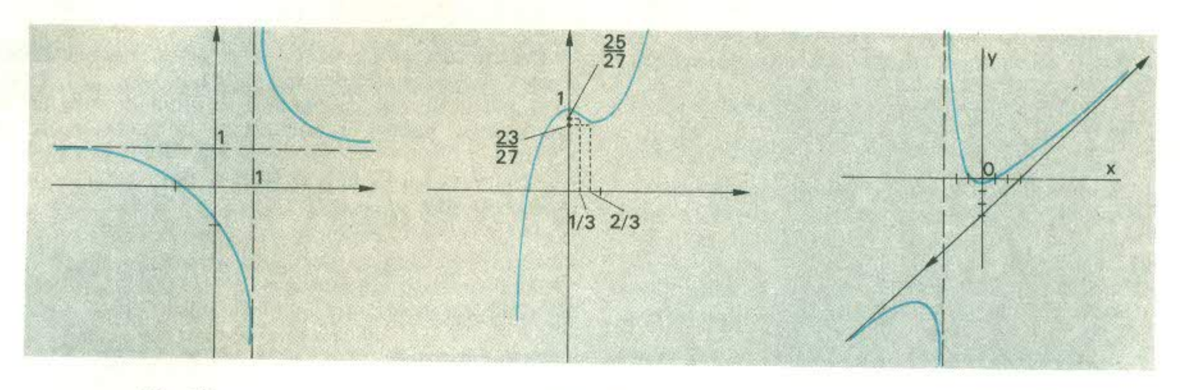


Fig. 19 Fig. 20 Fig. 21

Construcción de la gráfica de una función. — Dado que el problema de construir una curva no es siempre una tarea fácil, daremos unas indicaciones para mejor sistematizar su estudio y construcción. Supongamos que se desea construir la gráfica de $y = f(x)$. Realizaremos :

1) Determinación del dominio de la función.

En este apartado, lo que se exige es analizar las regiones del plano en las que existe curva y en las que no existe.

2) Puntos de corte con los ejes.

Para hallarlos, se hacen $x = 0$ y $f(x) = 0$.

3) Simetrías.
4) Crecimiento y decrecimiento.
5) Concavidad y convexidad.
6) Máximos y mínimos.
7) Puntos de inflexión.
8) Asíntotas.
9) Algunos puntos de la curva especialmente característicos que necesitemos para su construcción.

En la práctica, el estudio particular de cada curva nos indicará si alguno de estos pasos que se han señalado son necesarios o no.

Ejemplos : construir las gráficas de las funciones,
$y = \frac{x+1}{x-1}$, $y = x^3 - x^2 + 1$, $y = \frac{x^2-1}{x+3}$

$y = \frac{x+1}{x-1}$.

Puntos de corte : $\begin{cases} \text{para } x = 0, y = -1 \\ \text{para } y = 0, x = -1 \end{cases}$.

Asíntotas : para $x \longrightarrow \infty$, $\lim_{x \to \infty} \frac{x+1}{x-1} = 1$, y para $y \longrightarrow \infty$, $x = 1$.

Bastando estas dos características para construirla (*fig.* 19)

$y = x^3 - x^2 + 1$.

Puntos de corte con los ejes : para $x = 0$, $y = 1$, y para $y = 0$, la curva tiene una raíz comprendida entre 0 y -1.

Máximos y mínimos : $y' = 3x^2 - 2x$;

$$y' = 0 \implies x(3x - 2) = 0 < \begin{matrix} x = 0 \\ x = 2/3 \end{matrix};$$

$$y'' = 6x - 2 \begin{matrix} y''(0) = -2 & \text{máximo} \\ y''(2/3) = +2 & \text{mínimo} \end{matrix}.$$

Puntos de inflexión : $y'' = 0, 6x - 2 = 0, \implies x = \frac{1}{3}$.

Puntos principales : $f(0) = 1$, $f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{23}{27}$, $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{25}{27}$, como puede verse en la *fig.* 20.

$y = \frac{x^2-1}{x+3}$.

Puntos de corte con los ejes :

$$\text{para } x = 0, \implies y = -\frac{1}{3}.$$
$$\text{para } y = 0, \implies x = \pm 1$$

Asíntotas paralelas : si $y = -\infty$, $\implies x = -3$.

Asíntotas oblicuas : $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2-1}{(x+3)x} = 1 \implies a = 1$.

$b = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2-1}{x+3} - x\right) = -3$, luego existe una asíntota oblicua, la recta $y = x - 3$ (*fig.* 21).

Problemas de aplicación de máximos y mínimos. — Consideramos de importancia la resolución de algunos ejercicios y problemas de máximos y mínimos, no tanto por su dificultad, que no es tal, sino por conocer los métodos para abordar su resolución.

1) Hallar la mínima distancia entre la curva para $x^2 + \sqrt{2}y - 1$, y el punto (1, 1).

La distancia d vendrá dada por la fórmula $d = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}$, donde x e y pertenecen a la curva $x^2 + \sqrt{2}y - 1 = 0$. Las ecuaciones que nos resuelven el problema son :

$$d = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} \quad d = \sqrt{(x-1)^2 + \left(\frac{1-x^2}{\sqrt{2}} - 1\right)^2};$$

$$d = \sqrt{x^2 - 2x + 1 - \frac{(x^2+1)^2}{2}};$$

$$x^2 + \sqrt{2}y - 1 = 0 \qquad y = \frac{1-x^2}{\sqrt{2}}$$

$$d = \sqrt{x^2 - 2x + - \frac{x^4 + 2x^2 + 1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{-x^4 - 4x + 1}$$

$$y = \frac{1-x^2}{\sqrt{2}}.$$

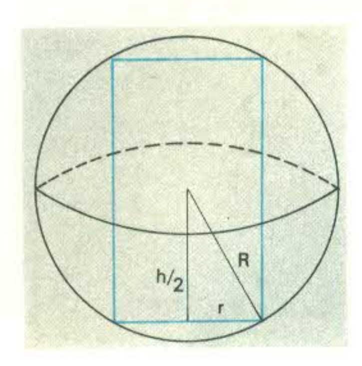
Si d ha de ser mínima, su derivada respecto de x ha de ser 0. $d'_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{-4x^3 - 4}{\sqrt{-x^4 - 4x + 1}} = 0 \implies$

$-4x^3 - 4 = 0, \implies x^3 = -1, x = -1.$

Si $x = -1$, sustituyendo en $y = \frac{1-x}{\sqrt{2}}$, encontramos $y = 0$.

El punto de la curva $x^2 + \sqrt{2}y - 1 = 0$ que hace mínima la distancia es el punto $(-1 0)$, y $d = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$ unidades de longitud.

2) Hallar la altura del cilindro de volumen máximo que se puede inscribir en una esfera de radio R dado :



$$V = \pi r^2 h \qquad V = \pi h\left(R^2 - \frac{h^2}{4}\right) = \frac{\pi h\,(4R^2 - h^2)}{4} = \frac{4\pi h\,R^2 - \pi h^3}{4}$$

$$R^2 = r^2 + \frac{h^2}{4} \qquad r^2 = R^2 - \frac{h^2}{4}$$

$$V'_h = \frac{4\pi R^2 - 3\pi h^2}{4}, \quad \text{si} \quad V'_h = 0, \quad 4\pi R^2 - 3\pi h^2 = 0$$

$$\Longrightarrow \quad 4R^2 = 3h^2, \; h = \sqrt{\frac{4}{3}}R = \frac{2}{\sqrt{3}}R, \; h = \frac{2R}{\sqrt{3}}.$$

3) En una fábrica se producen n máquinas herramienta diarias por un coste total de $(1\,500n^2 + 1\,000)$ ptas. La venta de cada una de ellas se hace por 30 000 ptas. Hallar el número n de piezas óptimo que se han de hacer al día para que la ganancia sea máxima.

Coste total de las máquinas ... $1\,500n^2 + 1\,000$.
Venta total diaria ... $30\,000n$.
Beneficio diario ... $30\,000n - 1\,500n^2 - 1\,000$.
$B = 30\,000n - 1\,500n^2 - 1\,000;$

$$B'_n = 30\,000 - 3\,000n \quad \Longrightarrow \quad n = \frac{30\,000}{3\,000} = 10 \text{ máquinas.}$$

4) Determinado tipo de botes de conserva cilíndricos, de capacidad 1 litro, ha de hacerse con dos sustancias diferentes A y B para las paredes laterales y las bases, respectivamente. El coste por dm² de A es de 1 pta y el de B, 2 ptas. Hallar las dimensiones del bote para que el coste de embalaje sea mínimo.

Área lateral $= 2\pi rh$
Coste área lateral $= 2\pi rh$
Área bases $= 2\cdot\pi r^2$
Coste área bases $= 2\cdot 2\pi r^2 = 4\pi r^2$
Coste total del bote $= C = 2\pi rh + 4\pi r^2$

$$\pi r^2 h = 1 \text{ dm}^3, \quad \Longrightarrow \quad r^2 = \frac{1}{\pi h}, \; r = \frac{1}{\sqrt{\pi h}};$$

$$C = \frac{2\pi h}{\sqrt{\pi h}} + \frac{4\pi}{\pi}\cdot\frac{1}{h} = 2\sqrt{\pi h} + \frac{4}{h}; \; C'_h = \frac{2\sqrt{\pi}}{2\sqrt{h}} - \frac{4}{h^2};$$

$$C'_h = 0 \quad \Longrightarrow \quad 2\sqrt{\pi}\cdot h^2 - 8\sqrt{h} = 0;$$

$$\sqrt{\pi}h^2 = 4\sqrt{h} \quad \Longrightarrow \quad \pi h^4 = 16h; \; \pi h^3 = 16;$$

$$h^3 = \frac{16}{\pi}; \qquad h = \sqrt{\frac{16}{\pi}}, \qquad y\; r = \frac{1}{\sqrt{\pi\sqrt[3]{\frac{16}{\pi}}}} = \frac{1}{\sqrt{\pi\sqrt[6]{\frac{16}{\pi}}}}.$$

Series funcionales

Definición. — Consideremos la sucesión de funciones reales de una variable real $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... $f_n(x)$ ...

A partir de ella, al igual que hicimos para las series numéricas, vamos a considerar la sucesión de sumas $F_1(x)$,
$F_2(x)$, $F_3(x) \ldots F_n(x)$, definidas por
$F_1(x) = f_1(x)$
$F_2(x) = f_1(x) + f_2(x)$
.
.
.
$F_n(x) = f_1(x) + \ldots + f_n(x)$.

A la expresión $\sum_1^\infty f_n(x) = f_1(x) + \ldots + f_n(x)$ se le llama *serie funcional*.

A los términos $F_i(x)$ los llamaremos sumas parciales de la serie, en semejanza con las series numéricas.

Dado que una suma parcial cualquiera $F_i(x)$ no representa la suma de todos los términos de la serie, llamaremos resto de índice i a la expresión $\sum_{i+1}^{\infty} f_n(x)$.

Una serie funcional cualquiera, para un valor determinado de la variable $x = x_0$, se convierte en una serie numérica, pudiendo ésta ser convergente, divergente u oscilante.

Llamaremos *campo de convergencia* de la serie $\sum_i^\infty f_n(x)$ al conjunto de los puntos x_i tales que las sucesiones numéricas $\sum_1^\infty f_n(x_i)$ sean convergentes.

Series potenciales. — Una *serie potencial* es un caso particular de serie funcional : aquellas que son de la forma $\sum_1^\infty a_i x^i = a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$

Como las series numéricas, las series potenciales pueden ser de términos positivos y negativos, siendo por tanto de interés el análisis de la serie de términos absolutos $\sum_1^\infty |a_i x^i|$. Estudiando la convergencia de esta serie, sabremos la convergencia de la serie sin valores absolutos, ya que, *si la serie de valores absolutos es convergente, la serie total de términos positivos y negativos también lo es.*

Al igual que para las series numéricas, existen unos criterios generales para determinar la convergencia de las series potenciales. Dichos criterios los vamos a aplicar a la serie de términos absolutos $\sum_1^\infty a_i x^i$.

I. — *Criterio de D'Alembert.*

Aplicando el criterio de D'Alembert para series numéricas se tiene : $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}\cdot x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = \lim\limits_{n\to\infty} |x| \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |x|\cdot\rho$, donde $\rho = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Si } |x|\cdot\rho < 1, \text{ la serie es convergente}\\ \text{Si } |x|\cdot\rho > 1, \text{ la serie es divergente}\\ \text{Si } |x|\cdot\rho = 1, \text{ nada puede afirmarse}\end{array}\right\} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{Si } |x| < \frac{1}{\rho}, \text{ la serie es convergente}\\ \text{Si } |x| > \frac{1}{\rho}, \text{ la serie es divergente}\\ \text{Si } |x| = \frac{1}{\rho}, \text{ nada puede afirmarse.}\end{array}\right.$$

El campo de convergencia viene, pues, definido por el conjunto de puntos x_i que verifican : $-\frac{1}{\rho} < x < \frac{1}{\rho}$.

Llamaremos radio de convergencia al valor $\frac{1}{\rho}$. O sea, $R = \frac{1}{\rho} = \lim_{n \to \infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$. En los extremos del intervalo (campo) de convergencia no existe criterio, por lo tanto tendremos que hallar la convergencia por otros métodos.

Cuando $\rho = 0$, $\Longrightarrow$ $R = \infty$, y decimos que el campo de convergencia es toda la recta real.

Si $\rho = \infty$, $\Longrightarrow$ $R = 0$, y el único punto de convergencia es el $x = 0$.

Ejemplos : 1.º Hallar el campo de convergencia de $\sum_1^\infty \frac{x^n}{n!}$,

$$R = \lim_{n \to \infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{n!} : \frac{1}{(n+1)!}\right) = \lim_{n \to \infty} \frac{(n+1)!}{n!}$$

$$= \lim_{n \to \infty} (n+1) = \infty,$$

y la serie es convergente en todo el campo real.

2.º Hallar el campo de convergencia de la serie :

$$\frac{1}{2x} + \frac{2}{4x^2} + \ldots + \frac{n}{2^n \cdot x^n} + \ldots$$

$$R = \lim_{n \to \infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{n}{2^n} : \frac{n+1}{2^{n+1}}\right) = \lim \frac{2^{n+1} \cdot n}{2^n (n+1)}$$

$= \lim_{n \to \infty} \frac{2n}{n+1} = 2$. Luego la serie es convergente en el intervalo $-2 < x < +2$.

II. — *Criterio de Cauchy o de la raíz.*

Aplicando dicho criterio a la serie $\sum_1^n a_n x^n$, obtenemos :

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n x^n} = |x| \cdot \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = |x| \cdot \rho.$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } |x| \cdot \rho < 1, \text{ la serie es convergente} \\ \text{Si } |x| \cdot \rho > 1, \text{ la serie es divergente} \\ \text{Si } |x| \cdot \rho = 1, \text{ nada puede afirmarse} \end{array}\right\} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Si } |x| < \frac{1}{\rho}, \text{ la serie es convergente} \\ \text{Si } |x| > \frac{1}{\rho}, \text{ la serie es divergente} \\ \text{Si } |x| = \frac{1}{\rho}, \text{ nada puede afirmarse.} \end{array}\right.$$

Desarrollo de un polinomio en función de sus derivadas sucesivas. — Sea la función polinómica $f(x) = a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$; si extraemos sus derivadas sucesivas $f'(x), f''(x), \ldots f^{n)}(x)$, se obtiene :

$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + na_n x^{n-1}$
$f''(x) = 2a_2 + 3 \cdot 2 \cdot x + \ldots + n(n-1) \cdot a_n \cdot x^{n-2}$
.
.
.
$f^{n)}(x) = \ldots n(n-1)(n-2) \ldots 3 \cdot 2 \cdot a_n$.

Para $x = 0$, se tiene :

$f(0) = a_0$
$f'(0) = a_1$
$f''(0) = 2!\, a_2$
.
.
.
$f^{n)}(0) = n!\, a_n$.

Sustituyendo los valores encontrados para $a_i = \frac{f^{i)}(0)}{i!}$ en la expresión de $f(x)$, se tendrá :

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{n)}(0)}{n!} \cdot x^n.$$

Este desarrollo del polinomio en función de sus derivadas sucesivas se llama alrededor del punto 0.

Si el polinomio $f(x)$ hubiera sido de la forma $f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n$, aplicando el mismo proceso de derivación anterior, y particularizando los valores de las derivadas sucesivas para $x = a$, se obtendría : $f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}x$

$$+ \frac{f'(a)}{1!}x + \ldots + \frac{f^{n)}(a) \cdot x^n}{n!}. \qquad \text{[A]}$$

Desarrollo que se llama alrededor del punto a.

En ambos desarrollos, el número de términos encontrados es finito, pues las derivadas de un polinomio de grado n son nulas a partir de la enésima. Por tanto, los desarrollos obtenidos no son series potenciales.

Teorema de Taylor. — Sea $f(x)$ una función con derivada enésima finita $f^{n)}(x)$, en el intervalo abierto (a, b), y supongamos que $f^{n-1)}(x)$ es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$. Sea $x_0 \in [a, b]$ fijo. Entonces para todo $x \in [a, b]$, $x \neq x_0$ existe un punto $\xi_1 \in (x, x_0)$ tal que se verifica :

$$f(x) = f(x_0) + \sum_1^{n-1} \frac{f^{k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{n)}(\xi_1)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Este teorema, de importancia fundamental en todo el análisis, nos permite encontrar para toda función $f(x)$ que cumple las condiciones del teorema un desarrollo como el [A] del párrafo anterior.

El último término del desarrollo $\frac{f^n(\xi_1)(x - x_0)^n}{n!}$ puede calcularse suponiendo que x_0 es variable, y que x y n permanecen fijas, llamándole a este resto *resto de Lagrange del desarrollo de Taylor*.

El desarrollo de Taylor de una función nos permite hallar, con la aproximación que se desee, el valor de una función $f(x)$ en un punto $x = b$, sin más que conocer el valor de $f(x)$ y de sus derivadas sucesivas en otro punto $x = a$, siempre, claro está, que la función cumpla las condiciones del teorema.

El resto de Lagrange es una función que puede converger hacia 0, cuando $n \longrightarrow \infty$, y entonces el desarrollo de la función es una serie potencial de la que se puede hallar su campo de convergencia.

Serie de Mac-Laurin de una función. — Si la función $f(x)$ es tal que el resto de Lagrange verifica que $\lim_{n \to \infty} \frac{f^{n)}(\zeta_1)(x - x_0)^n}{n!} = 0$, podemos obtener un nuevo desarrollo alrededor del punto 0, desarrollo que denominaremos *serie de Mac-Laurin* de una función o *desarrollo de Mac-Laurin* de una función.

Desarrollo en serie de la función e^x.

$$\left.\begin{array}{ll} f(x) = e^x & f(0) = 1 \\ f'(x) = e^x & f'(0) = 1 \\ \vdots & \vdots \\ f^{n)}(x) = e^x & f^{n)}(\xi_1) = e^{\xi_1} \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}e^{\xi_1}, \quad \xi_1 \in (0, x) \Longrightarrow \xi_1 = \theta x,\ 0 < \theta < 1.$$

Y el desarrollo lo podemos expresar como: $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} e^{\theta x}$. Desarrollando según Mac-Laurin, obtendríamos: $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$, serie que como sabemos, aplicando el criterio de D'Alembert, es convergente. Para el valor de $x = 1$, obtenemos el desarrollo del número e, que ya conocíamos como el límite de la sucesión $\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Desarrollo de $y = \operatorname{sen} x$.

$$\left.\begin{array}{ll} f(x) = \operatorname{sen} x & f(0) = 0 \\ f'(x) = \cos x & f'(0) = 1 \\ f''(x) = -\operatorname{sen} x & f''(0) = 0 \\ f'''(x) = -\cos x & f'''(0) = 1 \\ f^{IV}(x) = \operatorname{sen} x & f^{IV}(0) = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

Su desarrollo de Taylor con resto, será:

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + (-1)^{k+1} \frac{x^{2k+2}}{(2k+2)!} \operatorname{sen} \theta x.$$

Y el desarrollo de Mac-Laurin:

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

Ejemplo: hallar sen 1^0 con error menor que 0'0001, $1^0 = \frac{\pi}{180}$ radianes = 0'0174... radianes.

Desarrollando sen x por Taylor, y tomando tres términos de dicho desarrollo, se tiene:

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4} \operatorname{sen} \theta x.$$

Si despreciamos el último término, habremos cometido un error de $\frac{(0'0174)^4}{24}$ sen θx; sen $\theta x \longrightarrow 0$, cuando $x \longrightarrow 0$.

Pero $\frac{(0'0174)^4}{4} < 10^{-4}$, luego tomando para sen 1^0 la expresión $\operatorname{sen} 1^0 = x - \frac{x^3}{3!} = 0'0174 - \frac{(0'0174)^3}{6} \simeq 0'01745$, habremos resuelto correctamente el problema.

A continuación se escriben algunos de los desarrollos de funciones más frecuentes:

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + (-1)^{n+2} \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{1}{(1+\theta x)^{n+1}}, 0 < \theta < 1$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + (-1)^{k+1} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \operatorname{sen} \theta x, 0 < \theta < 1$$

$$\operatorname{Sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2k+2}}{(2k+2)!} \operatorname{Ch} \theta x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; 0 < \theta < 1$$

$$\operatorname{Ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \operatorname{Sh} \theta x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}; \quad 0 < \theta < 1$$

$$\operatorname{arc\,sen} x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \ldots 2n} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + R(\theta x).$$

19. — Cálculo integral

Introducción e integral definida. — **Integral de Riemann-Stieljes:** Definición. Integral y cambio de variable en una integral de Riemann. Teorema del valor medio para las integrales de Riemann. La integral como función del intervalo. *Función primitiva*. Teorema fundamental del cálculo integral. El área como función primitiva. Función primitiva e integral indefinida. — **Integrales impropias:** Primera especie. Segunda especie. Integrales inmediatas. Integraciones por descomposición. Integración por sustitución. Integración por partes. Integración de funciones racionales. Integración de $\frac{P(x)}{Q(x)}$, grado $P(x) <$ grado $Q(x)$. Integración de fuentes irracionales. Aplicaciones de las integrales indefinidas. Aplicaciones a la Cinemática. — **Aplicaciones de las integrales definidas:** Cálculo de áreas planas. Volúmenes de sólidos de revolución. Longitud de un arco de curva. Área de una superficie de revolución.

Introducción e integral definida. — En el siglo XVIII, Newton y Leibniz llegan simultáneamente a los conceptos de *diferencial* e *integral*. El concepto de diferencial nace como consecuencia del estudio de la tangente a una curva en un punto determinado, y el concepto de integral nace como consecuencia de hallar el área limitada por una curva en los ejes de coordenadas.

Sea $y = f(x)$ una función continua, real y definida en un intervalo (a, b). Se trata de hallar el área limitada por el trazo de $f(x)$, el eje de abscisas, y los puntos de coordenadas $(a\ 0)$ y $(b\ 0)$.

Para ello, hagamos una partición del intervalo (a, b) en subintervalos de abscisas $\{x_0 x_1 x_2 \ldots x_n\}$, de tal manera que los subintervalos $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ sean iguales entre sí, lo cual no resta generalidad al razonamiento (*fig.* 1).

Como una aproximación al área limitada por $y = f(x)$ (rectángulo mixtilíneo AA'BB') podemos considerar la suma de las áreas de los n rectángulos que se forman (*fig.* 2).

Dicha área, que llamaremos S_1, viene expresada por $S_1 = \Delta x f(x_1) + \Delta x \cdot f(x_2) + \ldots + \Delta x \cdot f(x_n) = \Delta x \cdot [f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)]$.

De forma similar, podemos considerar la suma de las áreas de los rectángulos de la *fig.* 3 como una nueva aproximación del área buscada.

$s_1 = \Delta x\,[f(x_0) + \ldots + f(x_{n-1})]$; observemos que $S_1 >$ Área AA'BB' $> s_1$.

Hagamos ahora una nueva partición de (a, b) que tenga más puntos que la anterior, para lo cual podemos intercalar entre cada dos puntos x_{i-1}, x_i un punto

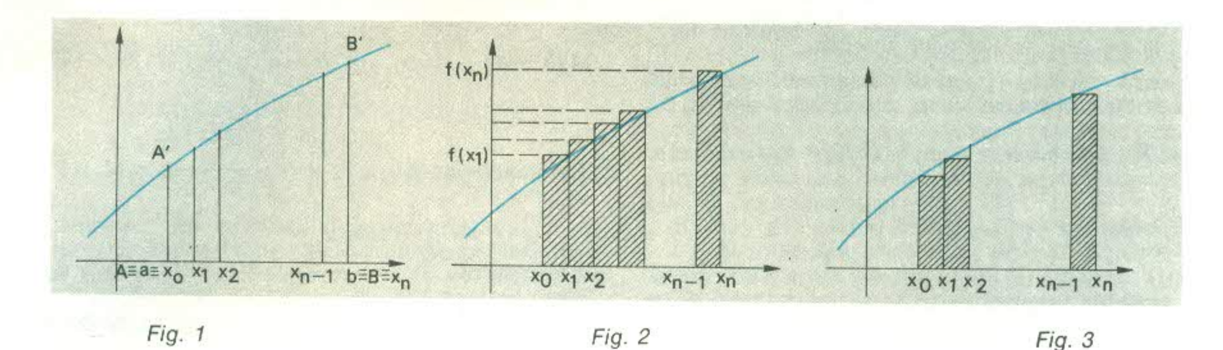


Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3

de abscisa z_i y así obtendremos la partición $\{x_0 z_1 x_1 x_2 z_2 z_3 \ldots x_{i-1} z_i x_i \ldots x_n\}$. El número de los rectángulos que se pueden formar en esta nueva partición es mucho mayor. Analicemos cómo están relacionadas las sumas de las áreas de los nuevos rectángulos S_2 y s_2, y las antiguas S_1 y s_1 (*fig.* 4 y 5).

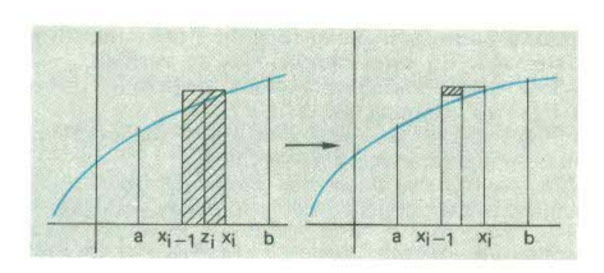


Fig. 4 Fig. 5

El área del rectángulo antiguo es mayor que la suma de las áreas de los dos nuevos en el trazado a rayas que hemos señalado. Como esto ocurre para todos los rectángulos, podemos afirmar que la suma de todos los $2n$ nuevos rectángulos S_2 es menor que S_1. De esta manera se obtiene una sucesión decreciente $S_1 S_2 \ldots S_n \ldots$, cuyos elementos se conservan siempre superiores al área AA'BB', aunque nos podemos aproximar tanto como se quiera a dicha área, sin más que aumentar el número n de elementos de la partición.

Por otra parte, con la nueva partición, la suma de los dos rectángulos interiores que se pueden formar a partir de cada uno de los $[x_{i-1}, f(x_{i-1}), f(x_i), x_i]$ es mayor que el área de dicho rectángulo (*fig.* 6 y 7).

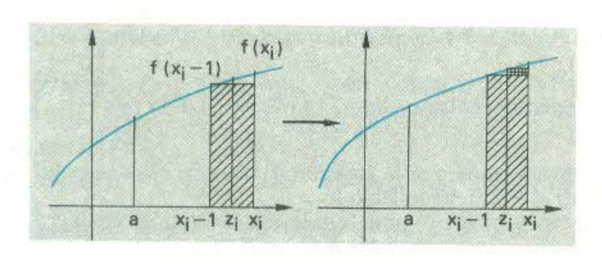


Fig. 6 Fig. 7

La diferencia entre las dos áreas viene dada por el rectángulo pequeño cuadriculado de la *fig.* 7.

Así pues, tenemos $s_2 > s_1$, y la sucesión creciente $s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$ está acotada por el área S del trapecio mixtilíneo. Área a la cual nos podemos aproximar tanto como se quiera, tomando como aproximación términos suficientemente avanzados de la sucesión $\{s_n\}$. *También se puede demostrar que* $\lim_{n\to\infty} S = \lim_{n\to\infty} s = S$. *A este límite se le llama integral de* f(x) *entre los puntos de abscisa* a *y* b, *y la representaremos por* $\int_a^b f(x)\,dx$.

A los números a *y* b *se les denomina extremos de la integral.*

Este concepto de integral es un caso especial de un estudio más general y que responde no sólo a la necesidad de hallar el área de una curva continua, sino que nos permite el estudio de fenómenos físicos, estadísticos, biológicos, en los que aparecen funciones o distribuciones discontinuas.

Integral de Riemann-Stieljes

Definiciones. — I. — Sea $[a, b]$ un intervalo finito de la recta, y sean los puntos $x_0 x_1 \ldots x_n$ que satisfacen las relaciones $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$. Al conjunto $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ *se le llama una partición de* [a, b]. El intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ es el subintervalo i-ésimo de la partición P.

II. — Una partición P_1 del intervalo $[a, b]$ se dice que es más fina que la partición P, y escribimos $P \subset P_1$, si se verifica que todo punto de P es elemento de P_1.

III. — Sea f una función definida en el intervalo $[a, b]$ y $P = \{x_0 \ldots x_n\}$ una partición de $[a, b]$. Sea $\Delta f_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$. Diremos que f es de variación acotada, si existe un número real M tal que se verifica : $\sum_1^n |\Delta f(x_i)| \leq M$, para toda partición de $[a, b]$.

IV. — Sea $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ una partición de $[a, b]$ y ξ_i un punto del subintervalo $[x_{k-1} x_k]$; llamaremos suma de Riemann-Stieljes de $f(x)$ respecto de $\alpha(x)$ a una expresión de la forma $S(P, f, \alpha) = \sum_1^n f(t_i) \Delta \alpha i$.

V. — La función $f(x)$ es integrable Riemann-Stieljes respecto de $\alpha(x)$ en $[a, b]$ si existe un número real I tal que se verifica : $\forall \varepsilon > 0, \ \exists P_\varepsilon / \forall P, \ P \supset P_\varepsilon, \ \forall \xi_i \in [x_{i-1}, x_i] \implies |S(P, f, \alpha) - I| < \varepsilon$. Cuando ese número I existe y es único, se representa por $\int_a^b f(x)\, d\alpha(x)$.

Las funciones f y α se llaman integrando e integrador, respectivamente.

Notemos que haciendo $\alpha = x$, obtenemos la integral de Riemann que ya hemos estudiado.

A continuación vamos a dar una serie de teoremas sin demostrar, que constituyen lo que se denominan propiedades de la integral de Riemann-Stieljes.

TEOREMA. — Si f_1 y f_2 son dos funciones integrables Riemann-Stieljes respecto de α en el intervalo $[a,b]$, $\forall k_1,\ k_2 \in R$ se verifica que $\int_a^b (k_1 f_1 + k_2 f_2)\,d\alpha(x) = k_1 \int_a^b f_1(x)\,d\alpha(x) + k_2 \int_a^b f_2(x)\,d\alpha(x)$.

TEOREMA. — Sea c un punto interior de (a,b). Si dos de las tres integrales siguientes existen, existe también la tercera, y además se verifica que:

$$\int_a^c f(x)\,d\alpha(x) + \int_c^b f(x)\,d\alpha(x) = \int_a^b f(x)\,d\alpha(x).$$

Integral y cambio de variable en una integral de Riemann. — Sea $f(x)$ integrable Riemann-Stieljes en $[a,b]$, tal que se verifica que α'_x existe y es continua en $[a,b]$. En tal caso, la integral de Riemann existe y se verifica que: $\int_a^b f(x)\,d\alpha(x) = \int_a^b f(x)\cdot\alpha'_x(x)\,dx$.

Sea f una función tal que existe la integral de Riemann $\int_a^b f(x)\,dx$. Sea g una función estrictamente monótona, definida en un intervalo $[c,d]$. Supongamos que se verifica que $a = g(c)$, $b = g(d)$. Sean h e y las funciones definidas por $h(x) = f[g(x)]$, $y(x) = g(x)$, $\forall x \in [c,d]$.

En estas condiciones, h es integrable Riemann en $[c,d]$, y se verifica que: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d h\,dy$.

Teorema del valor medio para las integrales de Riemann. — Sea $f(x)$ Riemann en $[a,b]$. Llamenos m y M al mínimo y máximo de $f(x)$, $\forall x \in [a,b]$. Existe entonces $c \in R$, $m \leq c \leq M$ tal que se verifica que: $\int_a^b f(x)\,dx = c\int_a^b dx = c\,(b-a)$.

En particular, si f es continua en $[a,b]$, entonces $\exists\, x_0 \in [a,b] / c = f(x_0)$.

Geométricamente, este teorema significa que existe un punto $x_0 \in [a,b]$ cuya ordenada es c, y que, construido el rectángulo de base $(b-a)$ y altura c, ese rectángulo tiene la misma área que la limitada por la curva y las abscisas a y b (*fig.* 8).

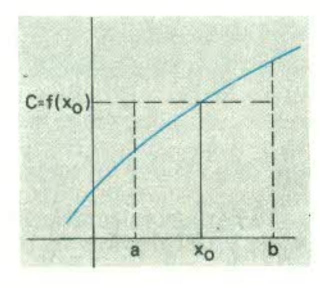


Fig. 8

Demostración: sabemos que $m\,\Delta x_i < f(t_i)\,\Delta x_i < M\,\Delta x_i$; sumando desde 0 a n, obtenemos: $\sum_1^n m\,\Delta x_i < \sum_1^n f(t_i)\Delta x_i < \sum_1^n M\Delta x_i$; ahora bien, estas desigualdades son equivalentes a $m\,(b-a) < \sum_1^n f(t_i)\Delta x_i < M(b-a) \iff m\,(b-a) < \int_a^b f(x)\,dx < M(b-a)$; dividiendo por $(b-a)$: $m < \dfrac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} < M$; si llamamos c al cociente $\dfrac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$, $\implies \int_a^b f(x)\,dx = c\,(b-a)$.

Si la función f es continua, el teorema de Bolzano nos dice que $\exists\, x_0 \in [a,b] / c = f(x_0)$.

La integral como función del intervalo. — *Función primitiva.* — Supongamos que la función f es integrable Riemann en $[a,b]$. Construyamos una nueva función definida $\forall x \in [a,b]$, de la forma $F(x) = \int_a^x f(x)\,dx$.

Por hipótesis, $\int_a^x f(x)\,dx$ existe $\forall x \in [a,b]$, lo que conduce a considerar dicha función $F(x)$ como función del intervalo. En estas condiciones se verifica:

1) $F(x)$ es de variación acotada en $[a,b]$;
2) $F(x)$ es continua $\forall x \in [a,b]$;
3) $F'(x)$ existe $\forall x \in [a,b]$ donde f sea continua, y además se verifica que $F'(x) = f(x)$.

La función $F(x)$ se denomina *función primitiva*.

Demostración: aplicando el teorema del valor medio y teniendo en cuenta que: $\int_a^y f(x)\,dx - \int_a^x f(x)\,dx = \int_x^y f(x)\,dx$, obtenemos $\forall x,\ y \in [a,\ b]$: $F(y) - F(x) = \int_x^y f(x)\,dx = c\,(y-x)$, donde $m \leq c \leq M$, así pues se tiene: $F(y) - F(x) = c\,(y-x)$, dado que esta igualdad se verifica $\forall x,\ y \implies$ F es continua en $[a,b]$.

Por otra parte, haciendo $y = b, x = a$, se obtiene: $F(b) - F(a) = c\,(b-a)$, de donde deducimos que F es de variación acotada. Finalmente, demostremos 3): $\dfrac{F(y)-F(x)}{y-x} = c\dfrac{y-x}{y-x}$; tomando límites se encuentra $\lim_{y\to x} \dfrac{F(y)-F(x)}{y-x} = c$, $\iff \exists$ la derivada de $F(x)$ en todo punto $x \in [a,b]$.

Teorema fundamental del cálculo integral. — Sea $f(x)$ una función integrable en $[a,b]$. Supongamos existe una función $h(x)$, definida en $[a,b]$, y además $h'(x) = f(x)$.

Tenemos entonces $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b h'(x)\,dx = h(b) - h(a)$.

Observemos que la función h, cuando existe, es tal que $h'(x) = F'(x)$, $\forall x \in [a,b]$.

Demostración: para cualquier partición P de $[a,b]$, sabemos que $h(b) - h(a) = h(x_1) - h(x_0) + h(x_2) - h(x_1) + \ldots h(x_n) - h(x_{n-1}) = \sum_1^n h(x_i) - h(x_{i-1})$; aplicando el teorema del valor medio del cálculo diferencial se obtiene: $h(b) - h(a) = \sum_1^n h(x_i) - h(x_{i-1}) = \sum_1^n h'(t_i)\,\Delta x_i = \sum_1^n f(t_i)\,\Delta x_i$, donde $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

Ahora bien, haciendo la partición suficientemente fina, se puede hacer que la suma de Riemann-Stieljes $\sum_1^n f(t_i)\Delta x_i$ verifique $\forall \varepsilon > 0$:

$$\left|\sum_1^n f(t_i)\Delta x_i - \int_a^b f(x)\,dx\right| < \varepsilon \iff \left|h(b) - h(a) - \int_a^b f(x)\,dx\right| < \varepsilon \iff \int_a^b f(x)\,dx = h(b) - h(a).$$

Este teorema, de extraordinaria importancia en el cálculo integral, nos permite calcular integrales definidas sin tener que recurrir directamente a la definición de integral, sino que bastará con conocer una función primitiva del integrando.

Ejemplo : hallar $\int_1^e \frac{1}{x}dx$.

Una función primitiva de $\frac{1}{x}$ es la $\ln x + c$

$$\implies \int_1^e \frac{1}{x}dx = [\ln x]_1^e = l_e - l_1 = 1.$$

El área como función primitiva. — Supongamos que la función f sea continua en (a, b) y consideremos la función ya estudiada $F(x) = \int_a^x f(x)\,dx$, $\forall x \in (a, b)$.

Al ser x un punto variable de (a, b), el área determinada por la función $f(x)$, el eje de abscisas y las abscisas a y x, es función de dicha variable x.

Se pretende, aunque ya se ha hecho al estudiar la función primitiva, encontrar una relación entre $F(x)$ y $f(x)$.

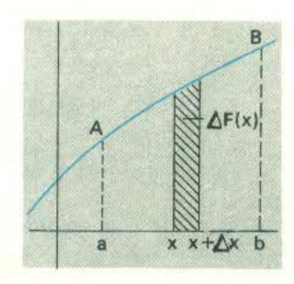


Fig. 9

Para ello, obtengamos $\Delta F(x)$, que resulta incrementando x en Δx. Gráficamente $\Delta F(x)$ es el área rayada de la *fig.* 9. Dicho incremento $F(x) = f(x + \Delta x) - F(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(x)\,dx$. Aplicando el teorema del valor medio para integrales de Riemann, se obtiene : $\Delta F(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(x)\,dx = f(\xi)\Delta x \implies \frac{\Delta F(x)}{\Delta x} = f(\xi)$. Dado que cuando $x \longrightarrow 0$, $\implies \xi \longrightarrow x$, por ser f continua, $F'(x) = f(x)$.

Luego la derivada de $F(x)$ es el área del trapecio mixtilíneo a ABx.

Función primitiva e integral indefinida. — Sea $f(x)$ tal que existe su función primitiva $F(x)$, $F'(x) = f(x)$. A las funciones $F(x) + C$, C constante se les llama ***integral indefinida de*** f(x), y se les representa por $\int f(x)\,dx$. En este sentido podemos considerar la integral indefinida como una operación inversa de la diferenciación, dado que $d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)$.

Integrales impropias

Al estudiar las integrales de Riemann y Riemann-Stieljes, impusimos un conjunto de restricciones, entre las cuales figuraban el que el intervalo de integración $[a, b]$ fuera finito y el que las funciones f y α fueran acotadas en $[a, b]$. En algunos casos, a pesar de no imponer estas restricciones, es posible la existencia de la integral como una extensión natural de aquellas, integral que se denomina impropia.

Existen dos clases de integrales impropias :

Las de *primera especie* están definidas cuando hacemos en la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ que $b \longrightarrow +\infty$.

Las de *segunda especie* aparecen como consecuencia de considerar la función $f(x)$ como no acotada en algunos puntos del intervalo $[a, b]$, aunque dicho intervalo sigue siendo finito.

Primera especie. — Sea la integral $\int_a^b f(x)\,dx$, a la que aplicando el teorema fundamental, resulta $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$. Haciendo que b se aleje indefinidamente, se obtiene : $\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b \to \infty} [F(b) - F(a)]$. Según que este límite sea *finito o infinito*, se dice que la integral es *convergente* o *divergente*. En el caso de que el intervalo de integración sea el $(-\infty, b)$, deducimos de forma semejante : $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{a \to \infty} \int_a^b f(x)\,dx$.

Finalmente, en caso de que el intervalo sea el $(-\infty + \infty)$ fácilmente y en virtud de teoremas anteriores, se deduce $\forall c \in (-\infty + \infty) \implies \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^c f(x)\,dx + \int_c^\infty f(x)\,dx$.

Segunda especie. — Sea la función $f(x)$ con una discontinuidad infinita en un punto $c \in (a, b)$. En este caso definimos la integral mediante el siguiente convenio :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon \to 0}^b f(x)\,dx$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} [F(c - \varepsilon) - F(a)] + \lim_{\varepsilon \to 0} [F(b) - F(c + \varepsilon)].$$

De esta manera, la integral impropia la hemos descompuesto en otras dos.

Ejemplos : 1.° Calcular la integral de primera especie $\int_a^\infty \times dx$, $\int_a^b \times dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b$; $\int_a^\infty \times dx = \lim_{b \to \infty} \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b = \infty$.

2.° Calcular la integral de primera especie : $\int_a^\infty \frac{1}{x^3}dx$, $a > 0$, $\int_a^b x^{-3}\,dx = \left[-\frac{1}{2}x^{-2}\right]_a^b$; $\int_a^\infty \frac{1}{x^3}dx =$

$$\lim_{b \to \infty} \left[-\frac{1}{2}x^{-2}\right]_a^b = \lim_{x \to \infty} \frac{-1}{2x^2} + \frac{1}{2a^2} = \frac{1}{2a^2}.$$

3.° Calcular la integral de segunda especie $\int_0^1 x^{\frac{1}{2}}dx$ $\int_0^1 x^{\frac{1}{2}}dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1 x^{\frac{1}{2}}dx = \lim_{\varepsilon \to 0} [2\sqrt{x}]_\varepsilon^1 =$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} 2[1 - \sqrt{3}] = 2.$$

Integrales inmediatas. — La operación de integrar, no es tan asequible como la de derivar o la de diferenciar. El cálculo integral no llega siempre a resultados de aplicación fácil para la obtención de funciones primitivas. De aquí que la integración considere ciertos casos y funciones que se toman como tipos, los cuales se pasa a enumerar. El caso más sencillo es el de las integrales inmediatas, que resultan de las tablas de derivadas.

$\int dx = x + c$

$\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$

$\int \dfrac{dx}{x} = \ln x + C.$

$\int e^x\,dx = e^x + C$

$\int a^x\,dx = \dfrac{1}{\ln a} a^x + C$

$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C$

$\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$

$\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$

$\int \dfrac{dx}{\operatorname{sen}^2 x} = \operatorname{cotg} x + C$

$\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc\,sen} x + C$

$\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x + C$

$\int u'(x)\,dx = u(x) + C$

$\int [u(x)]^n u'(x)\,dx = \dfrac{1}{n+1}\left[u(x)\right]^{n+1} + C$

$\int \dfrac{u'(x)}{u(x)}\,dx = \ln u(x) + C$

$\int e^{u(x)} \cdot u'(x)\,dx = e^{u(x)} + C.$

$\int a^{u(x)} \cdot u'(x)\,dx = \dfrac{1}{\ln a} a^x + C$

$\int \operatorname{sen} u(x) \cdot u'(x)\,dx = -\cos u(x) + C$

$\int \cos u(x) \cdot u'(x)\,dx = \operatorname{sen} u(x) + C$

$\int \dfrac{u'(x)}{\cos^2 u(x)}\,dx = \operatorname{tg} u(x) + C$

$\int \dfrac{u'(x)}{\operatorname{sen}^2 u(x)}\,dx = -\operatorname{cotg} u(x) + C$

$\int \dfrac{u'(x)}{\sqrt{1-[u(x)]^2}}\,dx = \operatorname{arc\,sen} u(x) + C$

$\int \dfrac{u'(x)}{1+[u(x)]^2}\,dx = \operatorname{arc\,tg} u(x) + C$

Ejemplos : 1.° $\int \dfrac{2x\,dx}{1-4x^2}\,dx = \operatorname{arc\,sen} 2x + c$

2.° $\int e^{2x}\,dx = \dfrac{e^2 x}{2} + c$

3.° $\int (3-4x)^{1/2}\,dx = \dfrac{-1}{4}\int -4(3-4x)^{1/2}\,dx = -\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{2}{3}(3-4x)^{3/2} + c$

4.° $\int \dfrac{2\cos x}{4+\operatorname{sen} x}\,dx = 2\int \dfrac{\cos x\,dx}{4+\operatorname{sen} x} = \ln(4+\operatorname{sen} x)^2 + c$

5.° $\int \dfrac{x+2}{x-1}\,dx = \int\left(1+\dfrac{3}{x-1}\right)dx = \int 1\,dx + \int \dfrac{3}{x-1}\,dx = x + \ln(x-1)^3 + c$

6.° $\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx = -\int \dfrac{-\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx = -\ln \operatorname{tg} x + c$

7.° $\int (7-x^3)^5 x^2\,dx = -\dfrac{1}{3}\int (7-x^3)^5 \cdot (-3x^2)\,dx = -\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{6}(7-x^3)^6 + c$

8.° $\int \dfrac{5x^2+6x^{-1}}{\sqrt{x}}\,dx = \int \dfrac{5x^2}{\sqrt{x}}\,dx + \int \dfrac{6x^{-1}}{\sqrt{x}}\,dx = 5\int x^{3/2}\,dx + 6\int x^{-3/2}\,dx = 5\cdot\dfrac{2}{5}x^{5/2} + 6(-2)x^{-2} = 2x^{5/2} - 12x^{-2} + c.$

Integración por descomposición. — Las propiedades de las integrales nos permiten poder efectuar las siguientes transformaciones : $\int k \cdot f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$; $\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$.

Integración por sustitución. — Consiste en hacer un cambio de variable, transformando la integral en otra, cuya integral indefinida es más fácil de hallar.

Supongamos que se hace el cambio de variable $x = \alpha(t) \Longrightarrow dx = \alpha'(t)\,dt$ y entonces : $\int f(x)\,dx = \int \alpha(t) \cdot \alpha'(t)\,dt$.

Una vez obtenida la función primitiva de $\int \alpha(t) \cdot \alpha'(t)\,dt$, deshacemos el cambio de variables y el problema queda resuelto.

Ejemplo : hallar $\int \dfrac{3x^2}{(x^3+1)^2}\,dx$.

Haciendo el cambio de variable $1 + x^3 = t$, se tiene :

$1 + x^3 = t$

$3x^2 x\,dx = dt$

$x = \sqrt[3]{t-1}$

$dx = \dfrac{dt}{3x^2} = \dfrac{dt}{3\sqrt[3]{(t-1)^2}}$

$\int \dfrac{3x^2}{(x^3+1)^2}\,dx = \int \dfrac{3x^2}{t^2}\cdot\dfrac{dt}{3x^2} = \int \dfrac{dt}{t^2} = -\dfrac{1}{t} \Longrightarrow$, deshaciendo el cambio, $I = \dfrac{-1}{1+x^3} + C.$

Integración por partes. — La diferencial de un producto de dos funciones $u(x) \cdot v(x)$ viene dada, como sabemos, por $d(u \cdot v) = u\,dv + v\,du$. Integrando, se obtiene : $u \cdot v = \int u\,dv + \int v\,du \Longrightarrow \int u\,dv = u \cdot v - \int v\,du$.

Este procedimiento puede aplicarse de forma reiterada, dando muy buenos resultados en su aplicación.

Ejemplo : hallar $\int x \ln x\,dx$.

Haciendo $\left.\begin{array}{l}\ln x = u \\ x\,dx = dv\end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} du = x^{-1}\,dx \\ v = \dfrac{x^2}{2}\end{array}$, y

$x \ln x\,dx = \dfrac{x^2}{2}\ln x - \int \dfrac{x^2}{2x}\dfrac{1}{x}\,dx = \dfrac{x^2}{2}\ln x - \int \dfrac{1}{2}x\,dx = \dfrac{1}{2}x^2\left[\ln x - \dfrac{1}{2}\right] + C.$

Integración de funciones racionales. — Consideremos una función racional en su forma general $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios. Nuestro problema es

encontrar la integral indefinida $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$. El estudio lo dividiremos en dos casos :

1) el grado de $P(x)$ es menor que el de $Q(x)$, y
2) el grado de $P(x)$ es mayor que el de $Q(x)$.

En el segundo caso, hacemos $\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$ donde el grado de $R(x)$ es menor que el grado de $Q(x)$, lo cual implica que $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int R(x)\,dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)} dx$. La integral de $R(x)\,dx$ no es racional, y la $\int \frac{R(x)}{Q(x)} dx$ queda englobada en el apartado 1).

Integración de $\frac{P(x)}{Q(x)}$, grado $P(x) <$ grado $Q(x)$. — Para integrar la función $\frac{P(x)}{Q(x)}$, se descompone en fracciones simples, lo cual es posible sólo cuando el denominador $Q(x)$ pueda descomponerse en factores primos reales.

Estos factores vienen determinados por las raíces de $Q(x)$, que pueden ser reales simples y reales múltiples, imaginarias simples e imaginarias múltiples.

1) $Q(x)$ tiene solamente *raíces reales simples*, o sea, $Q(x) = (x - x_0)(x + x_1) \dots (x - x_n)$. Supongamos, para mayor sencillez, que sólo tiene dos raíces reales simples x_0 y x_1, $Q(x) = (x - x_0)(x - x_1)$. Entonces se puede escribir : $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x - x_0)(x - x_1)} = \frac{A}{x - x_0} + \frac{B}{x - x_1}$, donde A y B son a determinar por el método de los coeficientes indeterminados : $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int \frac{A}{x - x_0} dx + \int \frac{B}{x - x_1} dx =$ $A \ln(x - x_0) + B \ln(x - x_1) + C$.

Ejemplo : hallar $\int \frac{x - 5}{x^3 + 2x^2 - x - 2} dx = I$.

La ecuación $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$ posee las raíces 1, $-1, -2$, $\Longrightarrow$ $I = \int \frac{x - 5}{(x - 1)(x + 1)(x + 2)} dx$

$$\frac{x - 5}{(x - 1)(x + 1)(x + 2)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1} + \frac{C}{x + 2};$$

efectuando operaciones :

$$(x - 5) = A(x + 1)(x + 2) + B(x - 1)(x + 2) + C(x - 1)(x + 1).$$

Haciendo sucesivamente $x = 1$, $x = -1$, $x = -2$, se obtiene :

$$\left.\begin{array}{ll} -4 = 6A & A = -\frac{2}{3} \\ -7 = 3C & C - \frac{7}{3} \\ -6 = -2B & B = 3 \end{array}\right\}$$

$$\Longrightarrow \frac{x - 5}{(x - 1)(x + 1)(x + 2)} = \frac{-2/3}{x - 1} + \frac{3}{x + 1} + \frac{-7/3}{x + 2}, \text{ e } I = \int \frac{-2/3}{x - 1} dx + \int \frac{3}{x + 1} dx + \int \frac{-7/3}{x + 2} dx =$$

$$-\frac{2}{3} \ln(x - 1) + 3 \ln(x + 1) \frac{-7}{3} \ln(x + 2) + C = \ln \frac{(x + 1)^3}{(x - 1)^{+2/3}(x + 2)^{+7/3}} + C.$$

2) $Q(x)$ posee *raíces reales múltiples*.

Supongamos que $Q(x)$ posee la raíz $x = x_0$, n-múltiple, esa raíz da lugar a las siguientes fracciones simples : $\frac{A_1}{x - x_0} + \frac{A_2}{(x - x_0)^2} + \dots + \frac{A_n}{(x - x_0)^n}$, donde los coeficientes A_i se hallan, como anteriormente, por el método de los coeficientes indeterminados.

Ejemplo : hallar $I = \int \frac{dx}{x(x - 1)(x + 1)^2}$.

Hacemos $\frac{1}{x(x - 1)(x + 1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 1} + \frac{C}{x + 1} + \frac{D}{(x + 1)^2}$, $\Longrightarrow$ $(x + 1) = A(x + 1)(x - 1)(x + 1)^2 +$ $Bx(x + 1)^3 + Cx(x - 1)(x + 1)^2 + D(x + 1)(x - 1)x$, haciendo $x = 0$, resulta $1 = -A$, y para $x = 1$ $\Longrightarrow$ $B = 1/4$. Igualando términos del mismo grado en ambos miembros : $Ax^4 + Bx^4 + Cx^4 = 0$, $\Longrightarrow$ $C = \frac{3}{4}$;

$2Ax^3 + 3Bx^3 + Cx^3 + Dx^3 = 0$, $\Longrightarrow$ $D = \frac{1}{2}$, y finalmente obtenemos : $I = \int \frac{-dx}{x} + \frac{3}{4} \int \frac{dx}{x + 1} + \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x - 1} +$

$$\frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x + 1)^2} dx = -\ln x + \frac{1}{4} \ln(x - 1) + \frac{3}{4} \ln(x + 1) + \frac{1}{2} \ln(x + 1)^{-1} + C = \ln \frac{(x - 1)^{\frac{1}{4}}(x + 1)^{\frac{3}{4}}}{x} + \frac{1}{2} \frac{1}{x + 1} + C.$$

3) $Q(x)$ tiene una *raíz imaginaria simple $a + bi$*, y su *conjugada $a - bi$*. Entonces, $Q(x)$ puede escribirse de la forma

$$Q(x) = q(x)(x - a - bi)(x - a + bi) = q(x)[(x - a)^2 + b^2]$$

y la fracción $\frac{P(x)}{Q(x)}$ se descompondrá $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{M}{q(x)} + \frac{Ax + B}{(x - a)^2 + b^2}$.

Ahora bien $q(x)$ no tiene raíces imaginarias, luego las tendrá reales simples o múltiples, las cuales ya las hemos estudiado. Quedándonos entonces hallar la integral $\int \frac{Ax + B}{(x - a)^2 + b^2} dx$. Para ello operemos de la siguiente manera.

La primera de estas dos últimas integrales es inmediata : $\int \frac{A(x - a)}{(x - a)^2 + b^2} dx = \frac{A}{2} \ln[(x - a)^2 + b^2]$.

En la segunda integral, hagamos el cambio de variable $x - a = b \cdot t$, $\Longrightarrow$ $dx = b \cdot dt$, con lo que

$$\int \frac{Aa + B}{(x - a)^2 + b^2} dx = (Aa + B) \int \frac{b\,dt}{b^2(t^2 = 1)} = \frac{Aa + B}{b} \operatorname{arc\,tg} t + C = \frac{Aa + B}{b} \operatorname{arc\,tg} \frac{x - a}{b} + C.$$

Encontrando finalmente :

$$\int \frac{Ax + B}{(x - a)^2 + b^2} dx = \frac{A}{2} \ln[(x - a)^2 + b^2] + \frac{Aa + B}{b} \operatorname{arc\,tg} \frac{x - a}{b} + C.$$

Ejemplo : hallar $I = \int \frac{dx}{x(x^2 - 2x + 4)}$ $x^2 - 2x + 4 = (x - 1 - \sqrt{3}i)(x - 1 + \sqrt{3}i)$. Descomponiendo $\frac{1}{x(x^2 - 2x + 4)}$ en fracciones, se tiene : $\frac{1}{x(x^2 - 2x + 4)} = \frac{Ax + B}{(x-1)^2 + 3} + \frac{C}{x}$; $1 = Ax^2 + Bx + C(x^2 - 2x + 4)$. Para $x = 0$, $C = \frac{1}{4}$ e, igualando términos del mismo grado, encontramos : $A = -\frac{1}{4}$, $B = \frac{1}{2}$, y la integral la convertimos en :

$$I = \int \frac{-\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}}{(x-1)^2 + 3} dx + \int \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{1}{4} \ln x + \int \frac{-\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}}{(x-1)^2 + 3} dx,$$

siendo la integral del segundo miembro

$$\int \frac{-\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}}{(x-1)^2 + 3} dx = -\frac{1}{8} \ln [(x-1)^2 + 3^2] + \frac{\frac{1}{4}}{3} \operatorname{arc\,tg} \frac{x-1}{3} + C \implies$$

$$I = \frac{1}{4} \ln x - \frac{1}{8} \ln [(x-1)^2 + 3^2] + \frac{1}{12} \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{x-1}{3} \right) + C.$$

4) $Q(x)$ posee *raíces imaginarias múltiples*. Si $Q(x)$ tiene las raíces complejas conjugadas $a \pm bi$ que son múltiples, entonces la expresión $(x - a - bi) \cdot (x - a + bi) = (x - a)^2 + b^2$ aparece como factor que se repite cierto número de veces. Si este factor de segundo grado se repite n veces, se escribirán las siguientes fracciones parciales :

$$\frac{A_1 x + B_1}{(x-a)^2 + b^2} + \frac{A_2 x + B_2}{[(x-a)^2 + b^2]^2} + \dots + \frac{A_n x + B_n}{[(x-a)^2 + b^2]^n}$$

Al integrar estas fracciones, aparecen integrales de la forma $\int \frac{A_n x + B_n}{[(x-a)^2 + b^2]^n} dx$. Para obtener esta integral, operamos igual que en el caso anterior :

$$\int \frac{A_n x + B_n}{[(x-a)^2 + b^2]^n} dx = \int \frac{A_n x + B_n - A_n a + A_n a}{[(x-a)^2 + b^2]^n} dx =$$

$$\int \frac{A_n (x-a)}{[(x-a)^2 + b^2]^n} dx + \int \frac{A_n \cdot a + B_n}{[(x-a)^2 + b^2]^n} dx = I_1 + I_2.$$

I_1 es inmediata, $I_1 = \frac{A_n}{2} \int \frac{2(x-a)}{[(x-a)^2 + b^2]^n} dx =$

$$\frac{A_n}{2(1-n)[(x-a)^2 + b^2]^{n-1}} + C.$$

Para obtener I_2, lo hacemos mediante el cambio $\frac{x-a}{b} = t$, $\implies$ $dx = dt$, $I_2 = \int \frac{A_n a + B_n}{[(x-a)^2 + b^2]^n} - dx =$

$$(A_n a + B_n) \int \frac{b\,dt}{[(t^2 + 1) + b^2]^n} = \int \frac{A_n a + B_n}{b^{2n-1}} \int \frac{dt}{(t^2 + 1)^n}.$$

Integral esta última que podemos resolver por partes para $n \geqslant 2$, o por cambio de variables.

Ejemplo : hallar $I = \int \frac{2x^2 + 3}{(x^2 + 1)^2} dx$.

Haciendo $\frac{2x^2 + 3}{(x^2 + 1)^2} = \frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{Mx + N}{(x^2 + 1)^2}$, y racionalizando : $2x^2 + 3 = (x^2 + 1)(Ax + B) + Mx + N$; $2x^2 + 3 = Ax^3 + Bx^2 + x(A + M) + (B + N)$; igualando ahora los términos del mismo grado, encontramos $A = 0$, $B = 2$, $M = 0$, $N = 1$, y la integral I la descompondremos en : $I = \int \frac{2\,dx}{x^2 + 1} + \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^2}$. Para resolver la integral $\int \frac{dx}{(1 + x^2)^2}$, se hace el cambio $x = \operatorname{tg} t$, $\implies$ $dx = (1 + \operatorname{tg}^2 t)\,dt$; $t = \operatorname{arc\,tg} x$, y $\int \frac{dx}{(1 + x^2)^2} = \int \cos^2 t\,dt = \frac{1}{2} t + \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2t + C$. Sustituyendo los valores encontrados, y deshaciendo el cambio de variable, se encuentra definitivamente :

$$\int \frac{2x^2 + 3}{(x^2 + 1)^2} dx = 2 \operatorname{arc\,tg} x + \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} x + \frac{1}{2} \frac{x}{x^2 + 1} + C.$$

5) $Q(x)$ puede tener *raíces diversas*. Puede darse el caso de que $Q(x)$ tenga al mismo tiempo raíces reales e imaginarias, simples y múltiples. Si esto ocurre, se opera de tal modo que a cada raíz real simple le corresponda un término según se especificó en el caso 1); a cada raíz real múltiple le correspondan los términos del caso 2), y así sucesivamente. En el apartado 3) el polinomio $Q(x)$ tenía un factor con raíz real y otro con dos raíces complejas conjugadas.

Ejemplo : hallar $I = \int \frac{x + 5}{x(x-5)^2 (x^2 + 2)^2 (x^2 + 1)} dx$.

La descomposición que hacemos del polinomio $Q(x)$ es

$$\frac{x + 5}{x(x-5)^2 (x^2 + 2)^2 (x^2 + 1)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{(x-5)^2} + \frac{A_3}{x - 5} + \frac{A_4 x + A_5}{(x-0)^2 + 1^2} + \frac{A_6 x + A_7}{(x-0)^2 + (\sqrt{2})^2} + \frac{A_8 x + A_9}{[(x-0)^2 + (\sqrt{2})^2]^2}.$$

Una vez hecha la descomposición, es necesario hallar todos los coeficientes $A_1, \dots A_9$, e integrar una a una las seis integrales que han aparecido.

Integración de funciones irracionales. — Supondremos siempre que estas funciones irracionales vienen expresadas en forma racional, o sea, en forma de cociente $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, en cuyo caso la operación que habrá que efectuar previa a la integración es la racionalización del denominador.

Se consideran los casos siguientes :

1) *Integrales de la forma* $\int R(x^{\frac{m}{n}}, x^{\frac{p}{q}}, x^{\frac{r}{s}}, \dots)\,dx$ *donde* R, *como hemos dicho, expresa una función racional, y* m, n, p, q, r, s, ... *son números enteros.*

La integración se efectúa mediante el cambio de variable $x = t^\alpha$, donde $\alpha = m.c.m. (n, q, s, \dots)$ o sea el mínimo común múltiplo de las fracciones $\frac{m}{n}$, $\frac{p}{q}$, $\frac{r}{s}$ $x = t^\alpha$, $dx = \alpha \cdot t^{\alpha - 1}\,dt$, y la integral quedará en una expresión de la forma $\int R(t^{m'}, t^{n'}, \dots t^{s}(x t^{\alpha - 1} dt$, donde $m', n', \dots, s' \in Z$.

Ejemplo : hallar $\int \frac{\sqrt{x} - 5}{\sqrt[3]{x^2} - 3} dx = I.$

Esta integral la podemos escribir como $\int \frac{x^{\frac{1}{2}}-5}{x^{\frac{2}{3}}-3}dx$, haciendo $x=t^6$, $6=m.c.m.(2,3)$; $dx=6t^5$.

$I=\int \frac{t^3-5}{t^n-3}6t^5\,dt=6\int \frac{t^8-5t^5}{t^4-3}$; ahora bien, la integral $\int \frac{t^8-5t^5}{t^4-3}dt$ es del tipo $\frac{P(x)}{Q(x)}$, donde grado $P(x) >$ grado $Q(x)$, que ya hemos estudiado. Queda, pues, aplicar lo ya conocido para este tipo de funciones.

2) *Integrales de la forma* $\int R[(ax+b)^{\frac{m}{n}},\dots (ax+b)^{\frac{p}{q}}]dx$ *en donde* R, *como antes, es el símbolo de una expresión racional y* m, n, p, q *son números enteros.*

Haciendo el cambio $ax+b=t$, $dx=\frac{dt}{a}$, y la integral se convierte en la $\frac{1}{a}\int R(t^{\frac{m}{n}},\dots)\,dt$, que es del tipo estudiado en el caso 1).

Ejemplo : hallar $\int \frac{(3x+1)^{\frac{1}{4}}+5}{(3x+1)^2+1}dx=I$.

Haciendo el cambio $3x+1=t \implies dx=\frac{dt}{3}$, se obtiene :

$$I=\int \frac{t^{\frac{1}{4}}+5}{t^2+1}\frac{dt}{3}=\frac{1}{3}\int \frac{t^{\frac{1}{4}}+5}{t^2+1}dt.$$

Esta integral, en virtud del caso 1) de este mismo apartado, se resuelve haciendo $t=z^4$, $dt=4z^3dz$, y entonces $I=\frac{1}{3}\int \frac{z+5}{z^8+1}4z^3\,dz=\frac{4}{3}\int \frac{z^4+5z^3}{z^8+1}dz$, siendo esta última integral del tipo racional ya estudiado, donde grado $P(x) <$ grado $Q(x)$.

3) *Integrales del tipo* $\int R[x,(a+b)^{\frac{1}{n}}]dx$, *donde* R *expresa, como siempre, una función racional.*

Esta integral se resuelve mediante el cambio $ax+b=t^n$, $\implies dx=\frac{n}{a}\cdot t^{n-1}dt$, convirtiéndose en la $\frac{n}{a}\int R\left(\frac{t^n-b}{a},t\right)t^{n-1}dt$, que es racional.

Ejemplo : hallar $I=\int \frac{x^2+\sqrt{1+2x}}{5+x+\sqrt{1+2x}}dx$.

Haciendo el cambio $1+2x=t^2 \implies dx=\frac{2t\,dt}{2}=t\,dt$; $x=\frac{t^2-1}{2}$, y la integral I, se convierte en la :

$$\int \frac{\left(\frac{t^2-1}{2}\right)^2+t}{5+\frac{t^2-1}{2}+t}\cdot t\,dt=\frac{1}{2}\int \frac{4t+(t^2-1)^2}{9+t^2-2t}t\,dt$$

$=\frac{1}{2}\int \frac{t^5-2t^3+4t^2+t}{t^2-2t+9}dt$, que es racional con raíces imaginarias simples.

4) *Integrales del tipo* $\int R\left[x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right]dx$.

Haciendo el cambio $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}=t \implies \frac{ax+b}{cx+d}=t^n$, la integral se convierte en una racional.

Ejemplo : hallar $\int \frac{x+\sqrt{\frac{x-1}{x+5}}dx}{x-3}dx=I$.

Haciendo el cambio $\frac{x-1}{x+5}=t^2$, obtenemos $x=\frac{5t^2+1}{1-t^2}$, $dx=\frac{12t}{(1-t^2)^2}dt$, que sustituyendo en la integral queda :

$$I=\int \frac{\frac{5t^2+1}{1-t^2}+t}{\frac{5t^2+1}{1-t^2}-3}\cdot\frac{12t}{(1-t^2)^2}dt$$

$=12\int \frac{-t^4+5t^3+t^2+t}{(8t^2-2)(1-t^2)^2}dt$, integral esta última racional, con grado $P(x) <$ grado $Q(x)$.

Aplicaciones de las integrales indefinidas. — Conociendo la ecuación de una curva $y=f(x)$, la pendiente m de la tangente en uno de sus puntos $(x_0 y_0)$ viene dada, como sabemos, por $m=f'(x_0)$. Recíprocamente, si la pendiente de la tangente en un punto $(x_0 y_0)$ es $m=f'(x_0)$, podemos hallar, integrando dy : $dy=f'(x)dx$. $\int f'(x)dx=f(x)+C$, que es una familia de curvas. Para determinar una de ellas, en particular, es necesario asignar o determinar el valor de la constante de integración C.

Ejemplo : hallar la ecuación de la familia de curvas cuya pendiente en un punto dado sea igual y de signo contrario al triple de la abscisa en dicho punto. En particular, determinar la curva de la familia que pasa por (0, 0).

Sabemos que $\frac{dy}{dx}=-3x$; $dy=-3x\,dx$;

$$y'=\int -3x\,dx=-\frac{3}{2}x^2+c.$$

La familia de curvas está formada por las parábolas de ecuación $y=\frac{-3}{2}x^2+C$. La parábola que pasa por $(0,0)$ será la $0=\frac{-3}{2}\cdot 0+C$; $C=0$ $y=\frac{-3}{2}x^2$.

Ejemplo : hallar la ecuación de la curva que pasa por (1, 1) y es tangente a $x+y=1$ en dicho punto, sabiendo que en cualquier punto de ella se verifica que $y''=x$.

Sabemos que $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}(y')=x^2 \implies \int \frac{d}{dx}(y')dx=\int x^2dx$; $y'=\frac{x^3}{3}+C_1$.

En el punto (1, 1), la pendiente y' de la curva es igual a la pendiente de la recta. Por tanto $-1=\frac{1}{3}+C_1 \implies C_1=-\frac{4}{3}$ con lo cual : $y'=\frac{dy}{dx}=\frac{x^3}{3}-\frac{4}{3}$; $y=\int dy=\int\left(\frac{x^3}{3}-\frac{4}{3}\right)dx=\frac{x^4}{12}-\frac{4}{3}x+C_2$. En el punto (1, 1), se verificará : $1=\frac{1}{12}-\frac{4}{3}+C_2$; $C_2=\frac{27}{12}$, y finalmente la ecuación buscada es : $y=\frac{x^4}{12}-\frac{4}{3}x+\frac{27}{12}$.

Aplicaciones a la Cinemática. — Un móvil rueda por una superficie con velocidad inicial $v_0=10$ m/s; posteriormente, debido al rozamiento, el móvil va deteniéndose a razón de 5 m/s². Hallar el tiempo y el espacio que recorrerá antes de detenerse.

Sabemos que $\frac{dv}{dt} = -5$; $v = \int -5\,dt = -5t + C$,

dado que $v_0 = 10\,m/seg \implies 10 = -5t + C$, para $t_0 \implies C = 10$.

Cuando el móvil se para, $v = 0 \implies v = -5t + 10 \implies t = 2$ segundos.

Por otra parte $\frac{de}{dt} = -5t + 10$; $e = \int(-5t + 10)\,dt$;

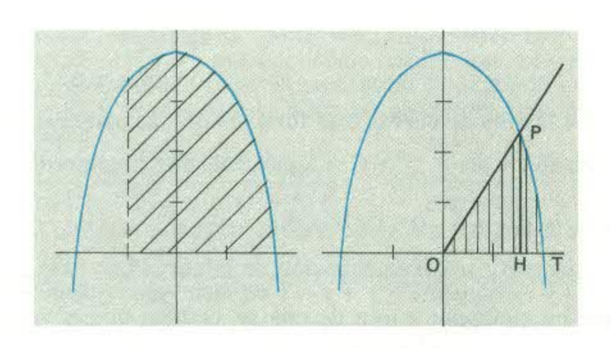
$e = \frac{-5}{2}t^2 + 10t + C_1$.

En el tiempo $t_0 = 0$, $e = 0 \implies 0 = C_1 \implies e = \frac{-5}{2}t^2 + 10t$; sustituyendo $t = 2$ segundos, nos queda $e = -10 + 20 = 10$ metros.

Aplicaciones de las integrales definidas

Cálculo de áreas planas. — Al definir la integral de Cauchy, o integral definida con la función integrando continua, vimos que $\int_a^b f(x)\,dx$ nos daba el área del trapecio mixtilíneo determinado por el eje de abscisas, la curva $f(x)$ y las perpendiculares desde a hasta $f(a)$, y desde b hasta $f(b)$. Así, pues, dada $f(x)$, sólo es necesario hallar $\int_a^b f(x)\,dx$ para solucionar el problema.

Ejemplo : hallar el área limitada por la curva $y = -x^2 + 4$ el eje de abscisas y los puntos de abscisas -1 y 2.



El área buscada es la rayada de la figura.

$S = \int_{-1}^{2}(-x^2 + 4)\,dx = \left[\frac{-x^3}{3} + 4x\right]_{-1}^{2} \frac{27}{3}$ unidades de área.

Ejemplo : hallar el área limitada por la curva $y = -x^2 + 4$, la recta $y = x$, y el eje de abscisas.

El punto de corte de las dos curvas es $x = -x^2 + 4$; $x^2 + x - 4 = 0$; $x = 1'55$.

El punto buscado P tiene de abscisa 1'55. Y el área buscada es la rayada de la figura, que podemos dividir en dos áreas $S = S_1 + S_2$.

S_1 = área del triángulo OPH.

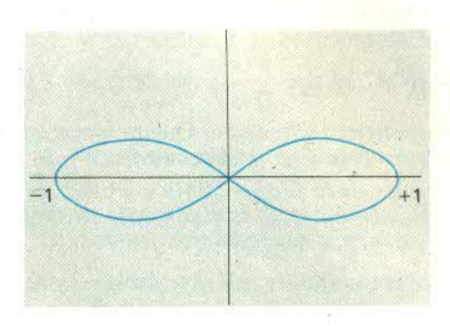
S_2 = área del triángulo curvilíneo PHT.

$S_1 = \int_0^{1'55} x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{1'55} = 2'405$ u.a.

$S_2 = \int_{1'55}^{2}(-x^2 + 4)\,dx = \left[\frac{-x^3}{3} + 4x\right]_{1'55}^{2} = 0'37$ u.a.

$S = S_1 + S_2 = 2'7725$.

Ejemplo : hallar el área limitada por la curva $y^2 = x^2 - x^4$. La curva es cerrada y simétrica respecto a los ejes coordenados, luego el área total será 4 veces la correspondiente al primer cuadrante.



Los límites de integración serán 0 y 1, pues $0 = x^2 - x^4$; $x^2(x^2 - 1) = 0$; $x = \pm 1$; $y = \pm\sqrt{x^2(1 - x^2)} = \pm x\sqrt{1 - x^2}$. Tendremos entonces

$S = 4\int_0^1 x\sqrt{1 - x^2}\,dx = \frac{4}{3}$ u. a.

Ejemplo : hallar el área limitada por el arco de cicloide $x = 1 - \operatorname{sen}\theta$; $y = 1 - \cos\theta$.

Un arco de cicloide se describe cuando θ varía de 0 a 2π

$$S = \int_0^{2\pi} y\,dx = \int_0^{2\pi}(1 - \cos\theta)(-\cos\theta)\,d\theta$$

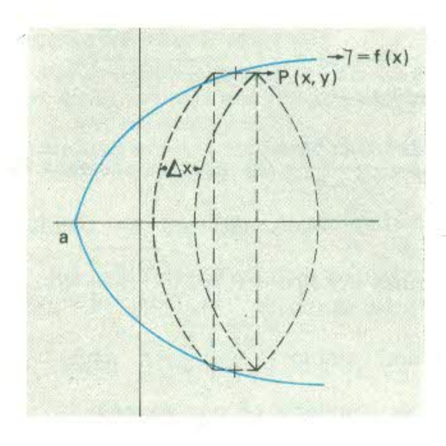
$$= \int_0^{2\pi}(-\cos\theta + \cos^2\theta)\,d\theta = \int_0^{2\pi}\cos\theta\,d\theta + \int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta,$$

que son resolubles inmediatamente.

Volúmenes de sólidos de revolución. — Un sólido de revolución es un volumen generado por un área plana al girar alrededor de una recta que se llama eje de revolución. Para hallar el volumen de dicho sólido se puede seguir el siguiente camino.

Integración por discos. — Subdividiremos el método en dos casos : *a*) el eje de rotación forma parte del contorno del área que gira, y *b*) el eje de rotación no forma parte del contorno del área que gira.

a) Sea la curva $y = f(x)$, que gira alrededor del eje x. Se trata de hallar el volumen del sólido de revolución limitado por $f(x)$ y la recta de ecuación $x = x_0$.



Dividamos el área plana en rectángulos de altura $f(x)$ y anchura Δx. Al girar, dicho rectángulo engendra un disco cuyo volumen es $\pi y^2 \cdot \Delta x$. El volumen buscado lo podemos considerar como suma de los volúmenes elementales de los discos obtenidos haciendo $\Delta x \longrightarrow 0$.

$$V = \sum_{1}^{\infty} \pi y^2 \, dx = \int_a^{x_0} \pi \cdot y^2 \, dx.$$

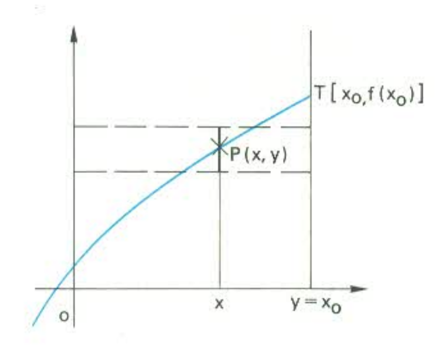
Ejemplos : 1.° hallar el volumen del sólido engendrado al girar la curva $y = x$, entre los puntos de abscisa $x = 0$, $x = 2$, alrededor del eje OX.

$$V = \int_0^2 \pi y^2 \, dx = \pi \int_0^2 x^2 \, dx = \frac{8}{3} \pi \text{ unidades cúbicas.}$$

El eje de rotación en el ejemplo precedente ha sido el OX, pero no necesariamente tiene que ocurrir así, sino que puede ser cualquiera, con tal de que forme parte del contorno del área que gira.

2.° hallar el volumen engendrado por la curva $y = f(x)$ al girar alrededor de la recta $y = x_0$.

Tracemos unos ejes de coordenadas y una curva $y = f(x)$, que consideramos representada por la línea de trazo grueso de la figura adjunta. La recta $y = x_0$ es paralela al eje de las y.



Sea un punto cualquiera de coordenadas (x, y) y dividamos el área en rectángulos horizontales de altura Δy. El volumen engendrado por dicho rectángulo es un cilindro de altura Δy y radio $x_0 - x$, teniéndose entonces que $\Delta V = \pi \cdot (x_0 - x)^2 \cdot \Delta y$ y el volumen total es $V = \Sigma \pi (x_0 - x)^2 \Delta y$, donde hacemos que $\Delta y \longrightarrow 0$, obteniendo finalmente :

$$V = \int_{-f(x_0)}^{+f(x_0)} \pi (x_0 - x)^2 \, dy.$$

Hemos supuesto que $f(x)$ es simétrica respecto al eje de las x; en caso contrario, los límites de integración serían los dos puntos de corte de $f(x)$ con la recta $y = x_0$.

3.° hallar el volumen engendrado por la curva $y^2 = x$ al girar alrededor de la recta $x = 3$.

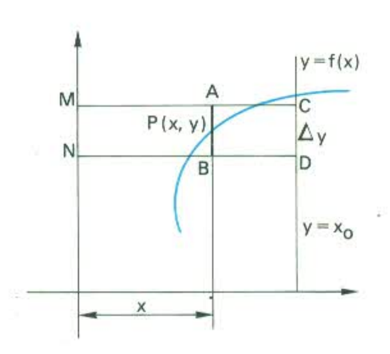
Sabemos que $f(x_0) = \sqrt{3}$; $V = \pi \int_{-\sqrt{3}}^{+\sqrt{3}} (3 - y^2)^2 \, dy =$

$$\pi \int_{-\sqrt{3}}^{+\sqrt{3}} (9 - 6y^2 + y^4) \, dy = \pi \left[9y - 4y^3 + \frac{y^5}{5} \right]_{-\sqrt{3}}^{+\sqrt{3}} =$$

$$\frac{48}{5} \sqrt{3} \pi \text{ unidades de volumen.}$$

b) Supongamos ahora que el eje de rotación no forma parte del contorno del área; por ejemplo, hallar el volumen engendrado en la rotación del área limitada por la curva $y = f(x)$ y la recta $y = x_0$, al girar alrededor del eje OY.

Tracemos unos ejes de coordenadas y supongamos que la línea de trazo grueso de la figura adjunta es la curva $y = f(x)$. Sea, asimismo, la recta $y = x_0$, paralela al eje de las ordenadas.



Eligiendo un punto genérico P (x, y), al girar la banda de la figura adjunta, ésta, A B C D, engendra un cilindro cuyo volumen lo podemos hallar, observando que tal volumen puede ser considerado como diferencia de los volúmenes $\Delta V = \Delta V_1 - \Delta V_2$, donde ΔV_1 = volumen engendrado por la rotación del rectángulo M N C D, y ΔV_2 = volumen engendrado por la rotación alrededor de OY del rectángulo A B M N.

$$\left. \begin{array}{l} \Delta V_1 = \pi x_0^2 \cdot \Delta y \\ \Delta V_2 = \pi x^2 \cdot \Delta y \end{array} \right\} \quad \Delta V = \pi \cdot \Delta y \, (x_0^2 - x^2), \quad \text{e, inte-}$$

grando entre los puntos de corte de la recta x con $f(x)$, obtenemos :

$$V = \int_{y_1}^{y_2} \pi \cdot (x_0^2 - x^2) \, dy.$$

Ejemplo : hallar el volumen generado en la rotación del área limitada por $y^2 = x$ y la recta $x = 3$, al girar alrededor de OY.

Para $x = 3$ $y = \pm \sqrt{3} \implies V =$

$$\int_{-\sqrt{3}}^{+\sqrt{3}} \pi (9 - x^2) \, dy = \pi \left[9y - \frac{y^5}{5} \right]_{-\sqrt{3}}^{+\sqrt{3}} = \frac{72\pi}{5} \sqrt{3} \text{ u. de}$$

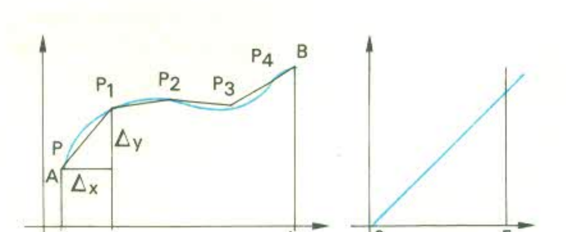
volumen.

Observemos que en la obtención de los volúmenes de los sólidos anteriores no existe un método único de hallarlos, sino que es la investigación del método más apropiado en cada caso lo que permite resolver los problemas particulares.

Como regla general, se recomienda siempre el hacer una gráfica del problema; después, formar los rectángulos elementales y hacer girar éstos para formar los cilindros elementales. Una vez conocida la relación ΔV, sólo nos falta integrar dicho volumen entre dos límites de integración adecuados.

Longitud de un arco de curva. — Sea una función $y = f(x)$, de la que suponemos que tanto ella como su derivada son continuas. En estas condiciones, la longitud de un arco de la curva $y = f(x)$ puede considerarse como

la suma de las longitudes de las cuerdas extendidas entre dos puntos infinitamente próximos de dicha curva.



Dada $y = f(x)$, se trata de hallar la longitud de dicha curva entre los puntos de abscisas a y b.

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo elemental de la figura adjunta, queda :

$$PP_1 = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \Delta x \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}.$$

Haciendo ahora que $P_1 \longrightarrow P_0$, la cuerda tiende a confundirse con el arco y en el límite se obtiene :

$$ds = dx \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = dx\,\sqrt{1 + [f'(x)]^2}.$$

Integrando entre los límites de integración a y b, resulta $\ell_{AB} = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx.$

De manera similar, si tratásemos de hallar la longitud de la curva $x = h(y)$, entre los puntos de abscisa a y b, se tendría :

$$\ell_{AB} = \int_A^B \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy = \int_b^a \sqrt{1 + (x'y)^2}\,dy.$$

Ejemplo : hallar la longitud de la curva $y = x$ entre los puntos de abscisas 0 y 5.

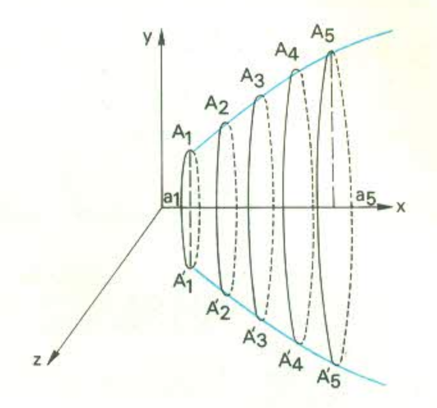
$y'_x = 1 \quad \ell = \int_0^5 \sqrt{1+1}\,dx = \int_0^5 \sqrt{2}\,dx = 5\sqrt{2}$ u. de longitud.

Ejemplo : hallar la longitud de la curva $y = x^{\frac{3}{2}} - 1$, entre los puntos de abscisas 0 y 4.

$$\ell = \int_0^4 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2}\,dx = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\,dx$$

$$= \frac{4}{9}\left[\frac{3}{2}\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}\right]_5^0 = \frac{243}{27} \text{ u. de longitud.}$$

Área de una superficie de revolución. — Sea $y = f(x)$ una curva continua. El problema es hallar el área de la superficie de revolución engendrada por dicha curva al girar alrededor de una recta cualquiera de su mismo plano. Siguiendo el método de trabajo que se ha llevado hasta aquí, podemos considerar dicha superficie como la suma de las n áreas elementales generadas por las cuerdas que subtienden los puntos $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$, cuando dicho número n tiende hacia infinito.



El área total A se puede considerar como la suma de las áreas laterales de los cilindros elementales $A_1A_2A'_1A'_2$; $A_2A_3A'_2A'_3$;... que denotaremos mediante ΔA.

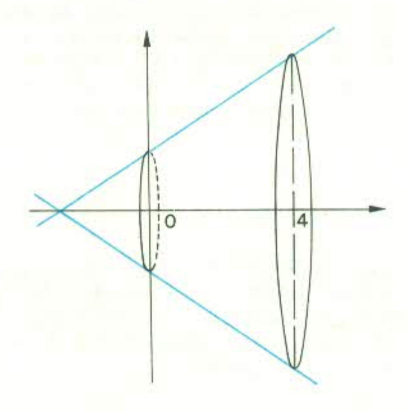
El área lateral de un cilindro es $2\pi r h$; en este caso $r = y$; $h = \Delta s$, siendo Δs el elemento de arco $A_1A_2, A_2A_3,\ldots$; o sea $\Delta A = 2\pi y\,\Delta s$. Suponiendo que se desea hallar el área de revolución entre los puntos de abscisa a_1 y a_4, se obtiene integrando :

$$A = \int_{a_1}^{a_4} 2\pi y\,ds = 2\pi \int_{a_1}^{a_2} y\,\sqrt{1 + y'^2}\,dx.$$

Siendo los puntos $A_1(a_1 b_1)$, $A_4(a_4 b_4)$ la fórmula anterior se puede escribir también :

$$A = \int_{b_1}^{b_4} 2\pi y\,\sqrt{1 + xy'^2}\,dy.$$

Ejemplo : hallar el área de la superficie de revolución engendrada por la curva $y = x + 1$, al girar alrededor del eje OX entre los puntos de abscisas 0 y 4.



$$A = 2\pi \int_0^4 x + 1\sqrt{1 + 1^2}\,dx = 2\sqrt{2}\pi \int_0^4 (x+1)\,dx$$

$$= 2\sqrt{2}\pi \left[\frac{x^2}{2} + x\right]_0^4 = 24\sqrt{2}\pi \text{ unidades de superficie.}$$

Geometría

Geometría plana

20. — Ángulos, polígonos y círculos

Introducción. — Elementos geométricos : *Plano. Recta. Punto. Semirrecta.* — **Ángulos y arcos :** Definiciones. Igualdad, suma y diferencia de ángulos. Producto y cociente de un ángulo por un número natural. Medida de ángulos. Unidades de medida empleadas. Arco y ángulo central correspondiente. Perpendicularidad y paralelismo. — **Polígonos :** Definiciones. Polígonos cóncavos y convexos. Triángulo : *Suma de los ángulos de un triángulo. Clasificación.* Distancia de un punto a una recta. Mediatriz de un segmento y bisectriz de un ángulo. Rectas principales de un triángulo. Cuadriláteros. *Suma de los ángulos de un cuadrilátero. Clasificación.* Propiedades de los paralelogramos. *Clasificación.* Propiedades y clasificación de los trapecios. — **Circunferencia y círculo :** Definiciones. Arco, diámetro, sector y segmento circular. Construcciones geométricas elementales con regla y escuadra. Construcciones geométricas fundamentales con regla y compás. Rectificación de la circunferencia. Razón de la longitud al diámetro. Longitud de un arco de circunferencia. — **Áreas de polígonos y figuras circulares :** Áreas. *De un rectángulo. Del cuadrado. Del paralelogramo. Del triángulo. Del rombo.* Paralela media y área de un trapecio. Áreas. *De un polígono. Del círculo. De la corona circular. Del sector circular. Del segmento circular.*

Introducción — Los orígenes experimentales de la Geometría son un hecho innegable : bástenos recordar las necesidades de los agrimensores egipcios para redistribuir las tierras del Valle del Nilo después de cada periódica crecida.

Posteriormente, **Tales** DE MILETO (¿640?-¿547? a. de J. C.), con su estudio sobre la semejanza de triángulos, **Pitágoras** (s. VI a. de J. C.), con su inmortal proposición sobre la relación métrica entre los lados de un triángulo rectángulo, y **Platón** (428-¿347? a. de J. C.), con su teoría de lugares geométricos, no hacen más que ratificar la unión de la Geometría con la experimentación.

En el siglo III a. de J. C., **Euclides** sistematizó todos los conocimientos geométricos hasta esa época en sus célebres *Elementos,* y **Arquímedes** estableció la relación entre la longitud de la circunferencia y el radio de la misma, así como el cálculo de las áreas y volúmenes de los cuerpos esféricos, pudiéndosele considerar como el precursor del cálculo infinitesimal gracias al uso del método de exhaustividad para el cálculo de las áreas y volúmenes.

Como geómetras griegos posteriores, podemos citar a **Apolonio** DE PERGA (262-180 a. de J. C.) con su gran *Tratado de las cónicas;* **Hiparco** (s. II a. de J. C.), creador de la Trigonometría rectilínea y esférica, y **Perseo,** en el mismo siglo, que, al cortar un toro por un plano, construyó las curvas de cuarto grado; **Ptolomeo** (s. II) con su *Almagesto,* y **Papo** (fines del s. III) que enuncia por primera vez la razón armónica.

Durante la Edad Media, la Geometría no brilló precisamente, pues los matemáticos más insignes de aquella época, los del Islam, dedicaron sus esfuerzos al desarrollo del Álgebra.

Como dato curioso, podemos señalar cómo en los reinos hispánicos medievales, Raimundo **Lulio** (1235-1315), practicó la Geometría e incluso escribió algunas obras a ella dedicadas.

En el siglo XVI, los españoles **Ciruelo, Muñoz** y **Pérez de Moya** aportan a la construcción geométrica y a la difusión de la Geometría sus profundos conocimientos. Precisamente a partir de esta época, y merced a las traducciones que ya se conocían con toda fidelidad de los *Elementos* de Euclides y de obras de Arquímedes, Papo y Ptolomeo, empiezan a darse pasos espectaculares.

Citemos, aunque brevemente, a **Desargues** (1593-1622), creador de la Geometría proyectiva y cimentador de toda la moderna Geometría, Blaise **Pascal** (1623-1662), Thomas **Simpson** (1710-1761), Leonhard **Euler** (1707-1783) que, en mayor o menor medida, estudiaron las cónicas.

Ya en el siglo pasado, descuellan los franceses Jean Victor **Poncelet** (1768-1867), Michel **Chasles** (1793-1880) y Gaston **Darboux** (1842-1917), y los alemanes Carl F. **Gauss** (1777-1865) y Bernhard **Riemann** (1826-1866), que estudian respectivamente las geometrías descriptiva, proyectiva y diferencial; Riemann introduce el concepto de geometrías no euclidianas, es decir, las que no cumplen el postulado de Euclides. La continuación y simultaneidad en estos trabajos son llevados a cabo por el húngaro Janos **Bolyai** (1802-1860) y el ruso Nikolai **Lobacheski** (1792-1856) y su sistematización por el alemán Felix **Klein** (1849-1925).

En España podemos citar como introductores de esta ciencia a José **Echegaray** (1832-1916) y Eduardo **Torroja** (1847-1918). Estudios profundos son debidos, en la Península, a Rey Pastor, Ude, Ancochea, Gaeta, Santaló y Vidal Abascal, y en Sudamérica a Farengo, Levi, Pascali y Raimondi, entre otros.

Elementos geométricos. — *Plano.* — Las superficies que utilizamos para escribir, como una pizarra o una cuartilla, que podemos considerar carecen de una tercera dimensión, son elementos adecuados para dar una idea del plano. En este sentido, diremos que un plano es la superficie de una cuartilla, y las infinitas cuartillas que podamos adosar unas junto a otras, alrededor de la primera.

Recta. — Dados dos planos cualesquiera α y β, se llama *recta* la intersección de ambos : $\alpha \cap \beta$.

Al igual que en el plano, la idea de recta es la de un ente de infinita longitud.

Punto. — Dado un plano y dos rectas a y b distintas y contenidas en él, tal que $a \cap b \neq \emptyset$, llamaremos *punto* a la intersección $a \cap b$. Si $a \cap b = \emptyset$, las dos rectas se llaman paralelas. Es inmediato comprobar que dos puntos, A y B, determinan una sola recta.

Semirrecta. — Dada una recta r y un punto P, perteneciente a ella, P divide a la recta en dos partes distintas llamadas *semirrectas*, y que designaremos por r_{p+} y r_{p-} (*fig.* 1).

El punto P se llama punto origen de las semirrectas.

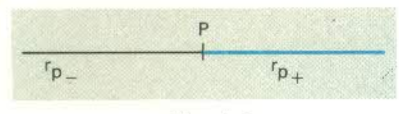


Fig. 1

Ángulos y arcos

Definiciones. — Sea un plano cualquiera P, y en él (*fig.* 2) dos rectas a y b, que se cortan en un punto O de P. *Cada una de estas rectas* a *y* b *divide al plano en dos regiones llamadas semiplanos.* El número total de semiplanos que aparecen como consecuencia de la intersección de las rectas a y b son cuatro, que denominaremos A_1, A_2, A_3, y A_4. A su vez, la intersección de estos semiplanos da lugar a la creación de cuatro regiones angulares o ángulos convexos : $A_1 \cap B_1$, $A_1 \cap B_2$, $A_2 \cap B_1$, $A_2 \cap B_2$. (*Fig.* 2, 3, 4, 5, 6 y 7.)

De las cuatro regiones angulares o ángulos aparecidos, dos ángulos que tengan una semirrecta común se denominan *adyacentes*; a su vez, la unión de dos ángulos adyacentes, se denomina ángulo *llano*.

Se denomina ángulo *cóncavo* la unión de tres regiones angulares : la reunión de las cuatro regiones angulares es el plano completo.

Las semirrectas que limitan una región angular se denominan *lados* del ángulo, y su intersección, *vértice* del mismo.

Dos ángulos se denominan *consecutivos* cuando tienen el mismo vértice y un lado común, no estando contenido uno en el otro. Ejemplo : los $\widehat{BOA}$ y $\widehat{COB}$ de la *fig.* 8.

Igualdad, suma y diferencia de ángulos. — Dos ángulos se dicen *iguales* si se pueden superponer uno sobre el otro.

La unión de dos ángulos consecutivos se denomina *suma de ángulos*. La operación así definida es una operación interna, que posee las propiedades :

1) *Asociativa.* $\widehat{A} + (\widehat{B} + \widehat{C}) = (\widehat{A} + \widehat{B}) + \widehat{C}$.

2) *Conmutativa.* $\widehat{A} + \widehat{B} = \widehat{B} + \widehat{A}$.

3) *Elemento neutro.* Se denomina así a un ángulo cuyos dos lados coinciden. Verifica, por tanto, la propiedad de que $\widehat{A} + \widehat{O} = \widehat{A}$.

Dados dos ángulos $\widehat{A}$ y $\widehat{B}$, su *diferencia*, cuando existe, es otro ángulo $\widehat{C}$ que verifica $\widehat{A} = \widehat{B} + \widehat{C}$; decimos cuando existe, pues puede ocurrir que el ángulo $\widehat{B}$ sea mayor que el $\widehat{A}$, y entonces la diferencia no es posible. El modo de llevar a cabo la operación es inmediato, sin más que observar las *fig.* 9, 10 y 11.

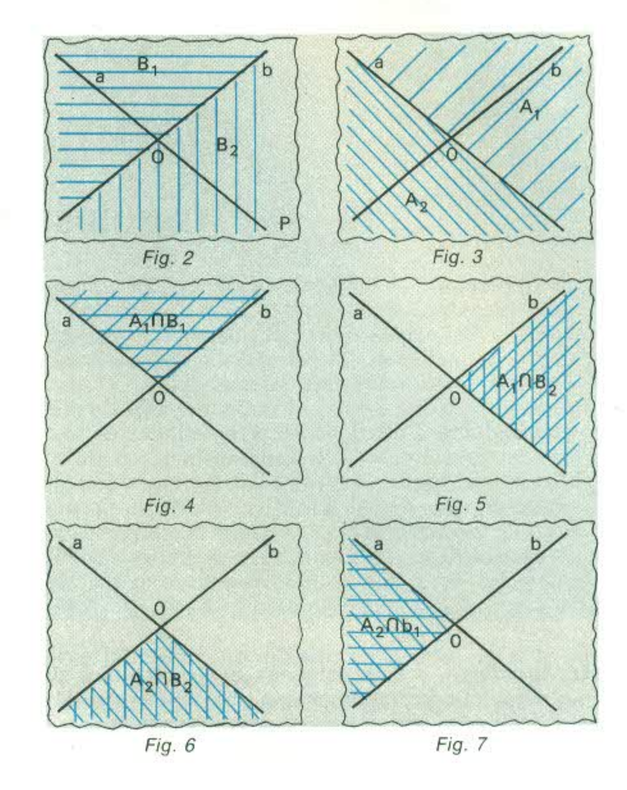


Fig. 2 *Fig. 3* *Fig. 4* *Fig. 5* *Fig. 6* *Fig. 7*

Producto y cociente de un ángulo por un número natural. — Dado un ángulo $\widehat{A}$ y un número natural n, se denomina producto $n \cdot \widehat{A}$ a un nuevo ángulo $n \cdot \widehat{A} = \overbrace{\widehat{A} + \widehat{A} + \ldots + \widehat{A}}^{n \text{ veces}}$.

Si por el contrario se trata de dividir el ángulo $\widehat{A}$ por n, el cociente $\frac{\widehat{A}}{n}$ es un nuevo ángulo que verifica que

$$\overbrace{\frac{\widehat{A}}{n} + \frac{\widehat{A}}{n} + \ldots + \frac{\widehat{A}}{n}}^{n \text{ veces}} = \widehat{A}.$$

Medida de ángulos. — Dado un ángulo $\widehat{A}$, elijamos un ángulo $\widehat{U}$ como unidad. Si $\widehat{A}$ contiene un número exacto de veces a $\widehat{U}$, por ejemplo, 5 veces, diremos que $\widehat{A} = 5\,\widehat{U}$. En el caso de que $\widehat{A}$ no contenga un número exacto de veces a $\widehat{U}$, dividiremos a $\widehat{U}$ en partes iguales, hasta que $\widehat{A}$ contenga un número exacto de veces a esta unidad. De esta manera, si $\widehat{A}$ contiene 6 veces a $\widehat{U}$ y 4 veces a la tercera parte de $\widehat{U}$, diremos que la medida de $\widehat{A}$ es :

$$\widehat{A} = 6\,\widehat{U} + \frac{4}{3}\,\widehat{U} = \frac{22}{3}\,\widehat{U}.$$

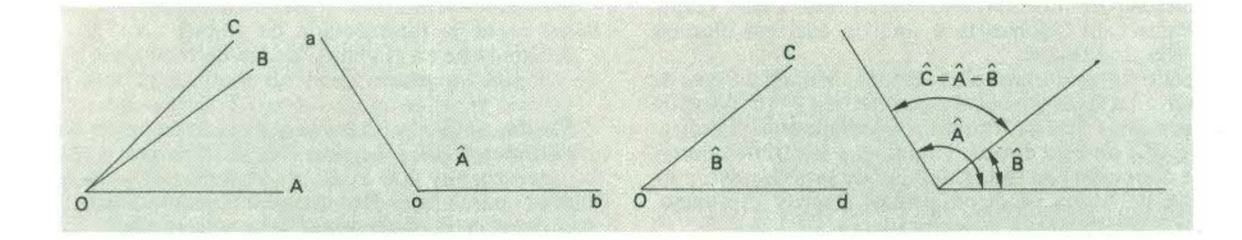


Fig. 8 *Fig. 9* *Fig. 10* *Fig. 11*

DEFINICIONES. — Ángulo recto es aquel que es igual a su adyacente.

Ángulo agudo es aquel que es menor que un ángulo recto.

Ángulo obtuso es aquel que es mayor que un recto.

Unidades de medida empleadas. — Aunque ya hemos visto en el apartado del Sistema Métrico el sistema de medida de ángulos, lo recordamos aquí aunque muy brevemente. Las unidades naturales son el *ángulo recto* y el *radián*. A su vez el ángulo recto, por ser una unidad demasiado grande, se divide en submúltiplos llamados grados. Un ángulo recto tiene 90^0 sexagesimales; a su vez el grado se divide en 60 *minutos* y el minuto en 60 *segundos*.

Arco y ángulo central correspondiente. — Dada una circunferencia y dos puntos A y B sobre ella, llamaremos arco de extremos A y B la parte de circunferencia comprendida entre ambos puntos.

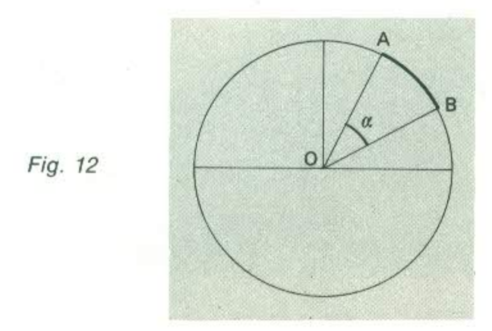


Fig. 12

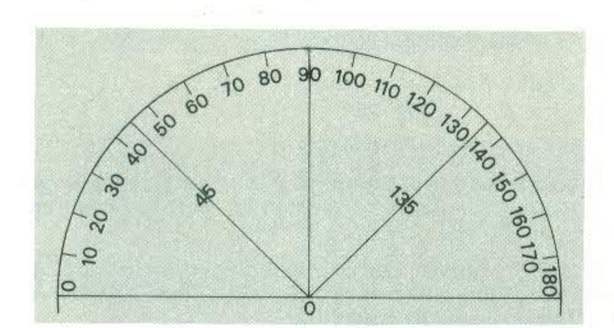
Uniendo A y B con el centro O (*fig.* 12) obtenemos el ángulo $\widehat{AOB} = \alpha$, cuyo vértice es el centro y que denominaremos ángulo central correspondiente al arco AB.

Como es inmediato comprobar, a otro arco CD, de la misma longitud de AB, le corresponde un ángulo central $\widehat{COD} = \beta$, tal que se cumple $\alpha = \beta$.

Recíprocamente, dado un ángulo central γ cualquiera, al que le corresponde un arco MN, a cualquier ángulo central ω, que verifique $\gamma = \omega$, le corresponderá un arco M'N', tal que se verifica MN = M'N'. Resumiendo : *a arcos iguales les corresponden ángulos iguales y recíprocamente.*

Como unidad de arcos se toma el cuadrante, o cuarta parte de la circunferencia, cuyo ángulo central es un recto. Para medir arcos se utiliza el *transportador* o *limbo circular* (*fig.* 13).

Fig. 13



Dadas las relaciones existentes entre arcos y ángulos, se han tomado como unidades de medida para los arcos las mismas que para los ángulos. Consecuentes con estas definiciones, un cuadrante tiene 90^0.

Perpendicularidad y paralelismo. — Dos rectas *a* y *b* se llaman *perpendiculares* cuando las regiones angulares a que dan lugar son ángulos rectos, y escribimos $a \perp b$ (*fig.* 14).

Dos rectas *a* y *b* se llaman *oblicuas* cuando no es recto ninguno de los cuatro ángulos a que dan lugar si se cortan (*fig.* 15).

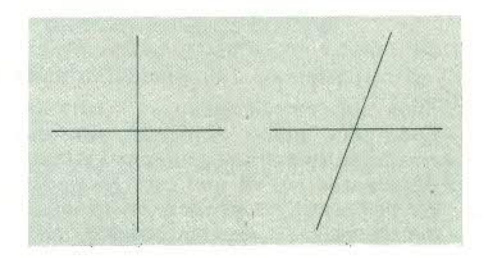


Fig. 14 Fig. 15

Dos rectas *a* y *b* situadas en un mismo plano, se dice que son *paralelas*, y escribimos $a \| b$, cuando no se cortan (*fig.* 16).

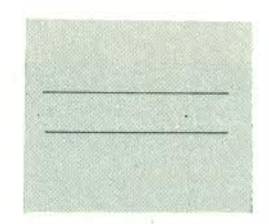


Fig. 16

A partir de las definiciones anteriores, se deducen las siguientes proposiciones :

1) Dadas dos rectas *b* y *c*, perpendiculares a la recta *a*, se verifica que *b* y *c* son paralelas (*fig.* 17).

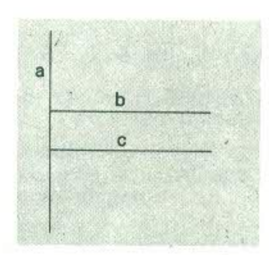


Fig. 17

2) *Postulado de Euclides*. Dada una recta *a* y un punto P exterior a la misma situado en el mismo plano, existe una y sólo una recta *b* que pasa por P y es paralela a *a* (*fig.* 18).

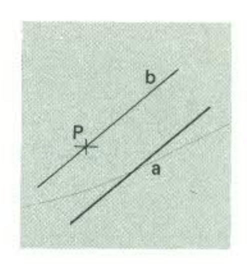
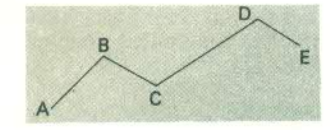


Fig. 18

Polígonos

Definiciones. — 1) La figura plana obtenida trazando segmentos no alineados, de modo que dos segmentos consecutivos tengan sólo un extremo común, se llama *línea poligonal* (*fig.* 19).

Fig. 19



Si cada vértice pertenece a dos lados, la poligonal se llama cerrada.

2) La región del plano limitada por una línea poligonal cerrada se denomina *polígono*. Atendiendo al número de segmentos por el que está formada la línea poligonal, los polígonos se dividen en triángulos, cuadriláteros, pentágonos, ... de tres, cuatro, cinco lados respectivamente.

Polígonos cóncavos y convexos. — Dado un polígono P y dos puntos cualesquiera A y B de su interior o de su borde, se dice que el polígono P es *convexo*, si el segmento $\overline{AB}$ es tal que todos sus puntos pertenecen al polígono (*fig.* 20).

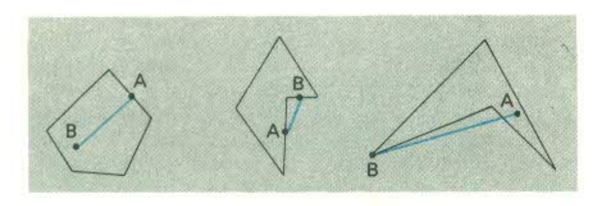


Fig. 20 Fig. 21 Fig. 22

Un polígono P' es *cóncavo* si, por el contrario, el segmento $\overline{AB}$ posee puntos no pertenecientes al polígono (*fig.* 21 y 22).

Triángulo. — Se denomina así al polígono de tres lados.

Se llama *perímetro* de un triángulo a la suma de las longitudes de sus lados.

Dado que el segmento es la distancia más corta entre dos puntos, resulta la siguiente propiedad : en todo triángulo, un lado es menor que la suma de los otros dos.

Suma de los ángulos de un triángulo. — La suma de los tres ángulos de un triángulo, es igual a dos rectos.

Experimentalmente, se puede comprobar esta propiedad :

Sea un triángulo cualquiera ABC (*fig.* 23); trazando su figura simétrica respecto del lado AC, se verifica :

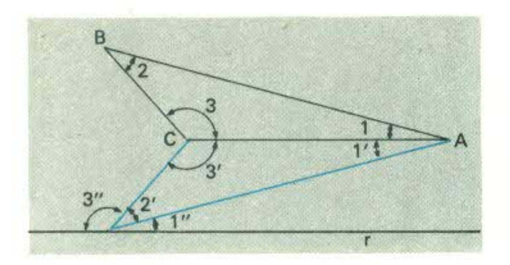


Fig. 23

Los ángulos 1 y 1' son iguales al 1''.

Los ángulos 2 y 2' son iguales.

Los ángulos 3 y 3' son iguales al 3''.

La suma $1'' + 2' + 3''$ es un ángulo llano, igual a dos rectos.

Clasificación. — Con relación a los lados los triángulos se clasifican así :

Isósceles es el que tiene dos lados iguales.

Equilátero es el que tiene sus tres lados iguales.

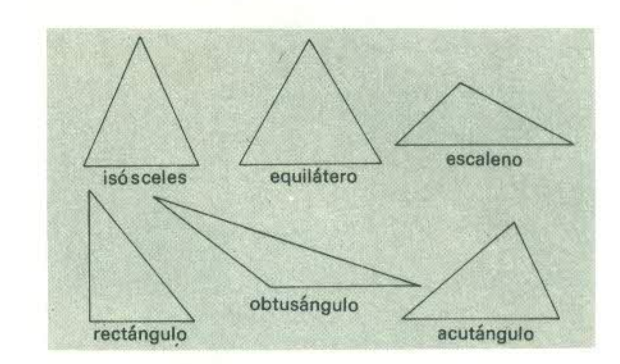
Escaleno es el que tiene sus tres lados desiguales.

Con relación a los ángulos se clasifican en :

Rectángulo, el que tiene un ángulo recto. Los lados que forman el ángulo recto se llaman *catetos* y el tercer lado *hipotenusa*.

Obtusángulo, el que tiene un ángulo obtuso.

Acutángulo, el que tiene sus tres ángulos agudos.



Distancia de un punto a una recta. — Dado un punto A y una recta *r* del mismo plano, A $\notin r$, se denomina *distancia* de A a *r* a la longitud del segmento determinado por dicho punto y por el pie de la perpendicular trazada por aquel punto a la recta dada (*fig.* 24).

Fig. 24

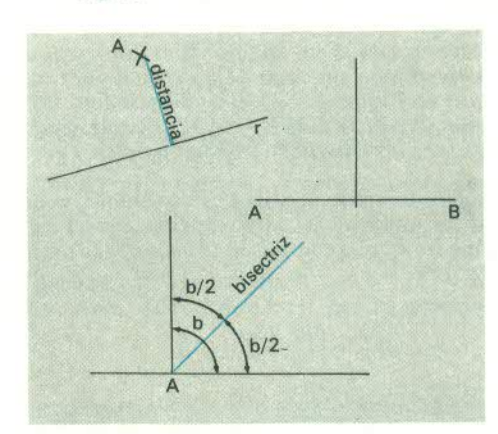


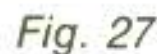
Fig. 25

Fig. 26

Mediatriz de un segmento y bisectriz de un ángulo. — La *mediatriz* de un segmento es la perpendicular en su punto medio (*fig.* 25).

Dado un ángulo $\widehat{A}$, se denomina *bisectriz* de $\widehat{A}$ la semirrecta que, pasando por el vértice de $\widehat{A}$, divide a $\widehat{A}$ en dos ángulos iguales (*fig.* 26).

Rectas principales de un triángulo. — *Altura* del triángulo es la distancia de un vértice al lado opuesto. Como consecuencia de la definición, existen para cualquier triángulo tres alturas, es decir, tantas como vértices (*fig.* 27, 28, 29).


Fig. 27 Fig. 28 Fig. 29

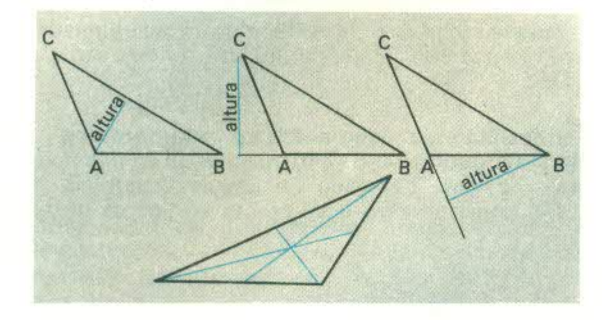


Fig. 30

Las tres alturas de un triángulo concurren en un punto llamado *ortocentro*.

Mediana de un triángulo es la recta determinada por un vértice y el punto medio del lado opuesto. En un triángulo cualquiera existen tres medianas, que se cortan en un punto denominado *baricentro* del triángulo, que coincide con el centro de gravedad del mismo (*fig.* 30).

Cuadriláteros. — DEFINICIÓN. — El *cuadrilátero es un polígono de cuatro lados*. Por consiguiente, posee también cuatro ángulos interiores, formados por cada dos lados consecutivos.

Vértices de un cuadrilátero son la intersección de cada dos lados. Vértices opuestos son aquellos que no están situados sobre el mismo lado.

Diagonales de un cuadrilátero son los segmentos determinados por cada dos vértices opuestos. Por lo tanto, en un cuadrilátero hay dos diagonales : AB y CD (*fig.* 31).

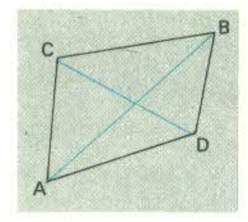


Fig. 31

Suma de los ángulos de un cuadrilátero. — Dado un cuadrilátero cualquiera ABCD (*fig.* 32), una diagonal lo divide en dos triángulos. La forma de división claramente nos dice que la suma de los ángulos del cuadrilátero es igual a la suma de los ángulos de los dos triángulos ABC y ADC (*fig.* 32).

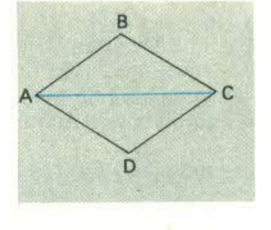


Fig. 32

Clasificación. — Los cuadriláteros se clasifican así :

1) *Paralelogramos*, cuadriláteros cuyos lados opuestos son paralelos (*fig.* 33).

2) *Trapecios*, los cuadriláteros que sólo tienen dos lados paralelos (*fig.* 34).

3) *Trapezoides*, los cuadriláteros que no tienen ningún lado paralelo (*fig.* 35).

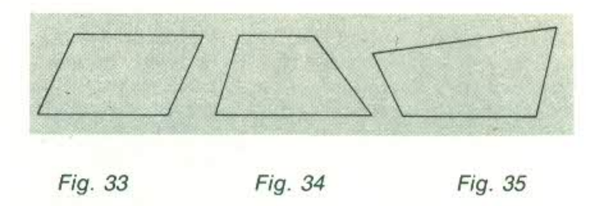


Fig. 33 Fig. 34 Fig. 35

Propiedades de los paralelogramos. — 1.ª En todo paralelogramo, los lados opuestos son iguales.

2.ª En todo paralelogramo, los ángulos opuestos son iguales.

3.ª Cada diagonal divide a un paralelogramo en dos triángulos iguales.

4.ª Las diagonales de un paralelogramo se cortan en su punto medio. Dicho punto se llama centro del paralelogramo.

Clasificación. — Los paralelogramos se clasifican en :

1) *Rectángulos* son los paralelogramos que tienen todos sus ángulos rectos; si además el rectángulo tiene los lados iguales, se denomina *cuadrado*.

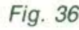
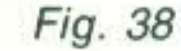
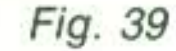
2) *Rombo* es el paralelogramo que tiene todos sus lados iguales, pero sus ángulos no son rectos.

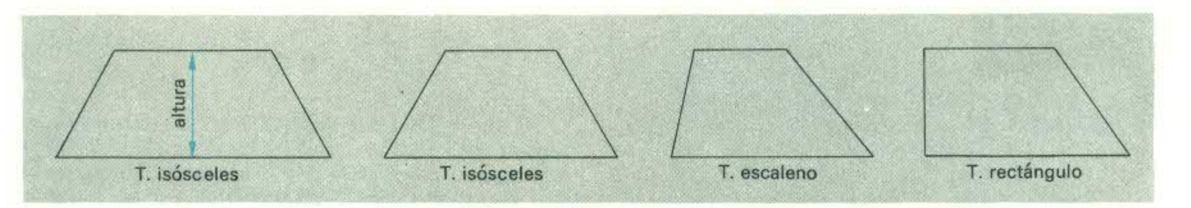
3) *Romboide* es el paralelogramo que no tiene ni sus ángulos ni sus lados iguales.

Propiedades y clasificación de los trapecios. — Se denominan *bases* del trapecio a sus dos lados paralelos.

Altura es la distancia entre las bases.

Según que sus lados no paralelos sean iguales o no, los trapecios se dividen en *isósceles* y *escalenos*. Los trapecios *rectángulos* son los que tienen un lado de los no paralelos perpendicular a las bases. (*Fig.* 36, 37, 38 y 39.)


Fig. 36 Fig. 37

Fig. 38

Fig. 39



Circunferencia y círculo

Definiciones. — *Circunferencia* es una curva cerrada y plana cuyos puntos equidistan de uno fijo llamado centro (*fig.* 40).

Círculo es la parte del plano limitada por una circunferencia (*fig.* 41).

Radio es el segmento que tiene por extremos el centro y un punto cualquiera de la circunferencia; por consiguiente, todos los infinitos radios de la circunferencia son iguales (*fig.* 42).

Arco, diámetro, sector y segmento circular. — *Arco* de una circunferencia es una parte de ella limitada por dos puntos que se llaman extremos (*fig.* 43).

Cuerda es el segmento que une dos puntos cualesquiera de la circunferencia (*fig.* 43).

Diámetro es cualquier cuerda que pase por el centro. Consecuentes con esta definición, un diámetro es igual al doble de cualquier radio, y además todos los diámetros son iguales. Cada diámetro divide a la circunferencia y a su círculo correspondiente en dos partes iguales, llamadas *semicircunferencia* y *semicírculo,* respectivamente. (*Fig.* 44 y 45.)

Sector circular es la parte de círculo limitada por un arco y por los radios de sus extremos. En la *fig.* 46, aparece rayado el sector AOB.

Segmento circular es la porción de círculo limitada por un arco y su cuerda. En la *fig.* 47 un segmento circular es el CDE.

Fig. 40 *Fig. 41*

Fig. 42 radio *Fig. 43* A arco diámetro B cuerda

Fig. 44 *Fig. 45*

Fig. 46 A B O *Fig. 47* D E C

Construcciones geométricas elementales con regla y escuadra. — 1) *Construcción de un ángulo igual a otro.* Se trata de, dado un ángulo cualquiera ABC (*fig.* 48), construir otro igual con el vértice en un punto

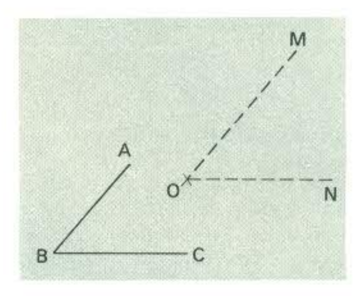


Fig. 48

determinado O. Basta trazar con la regla y la escuadra la semirrecta OM paralela a AB y ON paralela a BC.

2) *Cuadrado inscrito en una circunferencia.* Para dibujar un cuadrado cuyos vértices estén en una circunferencia, basta dividir ésta en cuatro arcos iguales, y después unir los puntos extremos de los arcos; para ello, trazando dos diámetros perpendiculares, tenemos dichos puntos extremos (*fig.* 49).

3) *Tangente a la circunferencia en uno de sus puntos.* Para hallar dicha tangente, se traza el radio correspondiente a dicho punto, y posteriormente se traza la perpendicular a dicho radio (*fig.* 50).

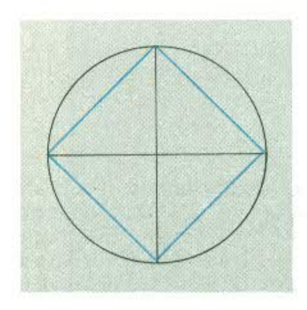


Fig. 49

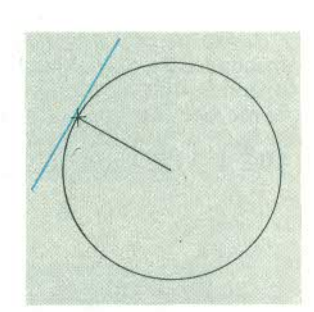


Fig. 50

4) *Bisectriz de un ángulo.* Para construir la bisectriz de un ángulo A, se lleva sobre los lados un segmento cualquiera AB = AC. Por B se traza una paralela a AC, y por C otra paralela a AB, las cuales se cortan en un punto

M. La bisectriz buscada se obtiene uniendo el vértice A con el punto M (*fig.* 51).

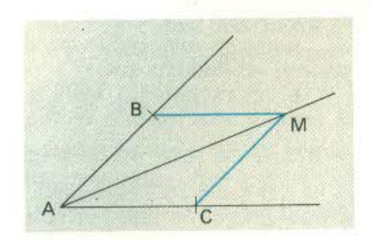


Fig. 51

Construcciones geométricas fundamentales con regla y compás. — 1) *Construcción de la mediatriz de un segmento.* Sea el segmento AB (*fig.* 52). Haciendo centro en A y en B, y con un radio mayor que la mitad del segmento, se trazan dos arcos CDE y CFE que se cortan en C y E. La mediatriz buscada es CE.

2) *Construcción de un ángulo igual a otro.* Sea el ángulo AOB, y sobre una semirrecta cualquiera O'B', se dibuja con centro en O' un arco de radio igual a otro trazado con centro en O, obteniéndose de esa manera el punto D'. Haciendo centro en D' y con radio CD se traza un arco que cortará en C' al primero dibujado. El segmento C'D' determina un ángulo C'O'D' = AOB. La demostración se basa en el hecho de que las cuerdas CD y C'D' son iguales y, por lo tanto, subtienden iguales ángulos centrales (*fig.* 53).

3) *Circunferencia que pasa por tres puntos.* Para dibujar una circunferencia que pasa por tres puntos A, B, C, primeramente construiremos el triángulo ABC, y posteriormente se hallan las mediatrices de dos cualesquiera de sus lados. Dichas mediatrices se cortan en un punto llamado circuncentro, que es el centro de la circunferencia buscada; con centro en O y radio la distancia desde O a cualquiera de los vértices, trazaremos la circunferencia buscada (*fig.* 54).

4) *Bisectriz de un ángulo.* Sea el ángulo AOB (*fig.* 55). Con centro en el vértice, se traza un arco cualquiera que corta a los lados del ángulo en dos puntos M y N. Haciendo centro en dichos puntos, se trazan dos arcos de igual radio que se cortan en P. La semirrecta OP es la bisectriz pedida, pues divide al arco MN en dos partes iguales.

5) *Construcción de triángulos en casos sencillos.* i) Dados dos lados y el ángulo comprendido. Sean los segmentos AB y MN y el ángulo A. Se trata de construir un triángulo con estos datos; para ello, sobre un segmento cualquiera igual a AB, se dibuja con vértice en uno de sus extremos el ángulo A' = A, y a partir del vértice se toma la longitud A'C' = MN. Uniendo C' con B' resulta el triángulo pedido A'B'C' (*fig.* 56). Esta construcción asegura que A'B'C' es el triángulo pedido, puesto que se verifica : AB = A'B', MN = A'C' y Â = Â'.

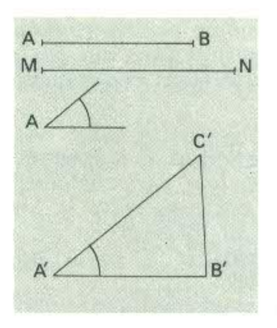


Fig. 56

ii) Dados un lado y los dos ángulos adyacentes. Sobre un segmento igual a AB, se dibujan los ángulos A' y B' respectivamente iguales a los ángulos A y B dados como datos. Las semirrectas A'C' y B'C' se cortan en un punto C', que con A' y B' forma el triángulo pedido (*fig.* 57).

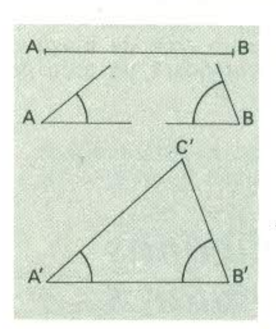


Fig. 57

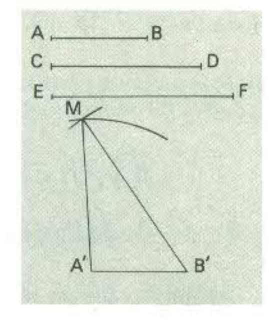
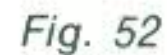
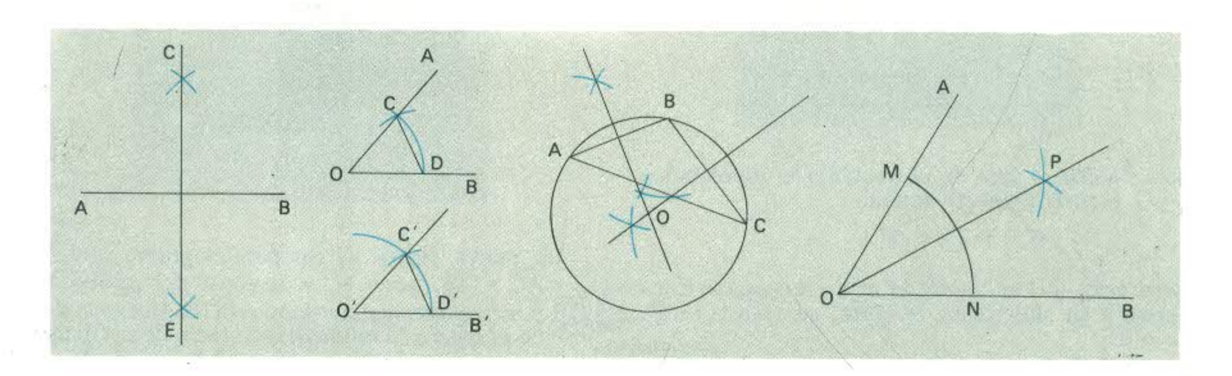


Fig. 58

iii) Dados los tres lados. Sean los segmentos AB, CD y EF, que se dan como datos. Para construir el triángulo que tiene dichos lados, se traza un segmento A'B' = AB. Con centro en A' y radio igual a CD, se traza un arco; con centro en B' y radio igual a EF, se traza otro arco. La intersección de dichos arcos, si existe, es el punto M que, junto con los puntos A' y B', deja determinado el triángulo buscado (*fig.* 58).


Fig. 52 *Fig. 53* *Fig. 54* *Fig. 55*



Rectificación de la circunferencia. — Sea la circunferencia de centro O y radio OA, que consideramos de alambre. Si damos un corte en cualquiera de sus puntos, y después enderezamos dicho alambre, nos encontraremos con un segmento cuya longitud es la de la circunferencia y que denominaremos circunferencia rectificada.

Dada una circunferencia cualquiera, el experimento anterior no es siempre posible realizarlo, por lo cual es necesario investigar métodos que nos permitan rectificar cualquier circunferencia conociendo su radio o su diámetro.

Razón de la longitud al diámetro. — Se comprueba experimentalmente que, para cualquier circunferencia de diámetro 2R, el cociente entre la longitud l de dicha circunferencia y su diámetro es un número constante que denominaremos π y cuyas primeras cifras son $\pi = 3'141592653589\ldots$

Inversamente, si sabemos que se verifica para cualquier circunferencia la anterior relación, podemos hallar su longitud, multiplicando el diámetro por el número π.

Longitud de un arco de circunferencia. — Se trata de hallar la longitud de un arco de circunferencia cuyo ángulo central tiene la amplitud n^0. Teniendo en cuenta la proporcionalidad existente entre los arcos y los ángulos por ellos subtendidos, el problema se reduce a establecer la proporcionalidad adecuada. Si la circunferencia tiene un radio R, su longitud será $2\pi R$, y razonamos :

Si un ángulo de 360^0 subtiende un arco de longitud $2\pi R$, un ángulo de n grados subtenderá un arco de longitud x :

$$x = \frac{2\pi R \cdot n}{360}.$$

Áreas de polígonos y figuras circulares

Áreas. — *De un rectángulo.* — Si para hallar el área del rectángulo de la *fig.* 59 tomamos como unidad el cuadrado de lado u, vemos que dicho rectángulo contiene al cuadrado de lado u 32 veces, y diremos que su área es 32 U, donde U es el área del cuadrado de lado u. Dicho número 32 es claro que lo hemos obtenido como producto de las veces que contiene la base del rectángulo a la unidad u, por las veces que contiene la altura de dicho rectángulo a la unidad u. Resumiendo, podemos decir que *el área de un rectángulo es igual al producto de las medidas de su base y su altura.* $S = b \cdot a$.

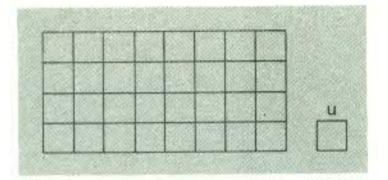


Fig. 59

Ejercicio : hallar el área de un rectángulo cuyos lados miden 3 y 2 metros respectivamente :

$$S = 3 \cdot 2 = 6 \text{ m}^2.$$

Del cuadrado. — Un *cuadrado* es un rectángulo cuya base es igual a su altura, por lo tanto, su área S será : $S = a \times a = a^2$.

Del paralelogramo. — Supongamos un paralelogramo cualquiera ABCD. Trazando las alturas BM y CN, obtenemos dos triángulos rectángulos ABM y CDN que son iguales, puesto que $\overline{AB} = \overline{CD}$, $\overline{BM} = \overline{CN}$ y los ángulos $\widehat{A} = \widehat{D}$ y $\widehat{B} = \widehat{C}$, por ser sus lados paralelos. De las anteriores relaciones se deduce que el área del paralelogramo ABCD y la del rectángulo MBCN son iguales. Ahora bien, el área de este último rectángulo es :

$S_{MBCN} = \overline{MN} \times \overline{BM}$, pero $\overline{MN} = \overline{AD}$, luego

$S_{MBCN} = S_{ABCD} = \overline{AD} \times \overline{BM}$, y resumimos : *el área de un paralelogramo cualquiera es igual al producto de las medidas de su base por su altura* (*fig.* 60).

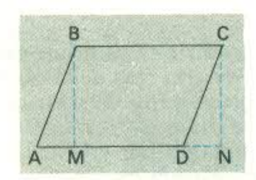


Fig. 60

Del triángulo. — Dado un triángulo ABC, a partir de él podemos formar el paralelogramo ABCB', cuya área es el doble del área del triángulo ABC. (*Fig.* 61 y 62.)

Ahora bien, $S_{ABCB'} = \overline{AC} \times \overline{BM}$, luego

$S_{ABC} = \frac{1}{2}\overline{AC} \times \overline{BM} = \frac{1}{2} \times \text{Base} \times \text{Altura}$ y resumimos : *el área de un triángulo es igual al semiproducto de la medida de una de sus bases por la altura correspondiente.*

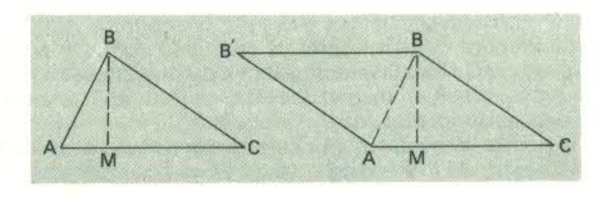


Fig. 61 *Fig. 62*

Del rombo. — Dado que el rombo es un paralelogramo, su área la podemos hallar mediante la fórmula $S = b \cdot h$, siendo b su base y h su altura.

Ahora bien, dado un rombo ABCD, trazando las dos diagonales, lo descomponemos en cuatro triángulos, que podemos recomponerlos como en la *fig.* 63.

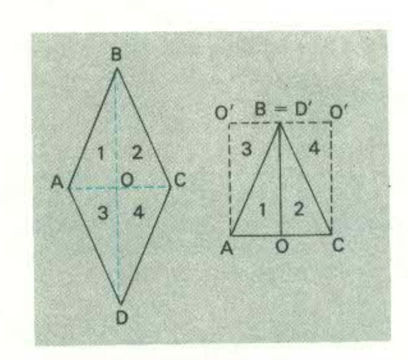


Fig. 63

La nueva figura es un paralelogramo cuya área es $S = \overline{AC} \times \overline{OB}$, pero $\overline{AC}$ = diagonal del rombo ABCD y $\overline{OB}$ = semidiagonal del rombo ABCD. Luego *el área de un rombo es igual a la mitad del producto de sus diagonales.*

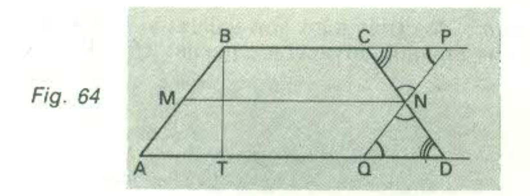
Paralela media y área de un trapecio. — Se denomina *paralela media* de un trapecio al segmento que une los puntos medios de los dos lados no paralelos. Dicho segmento es paralelo a las dos bases del trapecio, y además posee la propiedad de que es igual a la semisuma de dichas bases, es decir $\overline{MN} = \dfrac{\overline{AD} + \overline{BC}}{2}$ (*fig.* 64).

En efecto, trazando por N una paralela a $\overline{AB}$, se obtienen los dos triángulos CNP y QND, que son iguales, pues todos sus ángulos son iguales, y además $\overline{CN} = \overline{ND}$ (ver igualdad de triángulos). De la figura se deduce : $\overline{BP} = \overline{MN} = \overline{AQ}$, por ser segmentos de paralelas comprendidos entre paralelas. Ahora bien :

$$\left.\begin{array}{l}\overline{BP} = \overline{BC} + \overline{CP}\\ \overline{AQ} = \overline{AD} - \overline{QD}\end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\overline{MN} = \overline{BC} + \overline{CP}\\ \overline{MN} = \overline{AD} - \overline{CP}\end{array}\right.$$

ya que $\overline{CP} = \overline{QD}$.

Fig. 64



Sumando las dos igualdades anteriores, se tiene :

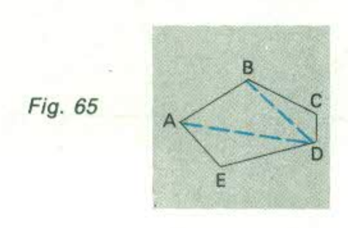
$$2\,\overline{MN} = \overline{BC} + \overline{AD} \Longrightarrow \overline{MN} = \frac{\overline{BC} + \overline{AD}}{2}.$$

Veamos ahora que el área de ABCD es igual a la paralela media por la altura. En efecto, como $S_{QND} = S_{CNP} \Longrightarrow S_{ABCD} = S_{AQBP}$, pero S_{AQBP} por ser un paralelogramo es igual a $\overline{AQ} \times \overline{BT} = \overline{MN} \times \overline{BT}$, y finalmente, $S_{ABCD} = \overline{MN} \times \overline{BT} = \dfrac{\overline{BC} \times \overline{AD}}{2} \times \overline{BT}$, que escribimos : *el área de un trapecio es igual al producto de las medidas de la semisuma de sus bases por su altura.*

Áreas. — *De un polígono.* — Si se trata de un polígono cualquiera ABCDE, para hallar su área se descompone en figuras más sencillas, por ejemplo triángulos, y entonces se calcula el área total como suma de las áreas parciales de cada una de las figuras en que lo hemos descompuesto (*fig.* 65) :

$$S_{ABCDE} = S_{BCD} + S_{ABD} + S_{ADE}.$$

Fig. 65



Del círculo. — El área de un círculo de radio R es igual al producto del número π por el cuadrado del radio :

$$S = \pi \cdot R^2.$$

Ejemplo : hallar el área de un círculo de radio R = 3 m :

$$S = \pi \cdot R^2 = 9\,\pi\ m^2.$$

De la corona circular. — Una corona circular es el espacio limitado entre dos circunferencias concéntricas (*fig.* 66).

Su área se obtiene como diferencia de las áreas de los círculos de radio R y *r*.

Del sector circular. — Considerando que el área de un sector circular es proporcional a la amplitud de su ángulo central correspondiente, se puede hallar dicha área estableciendo la siguiente proporción :

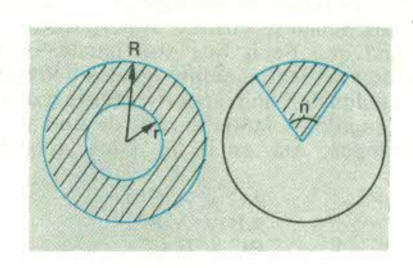


Fig. 66 Fig. 67

Si a un sector circular de 360^0 le corresponde un área de πR^2, a un sector circular de n^0 le corresponde un área S;

$$\frac{360}{n^0} = \frac{\pi R^2}{S}; \quad S = \frac{\pi R^2 n^0}{360} \ (fig.\ 67).$$

Ejemplo : hallar el área de un sector circular de 50^0 y radio 2 *m* :

$$S = \frac{\pi \cdot 2^2 \cdot 50}{360} = \frac{5}{9}\pi\ m^2.$$

Del segmento circular. — El área del segmento circular AMB puede hallarse como diferencia entre las áreas del sector circular de ángulo central n^0 y del triángulo AOB (*fig.* 68).

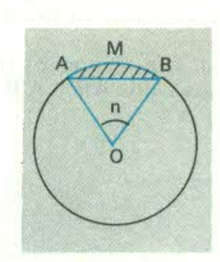


Fig. 68



21. — Semejanza de triángulos

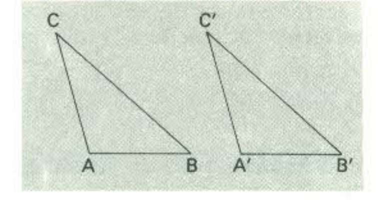
Casos de igualdad de triángulos. — **Proporcionalidad de segmentos :** Proporcionalidad. Razón. Segmentos proporcionales. Propiedades de la proporcionalidad. Proporción. *Cambio de extremos o medios en una proporción. Suma de antecedentes y consecuentes en una proporción.* Semejanza. *Triángulo en posición de Tales.* Casos de semejanza. Polígonos semejantes. Razones. *De los perímetros de dos polígonos semejantes. De las alturas de dos triángulos semejantes. De las áreas de dos triángulos semejantes.* — **Relaciones métricas en el triángulo rectángulo :** Proyecciones : *De un punto sobre una recta. De un segmento sobre una recta.* Altura correspondiente a la hipotenusa. — **Polígonos regulares.** Valor de los ángulos internos de un polígono. Construcción de polígonos regulares. — **Ángulos en la circunferencia :** Ángulo exterior de un triángulo. Ángulo inscrito. Ángulo semiinscrito. Ángulo interior. Ángulo exterior.

Casos de igualdad de triángulos. — Se dice que dos triángulos son iguales, cuando superpuestos coinciden. Esto es igual que decir que son iguales si tienen los ángulos de uno respectivamente iguales a los del otro, así como los ángulos de uno respectivamente iguales a los del otro. A los ángulos y lados iguales de uno y otro, se les llama homólogos. Así, en la *fig.* 1 los lados homólogos son :

AC y A′C′
AB y A′B′
BC y B′C′

y los ángulos homólogos son : $\widehat{A}$ y $\widehat{A}'$, $\widehat{B}$ y $\widehat{B}'$, $\widehat{C}$ y $\widehat{C}'$.

Fig. 1



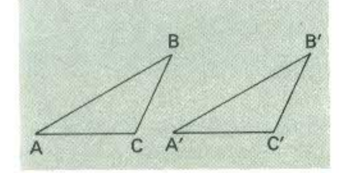
Sin embargo, no es necesario comprobar la igualdad de todos los lados y ángulos de un triángulo para afirmar la igualdad entre dos triángulos, sino que bastan menos condiciones para que las igualdades $\widehat{A} = \widehat{A}'$, $\widehat{B} = \widehat{B}'$, $\widehat{C} = \widehat{C}'$, AB = A′B′, BC = B′C′, AC = A′C′, se verifiquen.

Estas condiciones restrictivas las podemos sintetizar del siguiente modo :

Primer caso : dos triángulos son iguales si tienen iguales dos lados y el ángulo entre dichos lados comprendido.

En efecto, supongamos (*fig.* 2) que los triángulos ABC y A′B′C′ tienen iguales los lados AB y A′B′, así como los AC y A′C′, y el ángulo $\widehat{A} = \widehat{A}'$.

Fig. 2



Haciendo coincidir los vértices A y A′, dado que AC = A′C′, el vértice C′ coincidirá con el C, y así ocurrirá con el B′ y el B, por lo tanto la recta que une los puntos B y C, así como los B′ y C′, dado que B ≡ B′, C ≡ C′, serán iguales, o sea BC = B′C′. De igual manera, si A′B′ coincide con AB y BC con B′C′, entonces el ángulo $\widehat{B} = \widehat{B}'$, y el ángulo $\widehat{C} = \widehat{C}'$.

Segundo caso : dos triángulos son iguales si tienen un lado igual y sus ángulos adyacentes iguales (*fig.* 3).

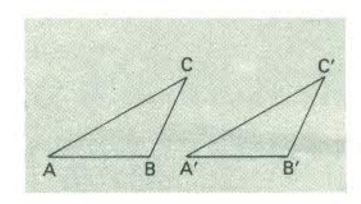


Fig. 3

Supongamos que AB = A′B′ y que $\widehat{A} = \widehat{A}'$, $\widehat{B} = \widehat{B}'$. Haciendo coincidir A′B′ con AB, dado que $\widehat{A} = \widehat{A}'$ y $\widehat{B} = \widehat{B}'$, entonces se verificará que la recta que contiene al segmento A′C′ coincide con la recta que contiene a AC, y lo mismo ocurre con las rectas que contienen a BC y B′C′. Ahora bien, los puntos de corte de dichas rectas son respectivamente C y C′; como las rectas coinciden, esto implica que C ≡ C′, y entonces los lados BC y B′C′ son iguales, así como los AC y A′C′.

Tercer caso : dos triángulos son iguales si los tres lados de uno son respectivamente iguales a los tres lados del otro (*fig.* 4).

Hagamos coincidir B′C′ con BC, y supongamos que los angulos $\widehat{C}$ y $\widehat{C}'$, así como los $\widehat{B}$ y $\widehat{B}'$ son desiguales. Por ser $\widehat{C} \neq \widehat{C}'$, B′A′ sería mayor o menor que BA, pero nunca igual, por lo tanto, para que BA = B′A′, ha de verificarse que $\widehat{C} = \widehat{C}'$ (*fig.* 4).

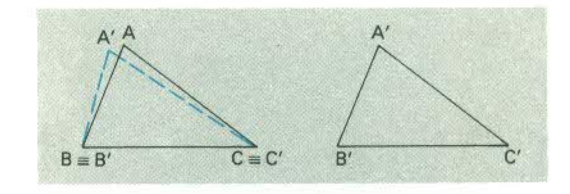


Fig. 4

Una vez que hemos visto que $\widehat{C} = \widehat{C}'$, como C′A′ = CA y B′C′ = BC, por el primer caso de igualdad de triángulos, serán iguales los ABC y A′B′C′.

En el caso de que los triángulos fuesen rectángulos, los casos se convierten en : primero, ***dos triángulos rectángulos son iguales si tienen un cateto y un ángulo agudo iguales;*** segundo, ***si tienen un cateto y la hipotenusa iguales,*** y tercero, ***si tienen iguales los catetos.***

Propiedades del paralelismo entre rectas. — Sean dos rectas paralelas r y r', cortadas por una secante s. Los puntos de intersección dan lugar a ocho regiones angulares (*fig.* 4 bis) que denominaremos del siguiente modo :

Exteriores 1, 2, 7 y 8.
Interiores 3, 4, 5 y 6.
Alternos externos 1 y 8; 2 y 7.
Alternos internos 3 y 6; 4 y 5.
Correspondientes 1 y 5; 2 y 6; 3 y 7; 4 y 8.

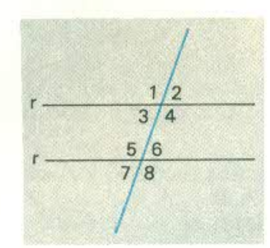


Fig. 4 bis

Entre estos ángulos se verifican las siguientes relaciones :

i) Los ángulos alternos externos son iguales.
ii) Los ángulos alternos internos son iguales.
iii) Los ángulos correspondientes son iguales.

Proporcionalidad de segmentos

Proporcionalidad. — Sean dos semirrectas con el mismo origen O, y dos segmentos generales a y b, dos de cuyos representantes los llevamos sobre cada una de las semirrectas trazadas.

Establezcamos una aplicación

$\frac{\bar{b}}{\bar{a}}$ de S/R $\longrightarrow$ S/R

donde $\bar{x}$ es un segmento general $\bar{x} \longrightarrow \frac{\bar{b}}{\bar{a}}(\bar{x}) = \bar{y}$ cualquiera, e $\bar{y}$ lo hemos obtenido trazando desde el extremo X del segmento OX $\in \bar{x}$ una recta paralela a la AB. A esta aplicación se le llama *proporcionalidad*, y el conjunto de todas las proporcionalidades se representa (*fig.* 5) por $\mathscr{T}$:



Fig. 5

Razón. — Definamos en el conjunto formado por todas las proporcionalidades la siguiente relación i : Dos proporcionalidades $\frac{\bar{n}}{\bar{m}}, \frac{\bar{s}}{\bar{r}}$ están relacionadas si, aplicadas al mismo segmento general x, obtenemos el mismo segmento general y, es decir, si $\frac{\bar{n}}{\bar{m}}(\bar{x}) = \frac{\bar{s}}{\bar{r}}(\bar{x}) = \bar{y}$.

La relación así definida es de equivalencia, pues cumple las propiedades :

1) *Reflexiva* $\frac{\bar{n}}{\bar{m}} = \frac{\bar{n}}{\bar{m}}$.

2) *Simétrica*. Si $\frac{\bar{n}}{\bar{m}} = \frac{\bar{s}}{\bar{r}}, \Longrightarrow \frac{\bar{s}}{\bar{r}} = \frac{\bar{n}}{\bar{m}}$.

3) *Transitiva*. Si $\frac{\bar{n}}{\bar{m}} = \frac{\bar{s}}{\bar{r}}, \wedge \frac{\bar{s}}{\bar{r}} = \frac{\bar{p}}{\bar{q}} \Longrightarrow \frac{\bar{n}}{\bar{m}} = \frac{\bar{p}}{\bar{q}}$.

A partir de i obtenemos el conjunto cociente $\mathscr{T}/i$, cuyos elementos son las clases $\left\{\frac{a}{b}\right\}$, formadas por todas las infinitas proporcionalidades iguales a una dada.

A cada una de las nuevas clases se les llama *razón*.

Es inmediato comprobar que dos proporcionalidades son iguales si las rectas AB y CD son paralelas (*fig.* 6).

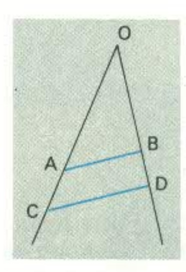


Fig. 6

Segmentos proporcionales. — Sea la proporcionalidad $\frac{\bar{b}}{\bar{a}}$, que, aplicada al segmento $\bar{x}$, tiene como imagen el $\bar{y}$.

Por definición, las rectas AB y XY son paralelas, o lo que es lo mismo, las proporcionalidades

$\frac{\bar{b}}{\bar{a}}$ y $\frac{\bar{y}}{\bar{x}}$ son iguales, y escribimos $\frac{\bar{b}}{\bar{a}} = \frac{\bar{y}}{\bar{x}}$.

Dados los segmentos $b \in \bar{b}, a \in \bar{a}, y \in \bar{y}, x \in \bar{x}$, cualesquiera, diremos que son proporcionales y escribimos $\frac{b}{a} = \frac{y}{x}$ si las proporcionalidades $\frac{\bar{b}}{\bar{a}}$ y $\frac{\bar{y}}{\bar{x}}$ son iguales (*fig.* 7).

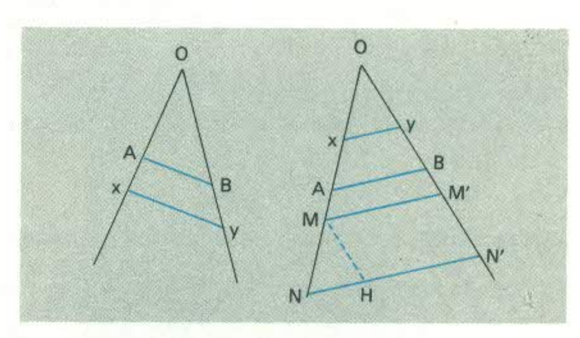


Fig. 7 *Fig. 8*

Propiedades de la proporcionalidad. — 1.ª Una proporcionalidad hace corresponder a segmentos iguales, segmentos también iguales (*fig.* 8).

En efecto, sea la proporcionalidad $\frac{\bar{b}}{\bar{a}}$; se trata de demostrar que, si $OX \in \bar{x}$, $MN \in \bar{x}$, entonces $OY \in \bar{y}$, $M'N' \in \bar{y}$, donde $\frac{\bar{b}}{\bar{a}}(\bar{x}) = \bar{y}$. Para ello debemos de ver que los segmentos OY y M'N' son iguales o, lo que es lo mismo, OY y MH. Para ello veamos que los triángulos OXY y MNH son iguales.

Los ángulos $\widehat{O}$ y $\widehat{M}$ son iguales, puesto que tienen un lado común y otro paralelo. Igual ocurre con $\widehat{X}$ y $\widehat{N}$, y ademas OX = MN. Luego, por el segundo caso de igualdad de triángulos, los triángulos OXY y MNH son iguales, y por lo tanto OY = MH = M'N'.

2.ª Una proporcionalidad hace corresponder a la suma de dos segmentos $\bar{x}_1 + \bar{x}_2$ la suma de sus imágenes $\bar{y}_1 + \bar{y}_2$. En efecto (*fig.* 9), trazando los segmentos $OX_1 \in x_1$ y $X_1X_2 \in \bar{x}_2$, uno a continuación del otro, sus imágenes respectivas OY_1 e Y_1Y_2 también están a continuación una de otra y, además, se verifica que

$$\frac{\bar{b}}{\bar{a}}\, OX_1 + X_1X_2 \frac{\bar{b}}{\bar{a}}\, (OX_2) = OY_1 + Y_1Y_2 = OY_2.$$

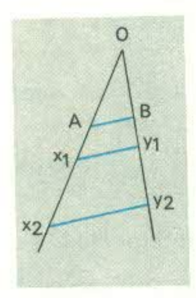


Fig. 9

Esta propiedad nos permite dividir un segmento cualquiera OX en n partes iguales. Para ello, trazando las semirrectas de origen común O, y llevando sobre una de ellas el segmento OX, basta trazar sobre la otra semirrecta n segmentos iguales $a_1, a_2, \ldots, a_n$, para que, al unir A con X y trazar paralelas a AX desde A_i hasta el extremo X, encontremos los segmentos OX_1, X_1X_2, ..., $X_{n-1}X$ buscados (*fig.* 10).

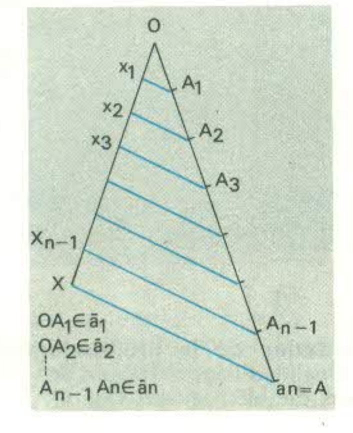


Fig. 10

TEOREMA DE TALES. — *Un sistema de rectas paralelas determina sobre dos rectas concurrentes un sistema de segmentos proporcionales* (*fig.* 11).

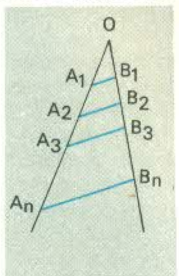


Fig. 11

En efecto, dadas dos rectas r_1 y r_2 que se cortan, y las rectas paralelas A_1B_1, A_2B_2, ..., A_nB_n, según las definiciones anteriores se verifica que las proporcionalidades $\frac{\bar{b}_1}{\bar{a}_1}, \frac{\bar{b}_2}{\bar{a}_2}, \ldots, \frac{\bar{b}_n}{\bar{a}_n}$ son iguales.

Proporción. — Se denomina así a la igualdad de dos razones.

En toda proporción existen cuatro términos : a y c, que llamaremos *antecedentes*, y b y d que llamaremos *consecuentes*. También se denominan a los segmentos a y d, *extremos*, y a los c y b, *medios* (*fig.* 12).

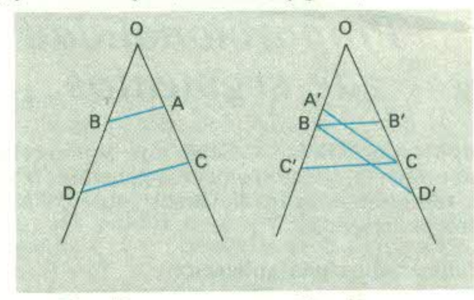


Fig. 12 *Fig. 13*

Cambio de extremos o medios en una proporción. — Dada la proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, podemos formar, a partir de ella, las $\frac{d}{b} = \frac{e}{a}$ y $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$. Para comprobarlo, observemos que las rectas A'C y BD' son paralelas, o sea $\frac{c}{a} = \frac{d}{b}$ (*fig.* 13).

Suma de antecedentes y consecuentes en una proporción. — *En una proporción, la suma de antecedentes es a la suma de consecuentes como un antecedente es a su consecuente.*

Dada la proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, se trata de ver que la proporcionalidad $\frac{a+c}{b+d}$ verifica : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$.

En efecto, veamos que aplicando $\frac{a+c}{b+d}$ a un segmento cualquiera x, el segmento imagen $\frac{a+c}{b+d}(x) = y$ es el mismo que $\frac{a}{b}(x) = \frac{c}{d}(x) = y$.

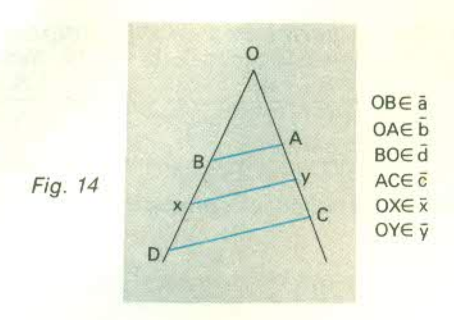


Fig. 14

Para ello basta (*fig.* 14) trazar los segmentos *b* y *d* uno a continuación del otro, así como los *a* y *b*. El resultado es claro en la *fig.* 15.

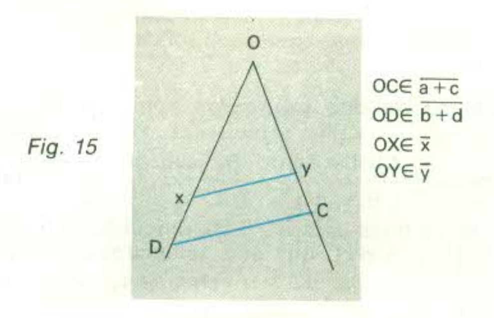


Fig. 15

Semejanza. — *Triángulos en posición de Tales.* — Sea un triángulo ABC, y tracemos en él una paralela al lado AC. Se obtiene de esta forma el triángulo A′BC′ (*fig.* 16), que verifica :

$$\begin{cases} \widehat{A} = \widehat{A}' \\ \widehat{C} = \widehat{C}' \end{cases}\text{. Por correspondientes entre paralelas.}$$
$\widehat{B}$ común a ambos triángulos.

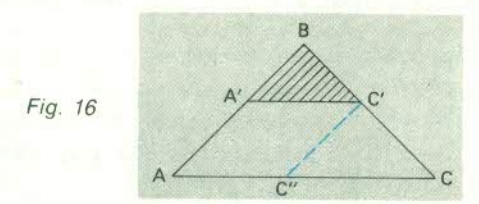


Fig. 16

Además, según lo estudiado en los párrafos anteriores (teorema de Tales), se verifica : $\frac{BA}{BA'} = \frac{BC}{BC'}$. **[1]**

Además, si trazamos por C′ una paralela al lado AB, nos encontramos con otras dos semirrectas CB y CA, cortadas por paralelas AB, C′C″, y por lo tanto se cumplen las siguientes relaciones :

$$\frac{C'B}{CB} = \frac{C''A}{CA} \iff \frac{BC'}{BC} = \frac{A'C'}{AC} \iff \frac{BC}{BC'} = \frac{AC}{A'C'}. \quad [2]$$

Ahora bien, de [1] se deduce que $\frac{BA}{BA'} = \frac{BC}{BC'}$; reuniendo [1] y [2], queda finalmente : $\frac{BA}{BA'} = \frac{BC}{BC'} = \frac{AC}{A'C'}$.

O, lo que es lo mismo, los lados homólogos de uno y otro triángulo son proporcionales.

Dos triángulos como los ABC *y* A′B′C′, *entre los que se puede establecer una correspondencia biunívoca que llamaremos* semejanza, *tal que : 1) los ángulos homólogos son iguales, y 2) los lados homólogos son proporcionales, reciben el nombre de* semejantes, *o también se dice que están* en posición de Tales.

Casos de semejanza. — Para demostrar que dos triángulos son semejantes, no es necesario comprobar la igualdad de los tres ángulos y la proporcionalidad entre los lados, sino que basta con que se cumplan algunas condiciones menos restrictivas, condiciones que denominaremos casos de semejanza de triángulos.

Primer caso : dos triángulos son semejantes si tienen dos ángulos de uno respectivamente iguales a dos ángulos del otro.

En efecto, sean (*fig.* 17) los triángulos ABC y A′B′C′, que verifican $\widehat{A} = \widehat{A}'$, $\widehat{B} = \widehat{B}'$.

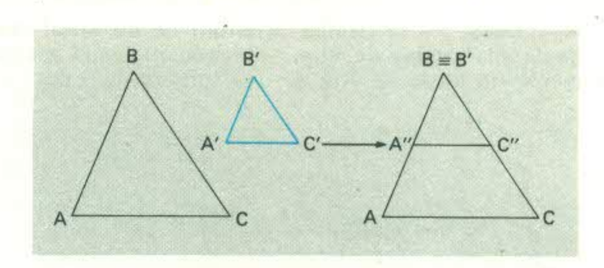


Fig. 17

Tomando sobre el lado AB un segmento igual a A′B′, y trazando una paralela a AC, encontramos C″. Los dos triángulos formados ABC y A″BC″ son semejantes por estar en posición de Tales. Además, el triángulo A″BC″ es igual al A′B′C′, pues se verifica :

$\widehat{B} = \widehat{B}'$ por hipótesis, $\widehat{A}' = \widehat{A}''$, por ser ambos iguales al $\widehat{A}$, y A′B′ = BA″ por construcción. Luego A′B′C′ es semejante a ABC.

Segundo caso : dos triángulos son semejantes si tienen dos lados de uno respectivamente proporcionales a dos lados de otro, y los ángulos comprendidos entre ellos también iguales.

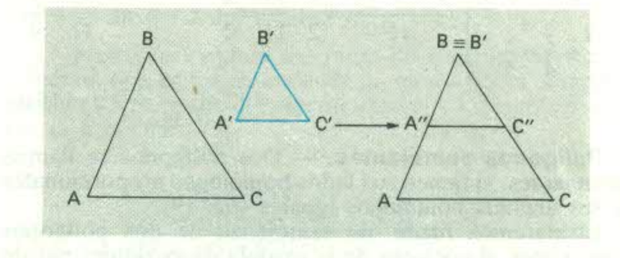


Fig. 18

Sean (*fig.* 18) los triángulos ABC y A′B′C′ que verifican : $\frac{BA}{B'A'} = \frac{BC}{B'C'}$, $\widehat{B} = \widehat{B}'$. Llevando sobre el vértice B de ABC el ángulo $\widehat{B}'$, y tomando sobre BA un segmento igual a B′A′, encontramos el punto A″. Trazando ahora la paralela por A″ a AC, encontramos C″, y los triángulos ABC y A″BC″ son semejantes, pues están en posición de Tales. El teorema quedará demostrado si vemos que los triángulos A′B′C′ y A″BC″ son iguales.

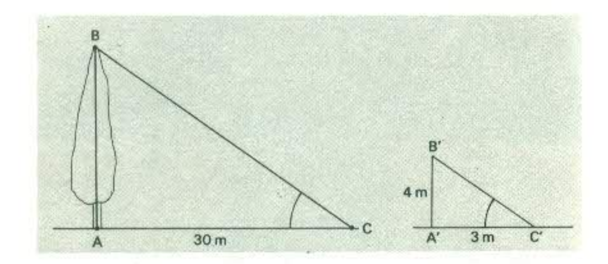
En efecto, se verifica que $B'A' = BA''$ por construcción, $\widehat{B'} = \widehat{B}$ por hipótesis, y $B'C' = BC''$, puesto que se verifican las siguientes relaciones : $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$, y por otra parte $\frac{AB}{A''B} = \frac{CB}{C''B} \Longrightarrow B'C' = BC''$. Por el primer caso de igualdad de triángulos, el teorema queda demostrado.

Tercer caso : dos triángulos son semejantes si tienen sus tres lados proporcionales.

Sabemos se verifica que $\frac{AC}{A'C'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$. **[3]**

Haciendo la misma construcción que anteriormente, se encuentra : $\frac{AB}{A''B} = \frac{BC}{BC''} = \frac{AC}{A''C''}$. Por hipótesis sabemos que $A'C' = A''C''$, $\Longrightarrow A'B = A''B$, y también que $B'C' = BC''$. Luego los triángulos $A'B'C'$ y $A''BC''$ son iguales, y por lo tanto los ABC y A'B'C' son semejantes.

PROBLEMAS. — 1.° Hallar la altura de un árbol que proyecta una sombra de 30 m, sabiendo que en el mismo momento un poste de 4 m da una sombra de 3 m.



Dado que la inclinación de los rayos del Sol es la misma para el árbol y para el poste, se deduce que los triángulos ABC y A'B'C' son semejantes, luego sus lados homólogos son proporcionales, pudiendo escribirse :

$$\frac{AC}{A'C'} = \frac{AB}{A'B'} \Longleftrightarrow \frac{30}{3} = \frac{x}{4};\ x = 40\,\text{m}.$$

2.° Hallar los lados de un triángulo de perímetro 33 m, sabiendo que es semejante a otro cuyos lados miden 2, 4 y 5 m.

Llamando x, y, z a los lados, sabemos :

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 33 \\ \frac{x}{2} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5} \end{array}\right\} \quad \frac{x+y+z}{11} = \frac{x}{2};\ \frac{33}{11} = \frac{x}{2};\ x = 6\ \text{m};\ \frac{33}{11} = \frac{y}{4};$$

$$y = 12\ \text{m};\ \frac{33}{11} = \frac{z}{5};\ z = 15\ \text{m}.$$

Polígonos semejantes. — Dos polígonos se llaman semejantes, si tienen sus lados homólogos proporcionales y sus ángulos homólogos iguales (*fig.* 19).

Llamaremos *razón* de semejanza de dos polígonos semejantes al cociente de la medida de cualquier par de sus lados homólogos : $\frac{C'D'}{CD} = k$.

Fig. 19

Razones. — *De los perímetros de dos polígonos semejantes.* — Sean los polígonos de la *fig.* 19. Sabemos se verifica : $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{EA}{E'A'} = \frac{AB + BC + CD + DE + EA}{A'B' + B'C' + C'D' + D'E' + E'A'}$ y concluimos : *la razón de los perímetros de dos polígonos semejantes es igual a la razón de semejanza.*

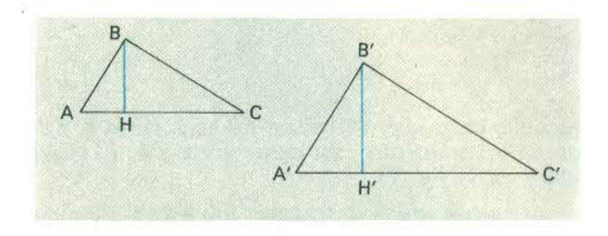


Fig. 20

De las alturas de dos triángulos semejantes. — Sean (*fig.* 20) ABC y A'B'C' semejantes. Por ser semejantes se verifica : $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = k$. **[4]**

Trazando las alturas BH y B'H', encontramos los triángulos ABH y A'B'H' que son semejantes, puesto que : $\widehat{A} = \widehat{A'}$, $\widehat{H} = \widehat{H'}$, $\widehat{B} = \widehat{B'}$.

Entonces se puede escribir $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BH}{B'H'}$, pero según [4] $\frac{AB}{A'B'} = k$, $\Longrightarrow \frac{BH}{B'H'} = k$. Concluyendo : *la razón de las alturas homólogas de dos triángulos semejantes es igual a la razón de semejanza.*

De las áreas de dos triángulos semejantes. — Supongamos dos triángulos semejantes ABC y A'B'C', de bases y alturas respectivas b y b', h y h'; entonces se verifica :

$$\left.\begin{array}{l} S = \text{área}_{ABC} = \frac{1}{2} b \cdot h \\ \\ S' = \text{área}_{A'B'C'} = \frac{1}{2} b' \cdot h' \end{array}\right| \quad \frac{S}{S'} = \frac{\frac{1}{2} b \cdot h}{\frac{1}{2} b' \cdot h'} = \frac{b}{b'} \cdot \frac{h}{h'} = k \cdot k = k^2.$$

La razón de las áreas de dos triángulos semejantes es igual al cuadrado de la razón de semejanza.

De la misma manera, podemos concluir para polígonos semejantes : *la razón de las áreas de dos polígonos semejantes es igual al cuadrado de la razón de semejanza.*

Relaciones métricas en el triángulo rectángulo

Proyecciones. — *De un punto sobre una recta.* — Dada una recta r y un punto O exterior a ella, se denomina *proyección* de O sobre r al pie de la perpendicular trazada desde O a r (*fig.* 21).

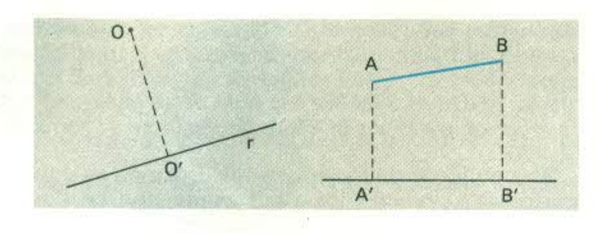


Fig. 21 *Fig. 22*

De un segmento sobre una recta. — Es el segmento cuyos extremos son las proyecciones de los extremos del segmento dado (*fig.* 22).

Altura correspondiente a la hipotenusa. — La altura correspondiente a la hipotenusa divide a un triángulo rectángulo en otros dos triángulos rectángulos, siendo los tres triángulos (los dos nuevos y el primitivo) semejantes.

En efecto (*fig.* 23), trazando AH, se encuentran los triángulos $\widehat{AHB}$ y AHC, que verifican : $\widehat{H}$ es recto, $\widehat{B} = \widehat{A}''$ y $\widehat{C} = \widehat{A}'$, por complementarios. Luego se cumple la proporcionalidad entre los lados : $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{BH}{AH} = \dfrac{AH}{HC}$ · **[5]**

Por otra parte, entre los triángulos ABH y ABC se verifica : $\widehat{B}$ es común, y ambos tienen un ángulo recto, luego son semejantes y se tendrá : $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{BH}{AB} = \dfrac{AH}{AC}$ · **[6]**

Igualmente, entre AHC y ABC : $\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{AH}{AB} = \dfrac{HC}{AC}$ · **[7]**

TEOREMA DE LA ALTURA. — De las relaciones [5] se deduce : $\dfrac{BH}{AH} = \dfrac{AH}{HC} \Longrightarrow \overline{AH}^2 = \overline{BH} \times \overline{HC}$ y *la altura correspondiente a la hipotenusa es media proporcional entre los dos segmentos en que descompone a ésta.*

TEOREMA DEL CATETO. — De [6] se deduce $\overline{AB}^2 = \overline{BH} \times \overline{BC}$, y de [7] que $\overline{AC}^2 = \overline{BC} \times \overline{HC}$, de lo que deducimos : *un cateto es media proporcional entre la hipotenusa y su proyección ortogonal sobre ésta.*

TEOREMA DE PITÁGORAS. — El teorema del cateto nos provee de las relaciones $\overline{AB}^2 = \overline{BH} \times \overline{BC}$, $\overline{AC}^2 = \overline{BC} \times \overline{HC}$, que sumadas dan : $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC} \times \overline{BH} + \overline{BC} \times \overline{HC} = \overline{BC} \times (\overline{BH} + \overline{HC}) = \overline{BC} \times \overline{BC} \iff \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$.

El cuadrado de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

PROBLEMAS. — 1.° En un triángulo rectángulo, la altura sobre la hipotenusa divide a ésta en dos partes que miden 2 y 14 m. Hallar las longitudes de la altura y de los dos catetos (*fig.* 23 *bis*) :

$$BC = 14 + 2 = 16 \text{ m.}$$

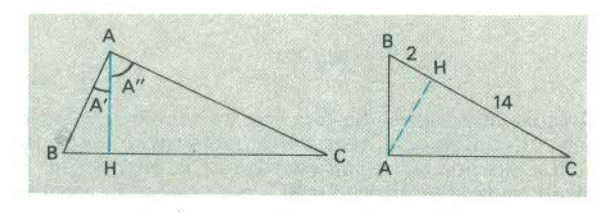


Fig. 23 *Fig. 23 bis*

Por el teorema de la altura, $\overline{AH}^2 = 14 \times 2 \Longrightarrow AH = \sqrt{28}$ m. Aplicando el teorema del cateto : $AB = \sqrt{16+2} = \sqrt{32}$ m :

$$AC = \sqrt{14 \times 16} = \sqrt{224} \text{ m.}$$

2.° Las longitudes de los catetos en un triángulo rectángulo son 3 y 4 m. Hallar la longitud de la altura y los segmentos en que ésta divide a la hipotenusa (*fig.* 24) :

$$\overline{BC} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5 \text{ m.}$$

Por el teorema del cateto, $3^2 = 5 \times \overline{BH}$; $\overline{BH} = \dfrac{9}{5}$ m, y también $4^2 = 5 \times \overline{HC}$; $\overline{HC} = \dfrac{16}{5}$ m.

Por el teorema de la altura,

$$\overline{AH} = \sqrt{\frac{9}{15} \times \frac{16}{5}} = \frac{12}{5\sqrt{3}} \text{ m.}$$

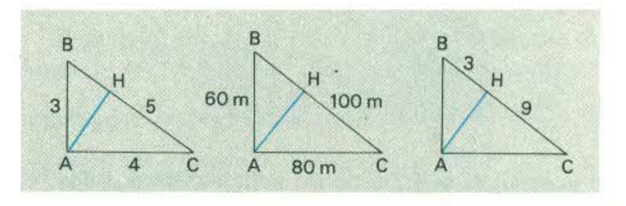


Fig. 24 *Fig. 25* *Fig. 26*

3.° En un triángulo rectángulo, la hipotenusa mide 100 m y un cateto 60 m. Hallar el otro cateto y la altura sobre la hipotenusa (*fig.* 25).

$\overline{AC} = \sqrt{100^2 - 40^2} = \sqrt{6\,400} = 80$ m.

$\overline{AB}^2 = 100 + \overline{BH}$; $\overline{BH} = \dfrac{3\,600}{100} = 36 \text{ m} \Longrightarrow \overline{HC} = 64$ m

$\overline{AH} = \sqrt{36 \times 64} = 6 \times 8 = 48$ m.

4.° Las proyecciones de los catetos de un triángulo rectángulo sobre la hipotenusa miden 3 y 9 m, respectivamente. Hallar la longitud de la altura correspondiente a la hipotenusa así como la de los catetos (*fig.* 26).

Por el teorema de la altura, $\overline{AH} = \sqrt{3 \times 9} = \sqrt{27}$ m.

Por el teorema del cateto, $\overline{AB} = \sqrt{12 \times 3} = 6$ m.

Por el teorema del cateto, $\overline{AC} = \sqrt{12 \times 9} = 6\sqrt{3}$ m.

5.° Hallar la longitud del radio de una circunferencia sabiendo que la distancia desde un punto A a la circunferencia es 5 m, y que la tangente desde A a la circunferencia es 6 m (*fig.* 27).

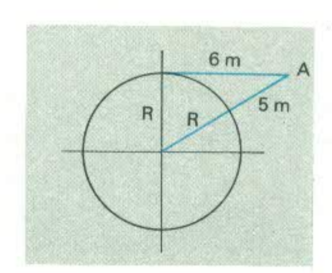


Fig. 27

Aplicando el teorema de Pitágoras, se tiene :

$(5 + R)^2 = R^2 + 36$; $25 + 10R + R^2 = R^2 + 36 \iff$

$10R = 11$; $R = \dfrac{11}{10}$ m.

Polígonos regulares

Un polígono regular es aquel que tiene todos sus lados y todos sus ángulos iguales.

Valor de los ángulos internos de un polígono. — Dado un polígono cualquiera, por ejemplo de cinco lados, ABCDE, se trata de hallar la suma de los ángulos interiores de dicho polígono. Trazando las diagonales EB y EC, se forman tres triángulos, la suma de cuyos ángulos es la suma buscada. Dado que la suma de los ángulos de un triángulo es de 180^0, en total la suma de los ángulos interiores de un pentágono será $3 \cdot 180 = 540^0$ (*fig.* 28).

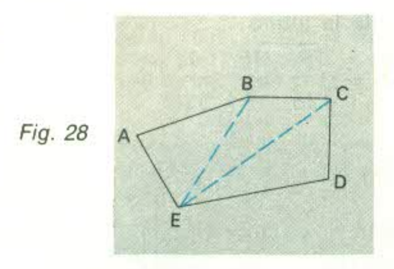


Fig. 28

En general, si se trata de un polígono de n lados, el número de triángulos que se pueden formar será $n-2$, y la suma de los ángulos interiores del polígono será $180 \cdot (n-2)$ grados $= 2(n-2)$ ángulos rectos.

En el caso de que se trate de un polígono regular, el valor de un ángulo de dicho polígono sería $\frac{2(n-2)}{n}$ rectos.

Ejemplo : hallar la suma de los ángulos interiores de un heptágono :

$$S = 2(n-2) = 2 \cdot 5 \text{ rectos} = 900^0.$$

Construcción de polígonos regulares. — Dado que conocemos la relación existente entre los ángulos centrales de una circunferencia y sus arcos correspondientes, así como la existente entre los arcos y las cuerdas por ellos subtendidas, el problema de construir un polígono regular de n lados queda reducido a dividir el ángulo total de una circunferencia en n partes iguales.

Ejemplo : si se trata de construir un hexágono regular, lo que haremos será dividir $360 : 6 = 60^0$, y construir seis ángulos centrales de 60^0 cada uno. Dichos ángulos cortan a la circunferencia en seis puntos, ABCDEF, puntos que unidos entre sí nos proporcionan la figura geométrica buscada (*fig.* 29).

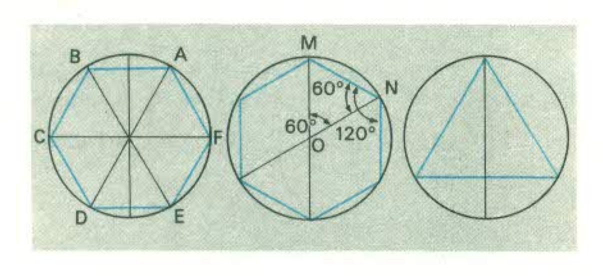


Fig. 29 Fig. 30 Fig. 31

Por otra parte, sabemos que los ángulos de un hexágono regular miden cada uno $\frac{180(6-2)}{6}$ grados $= 120^0$, luego los ángulos del triángulo OMN miden cada uno 60^0 y, por lo tanto, el triángulo es equilátero, lo que implica que los lados MN = MO = NO son iguales al radio de la circunferencia; podemos concluir : *el lado de un hexágono regular es igual al radio de la circunferencia en él circunscrita* (*fig.* 30).

Otro polígono de inmediata construcción es el triángulo equilátero. Uniendo los vértices de dos en dos en la *fig.* 29, encontramos dicho polígono (*fig.* 31).

Para construir un cuadrado y octógono regulares, basta trazar dos diámetros perpendiculares en una circunferencia, y hallar posteriormente las bisectrices de los ángulos rectos formados. (*Fig.* 32, 33 y 34.)

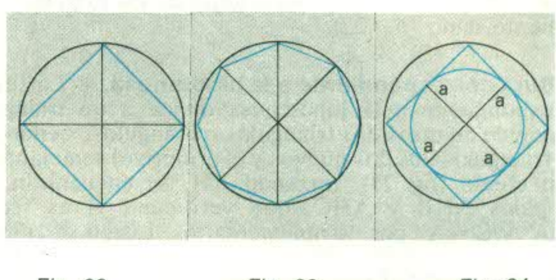


Fig. 32 Fig. 33 Fig. 34

DEFINICIONES. — Dado un polígono regular, las construcciones anteriores nos informan que la distancia desde el centro de la circunferencia, también centro del polígono, hasta cualquiera de los lados es la misma. A dicha distancia se le denomina *apotema* del polígono. Al ser esa distancia común a todos los lados del polígono, podemos considerarla como radio de una circunferencia que, con centro en O (*fig.* 34), es tangente a cada uno de los lados del polígono en su punto medio. Dicha circunferencia se llama *circunferencia inscrita* al polígono.

Ángulos en la circunferencia

Ángulo exterior de un triángulo. — Dado un triángulo ABC, se denomina *ángulo exterior* a un ángulo, por ejemplo al $\hat{A}$, al ángulo $\hat{D}$, uno de cuyos lados es un lado de $\hat{A}$ y el otro la prolongación del otro lado.

Como podemos observar $\hat{A} + \hat{D} = 180^0$. Por otra parte, $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^0$. De las dos igualdades anteriores, se deduce que $\hat{B} + \hat{C} = \hat{D}$, y escribiremos : *un ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de los otros dos interiores que no le son adyacentes* (*fig.* 35).

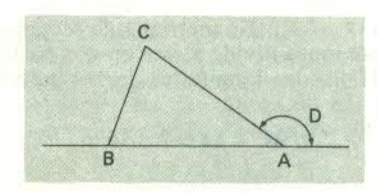


Fig. 35

Ángulo inscrito. — Se dice que un ángulo está *inscrito* en una circunferencia, si su vértice está sobre la circunferencia y sus dos lados son cuerdas de la misma (*fig.* 36).

Dado un ángulo inscrito ABC, para hallar su amplitud, tracemos el radio BO. El triángulo formado ABO es isósceles, pues OA = OB, luego $\hat{A} = \hat{B}$; dado que hemos

trazado $\widehat{O}$ recto, entonces, $\widehat{A}+\widehat{B}=90^0$; por otra parte, $\widehat{BOC}=90$, luego $\widehat{A}+\widehat{B}=\widehat{BOC}$; como $\widehat{BOC}$ es central, entonces $\widehat{BOC}=\widehat{BC}$ y se verifica $\widehat{A}+\widehat{B}=\widehat{BC}$, $\widehat{A}=\frac{\widehat{BC}}{2}$. O sea, *la amplitud del ángulo inscrito es la mitad del arco que abarcan sus lados.* En el ejemplo anterior, hemos trazado ABC de tal manera que el arco abarcado por sus lados es de 90^0, pero se puede demostrar también de manera fácil que cualquiera que sea el arco abarcado, se verifica que la amplitud de un ángulo inscrito es la mitad del arco que abarcan sus lados.

Ángulo semiinscrito. — Se denomina *ángulo semiinscrito* a un ángulo uno de cuyos lados es secante a la circunferencia, el otro es tangente a la misma y el vértice está sobre ella (*fig.* 37).

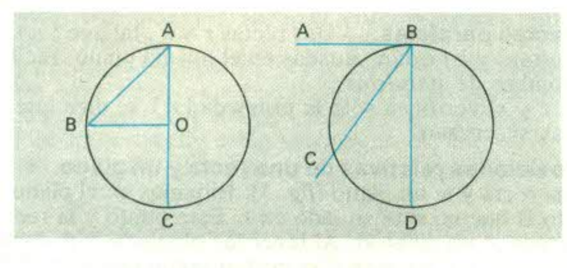


Fig. 36 *Fig. 37*

Para hallar su amplitud, consideremos a dicho ángulo $\widehat{ABC}$ como diferencia entre los ángulos $\widehat{ABD}$ y $\widehat{BCD}$.

La construcción del diámetro BD es tal que AB es perpendicular a BD, por lo tanto, $\widehat{ABD}=90$; pero el arco subtendido por $\widehat{ABD}$ es 180^0, luego $\widehat{ABD}=\frac{\widehat{BD}}{2}$.

Por otra parte, $\widehat{BCD}$ es inscrito, luego $BCD=\frac{\widehat{CD}}{2}$.

Restando queda :

$$\widehat{ABC}=\widehat{ABD}-\widehat{BCD}=\frac{\widehat{BD}}{2}-\frac{\widehat{CD}}{2}=\frac{\widehat{BC}}{2}.$$

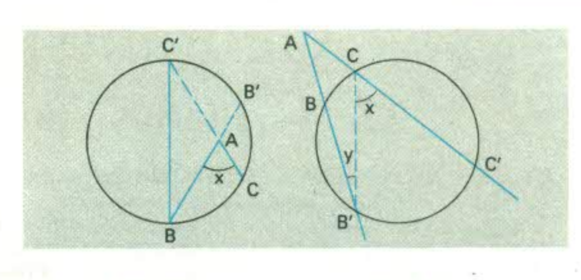


Fig. 38 *Fig. 39*

La amplitud de un ángulo semiinscrito es la mitad del arco comprendido entre sus lados.

Ángulo interior. — El *ángulo interior* de una circunferencia es aquel cuyo vértice es un punto del círculo correspondiente a la circunferencia (*fig.* 38).

Para hallar su amplitud, prolonguemos los lados hasta encontrar los puntos B' y C' sobre la circunferencia.

El ángulo interior $\widehat{x}$ es exterior al triángulo ABC', luego $\widehat{x}=\widehat{C}'+\widehat{B}$; dado que $\widehat{B}$ y $\widehat{C}'$ son inscritos, sus amplitudes respectivas serán $\widehat{C}'=\frac{\widehat{BC}}{2}$, $\widehat{B}=\frac{\widehat{C'B'}}{2}$. Sustituyendo los valores encontrados, se tiene :

$x=\frac{\widehat{BC}+\widehat{B'C'}}{2}$, y concluimos : *la amplitud de un ángulo interior es igual a la semisuma de los arcos comprendidos entre sus lados y las prolongaciones de éstos.*

Ángulo exterior. — El *ángulo exterior* a una circunferencia es aquel cuyo vértice es un punto del plano exterior al círculo correspondiente a la circunferencia, y cuyos lados son secantes o tangentes a la misma (*fig.* 39).

Trazando el segmento CB', observamos que $\widehat{x}$ es exterior al triángulo AB'C, luego $\widehat{x}=\widehat{y}+\widehat{A}$.

Pero $\widehat{x}$ e $\widehat{y}$ son inscritos, y sus amplitudes son : $\widehat{x}=\frac{\widehat{B'C'}}{2}$, $\widehat{y}=\frac{\widehat{BC}}{2}$, luego $\widehat{A}=\widehat{x}-\widehat{y}=\frac{\widehat{B'C'}}{2}-\frac{\widehat{BC}}{2}$, concluyendo : *la medida de un ángulo exterior es igual a la circunferencia de los arcos comprendidos entre sus lados.*



Geometría del espacio

22. — Planos, poliedros, conos y esferas

Planos y rectas paralelas : Plano. Rectas paralelas. Posiciones relativas de una recta y un plano. Planos paralelos. Posiciones relativas de dos planos. — **Rectas y planos perpendiculares :** Ángulos de dos semirrectas y de dos rectas. Rectas perpendiculares. Recta y plano perpendiculares. Distancias. *De un punto a un plano. Entre dos planos paralelos. De un punto a una recta.* Teorema de las tres perpendiculares. Diedro. Ángulo plano de un diedro. Medida de un diedro. — **Poliedros, cilindro, cono y esfera :** Ángulo poliedro. Poliedros. *Pirámide. Tetraedro. Prisma. Paralelepípedo.* Cilindro. Cono. Esfera. *Plano tangente a la esfera.* — **Áreas de las superficies de revolución :** Áreas laterales. *De una pirámide regular. De un cono de revolución. De un tronco de cono de revolución. De un cilindro de revolución.* Área engendrada por una recta que gira alrededor de un eje. Área de la zona. Área de la superficie esférica. — **Volumen de los poliedros y cuerpos redondos :** Volumen del paralelepípedo rectángulo. Volúmenes del parelelepípedo y del prisma. Volumen de un cilindro. Volumen de un cono. Volumen de la esfera.

Planos y rectas paralelas

Plano. — Un *plano* es una superficie tal que cualquier recta A B, que tenga con ella dos puntos comunes, está toda ella contenida en la superficie.

Admitiremos sin demostración las siguientes propiedades :

1) El plano es ilimitado.

2) Un plano divide al espacio en dos regiones llamadas semiespacios.

3) Toda recta que une dos puntos situados a una parte y otra del plano corta necesariamente al plano en un punto y sólo uno.

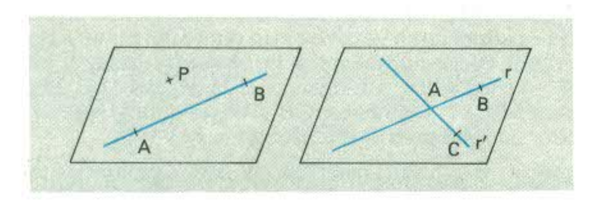


Fig. 1 Fig. 2

4) Por tres puntos no situados en línea recta pasa solamente un plano.

Determinación del plano. — Un plano queda determinado por :

1) Tres puntos no situados en línea recta.

2) Una recta r y un punto P exterior a ella, siendo ese plano único. En efecto, sean A y B dos puntos de r. El plano ABP contiene a la recta r, por definición de plano, y al punto P. Además, dicho plano, por 4), es único (*fig.* 1).

3) Dos rectas que se cortan r y r', siendo ese plano único. En efecto, sean A, B $\in r$, A, C $\in r'$, el plano ABC contiene a r y r' y además es único (*fig.* 2).

Rectas paralelas. — Dos rectas r y r', tal que : *a*) no se cortan, y *b*) están situadas en el mismo plano, reciben el nombre de *paralelas*.

Si r y r' verifican sólo la propiedad *a*) se dice que las rectas se cruzan.

Posiciones relativas de una recta y un plano. — Sea r una recta y α un plano (*fig.* 3). Elijamos en el plano un punto B que no esté situado en r. Este punto y la recta r determinan un plano β. Al tener los planos α y β común el punto B, o coinciden o se cortan según una recta B C : *a*) si α y β coinciden, la recta r del plano β estará contenida en el plano α, y *b*) si α y β son secantes, las rectas BC y r situadas en un mismo plano β se cortan o son paralelas.

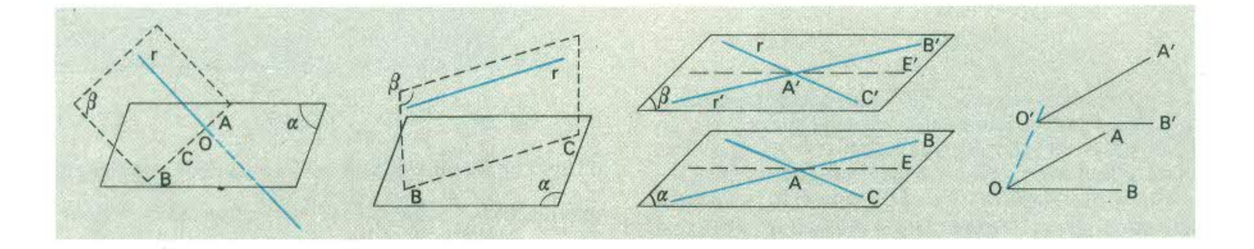
Si se cortan (*fig.* 3) en un punto A, la recta r atraviesa al plano α en ese punto A, que es el único punto común a recta y plano. Si son paralelas (*fig.* 4), la recta r no tiene ningún punto común con el plano α, y por tanto recta y plano son paralelos.

Se dice que una recta r *es paralela a un plano* α *o que un plano* α *es paralelo a una recta* r, *cuando recta y plano no tienen ningún punto común.* De las construcciones anteriores se deduce : *a*) que existen rectas paralelas a un plano dado α ; *b*) que toda recta r paralela a otra B C, contenida en el plano α, es paralela a dicho plano; *c*) que todo plano que pase por la recta r paralela al plano α, y por un punto B del mismo plano, corta al plano α según una recta paralela a la recta r, y *d*) que la recta BC, paralela a la recta r, que a su vez es paralela al plano α, trazada por un punto B del plano α, está contenida en el plano α.

Planos paralelos. — Dos planos α y β son paralelos, cuando no tienen ningún punto común.

Dado un plano α, α cualquiera, para construir otro plano β paralelo a α basta construir dos rectas r y r' que se corten y sean paralelas a α. El plano β determinado por r y r' es paralelo a α.

Fig. 3 Fig. 4 Fig. 5 Fig. 6



En efecto, observemos en primer lugar, que es posible trazar en el plano α dos rectas secantes AB, AC (*fig.* 5); las paralelas a estas dos rectas r y r' trazadas por un punto A′ exterior al plano α, también se cortan y son paralelas al plano α. Luego determinan un plano β.

Los planos α y β no tienen ningún punto común. Si tuviesen uno, se cortarían según una recta R, que al estar situada en el plano β, cortaría r, r' o a las dos. Supongamos que esa recta corta R en un punto B′. Este punto B′ situado en R, intersección de los planos α y β, estaría por consiguiente en el plano α; ahora bien, la recta r, paralela al plano α, no tiene ningún punto B′ situado en dicho plano. Luego los planos α y β no tienen ningún punto común.

Posiciones relativas de dos planos. — Sean α y β dos planos dados. Sean r y r' dos rectas concurrentes trazadas en el plano β.

1) Si ninguna de estas dos rectas corta al plano α, los planos α y β no tienen, según el teorema anterior, ningún punto en común.

2) Si una de esas rectas, por lo menos, corta al plano α en un sólo punto, los planos α y β tienen un punto común. Se dice que los dos planos son secantes.

3) Si las dos rectas están situadas en el plano α, los dos planos coinciden (*fig.* 5).

Rectas y planos perpendiculares

Ángulos de dos semirrectas y de dos rectas. — Dos semirrectas OA y OA′, paralelas, son del mismo sentido cuando están en un mismo semiplano de los limitados por OO′ (*fig.* 6).

Dadas dos semirrectas no concurrentes, se llama *ángulo de dichas semirrectas* a uno de los ángulos que forman otras dos semirrectas paralelas del mismo sentido que las anteriores, trazadas por un mismo punto. Por ejemplo (*fig.* 6), el ángulo de OA y O′B es el mismo que el ángulo formado por OA y OB′, donde OB′ y OA tienen común el punto O.

Se llama *ángulo de dos rectas* a uno cualquiera de los ángulos que forman dos semirrectas paralelas a aquéllas. Considerando únicamente los ángulos convexos formados por las semirrectas, es claro que el ángulo de dos rectas puede valer únicamente uno de los números α o $\pi - \alpha$.

Rectas perpendiculares. — Dos rectas se dicen que son *perpendiculares*, cuando se cortan según un ángulo recto. Si una recta r es perpendicular a otra r', es perpendicular a toda recta R paralela a r'.

TEOREMA. — Si una recta r es perpendicular, en un punto A de un plano α, a dos rectas AC y AE de dicho plano, que pasan por el punto A, es perpendicular a todas las rectas del plano que pasan por A (*fig.* 7).

Recta y plano perpendiculares. — El lugar geométrico de las rectas perpendiculares, en un punto A, a una recta r que pasa por A, es un plano único α (*fig.* 7).

También diremos que el plano α es perpendicular a la recta r en el punto A, o que la recta r es perpendicular al plano α en el punto A, que se denomina pie de la perpendicular. Con las anteriores definiciones se tiene :

1) Existe un plano y sólo uno perpendicular en A a una recta r.

2) Existe una recta y sólo una perpendicular a un plano α, en un punto O de dicho plano.

3) Toda recta perpendicular en un punto A de un plano a dos rectas distintas de ese plano, que pasen por A, es perpendicular a dicho plano.

Distancias. — *De un punto a un plano.* — Sea un plano P y un punto A exterior a él; tracemos la perpendicular de A a P, que corta a P en un punto H.

Se denomina distancia de A a P a la distancia existente desde A a H.

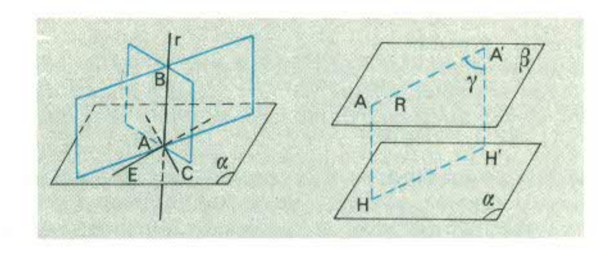


Fig. 7 *Fig. 8*

Entre dos planos paralelos. — Sean α y β dos planos paralelos (*fig.* 8), A y A′ dos puntos del plano β, H y H′ los pies de las perpendiculares trazadas desde A y A′ al plano α. Las rectas AH y A′H′, perpendiculares a un mismo plano α, son paralelas y, por tanto, estarán situadas en un mismo plano α. El plano α corta a los planos paralelos α y β según las rectas A A′ y H H′ paralelas. El cuadrilátero AA′H′H es una figura plana, convexa, cuyos lados son paralelos dos a dos; por consiguiente es un paralelogramo y AH = A′H′.

La distancia de un punto cualquiera de un plano β *a un plano* α *paralelo a* β *es una constante que se llama distancia entre dos planos paralelos.*

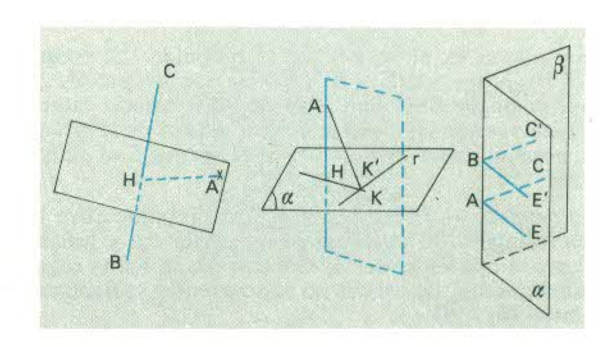
De un punto a una recta. — Una recta r y un punto A exterior a ella determinan un plano. En geometría plana, se ha definido lo que se entiende por perpendicular AH trazada por A a r y por distancia AH. Estas definiciones son válidas en el espacio (*fig.* 9).

Teorema de las tres perpendiculares. — *La perpendicular* AH *trazada al plano* β *por el punto* A *exterior a dicho plano, la perpendicular* HK *trazada por el pie* H *de* AH *sobre una recta* r *del plano* β, *y la perpendicular* AK′ *trazada desde el punto* A *sobre la recta* r, *están en un mismo plano* (*fig.* 10).

Diedro. — Recibe el nombre de *semiplano* la porción de plano situada a un mismo lado de una recta AB de dicho plano.

Se llama *diedro* AB a una de las dos porciones del espacio comprendidas entre dos semiplanos limitados por una misma recta AB. La recta AB se llama *arista* del diedro. Los semiplanos que limitan el diedro se denominan *caras* del diedro (*fig.* 11).

Fig. 9 *Fig. 10* *Fig. 11*



Ángulo plano de un diedro. — Sea AB la arista de un diedro formado por dos semiplanos α y β; el plano perpendicular en el punto A a la arista corta a los semiplanos α y β según las semirrectas AC y AE que son, a su vez, perpendiculares en A a la arista AB. Estas dos semirrectas determinan en dicho plano dos ángulos. Los puntos de uno de estos dos ángulos, y sólo de uno de ellos, están situados en el diedro AB. A este ángulo se le llama *ángulo plano* del diedro en el punto A. Es inmediato demostrar el siguiente teorema : *los ángulos planos de un diedro en los diferentes puntos de su arista son iguales* (*fig.* 11).

Medida de un diedro. — Si se toma como unidad, para medida de diedros, el diedro cuyo ángulo plano se tome como unidad de ángulos, la medida de un diedro es la misma que la de su ángulo plano.

Poliedros, cilindro, cono y esfera

Ángulo poliedro. — *Ángulo poliedro* es la figura formada por tres o más semirrectas concurrentes enunciadas en un cierto orden OA, OB, OC,... El punto común O es el *vértice*; las semirrectas OA, OB,... son las *aristas*. Los ángulos AOB, AOC,... formados por dos aristas consecutivas son las *caras*. Los diedros formados por los semiplanos que se cortan según una arista son los diedros del ángulo poliedro (*fig.* 12).

Se dice que un ángulo poliedro es convexo, si la figura que forma está situada toda ella a un mismo lado del plano de cada una de las caras.

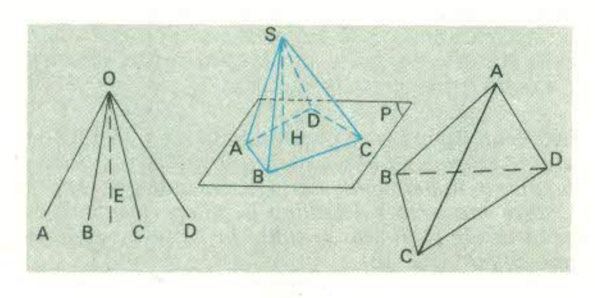


Fig. 12 *Fig. 13* *Fig. 14*

Poliedros. — *Poliedro* es la superficie o el volumen determinados por planos que se cortan. Las porciones de plano que limitan el volumen son las *caras*, las rectas que limitan las caras son las *aristas*, y los puntos que limitan las aristas son los *vértices* del poliedro (*fig.* 12).

Pirámide. — Sea (*fig.* 13) ABCD un polígono situado en un plano P. Sea S un punto exterior a P. Se llama *pirámide* al poliedro cuyas aristas son, por una parte, las rectas SA, SB, SC, SD, y por otra los lados del polígono ABCD.

El punto S es el vértice de la pirámide. El polígono ABCD su base; SA, SB, SC, SD las aristas laterales; las caras, como la BSC limitadas por dos aristas laterales consecutivas son las caras laterales. *Altura* de la pirámide es la perpendicular trazada desde el vértice S al plano de la base.

Tetraedro. — El *tetraedro* es una pirámide cuya base es un triángulo. Si el triángulo es equilátero y todas las aristas son iguales entre sí, el tetraedro se llama regular. En un tetraedro, las aristas no concurrentes se denominan opuestas (*fig.* 14).

Prisma. — Sea ABCD (*fig.* 15) un polígono situado en un plano α. Una recta paralela a una dirección dada A A', que no sea paralela al plano α, al desplazarse apoyándose en los lados del polígono ABCD engendra una superficie constituida por porciones de planos paralelos a la recta A A', que se llama superficie prismática (*fig.* 15).

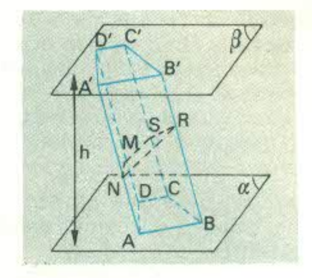


Fig. 15

Sean BB', CC' y DD' las paralelas a la dirección considerada AA', trazadas por los vértices B, C, D del polígono ABCD. Cortemos las cuatro rectas AA', BB', CC' y DD' por un plano β paralelo al plano α. Sean A', B', C', D' los puntos de intersección. Los segmentos AA', BB', CC', DD', determinados sobre estas rectas paralelas por los planos α y β, son iguales. Se llama *prisma* al volumen limitado por la superficie prismática AA'BB'CC'DD' y por los planos α y β a que pertenecen los polígonos ABCD y A'B'C'D'.

El prisma es un poliedro cuyas aristas laterales son los segmentos iguales y paralelos AA', BB', CC', DD' y cuyas caras laterales son los paralelogramos ABB'A', BCC'B', CDD'C' y DAA'D'. Las bases del prisma son los dos polígonos ABCD y A'B'C'D'.

La altura *h* de un prisma es la distancia entre los planos paralelos α y β, que contienen las bases del mismo. Se llama sección recta de un prisma el polígono MNRS obtenido al cortar las aristas laterales AA', BB', CC', DD' del prisma por un plano que les sea perpendicular.

Se dice que un prisma es recto cuando las aristas laterales son perpendiculares a las bases. Cuando no es recto, el prisma se llama oblicuo.

Paralelepípedo. — El *paralelepípedo* (*fig.* 16) es un prisma cuya base ABCD es un paralelogramo. Un paralelepípedo es un poliedro que tiene ocho vértices, doce aristas y seis caras. Las cuatro caras laterales son paralelogramos como en todos los prismas, por consiguiente, todas las caras de un paralelepípedo son paralelogramos. De dos caras cuyos planos son paralelos, se dice que son *opuestas* ; las aristas comunes a caras opuestas se llaman *aristas opuestas* ; los vértices comunes a las aristas opuestas se llaman *vértices opuestos* y las rectas que unen dos vértices opuestos son las *diagonales*.

Paralelepípedo recto es aquel cuyas aristas laterales son perpendiculares al plano de unas de las caras elegida como base. *Paralelepípedo rectángulo* es aquel que, siendo recto, su base es un rectángulo, y *cubo* es un paralelepípedo rectángulo cuyos lados son iguales. En consecuencia, todas las caras del cubo son cuadrados y todos los diedros son rectos, siendo sus aristas perpendiculares o paralelas.

TEOREMA. — *Todas las diagonales de un paralelepípedo se cortan en su punto medio.*

PROPIEDADES DEL CUBO. — Sea ABCDA'B'C'D' (*fig.* 17) un cubo. Supongamos $AB = a$. La diagonal AC de una cara es la hipotenusa del triángulo rectángulo ABC. Por tanto, se tiene : $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$, dado que AB = BC; $AC = a \cdot \sqrt{2}$.

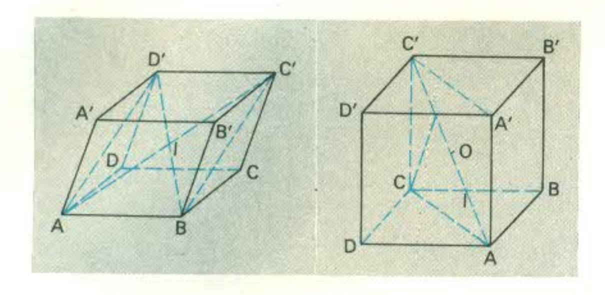


Fig. 16   Fig. 17

La diagonal AC′ del cubo es la hipotenusa del triángulo ACC′, rectángulo en C, puesto que CC′ es perpendicular al plano ABC; por consiguiente se verifica :

$$\overline{AC'}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CC'}^2 \text{ es decir } \overline{AC'} = a \cdot \sqrt{3}.$$

Por tanto, todas las diagonales del cubo son iguales.

Cilindro. — *Cilindro* o *superficie cilíndrica* es la superficie engendrada por una recta variable llamada *generatriz*, que se mueve paralelamente a una dirección fija y apoyándose en una curva Γ llamada *directriz*. La *base* del cilindro es la curva cerrada Γ que hemos llamado directriz. También podemos decir que un cilindro es el volumen limitado por una superficie cilíndrica y por dos planos paralelos α y β. Altura de un cilindro es la distancia entre dichos planos. Sección recta de un cilindro es toda sección producida por un plano que corte, perpendicularmente a todas las generatrices. Se dice que un cilindro es recto cuando sus bases son secciones rectas (*fig.* 18).

Cilindro de revolución es aquel cuya base es un círculo y cuyas generatrices son perpendiculares al plano del círculo. El radio de dicho círculo se llama también *radio del cilindro*.

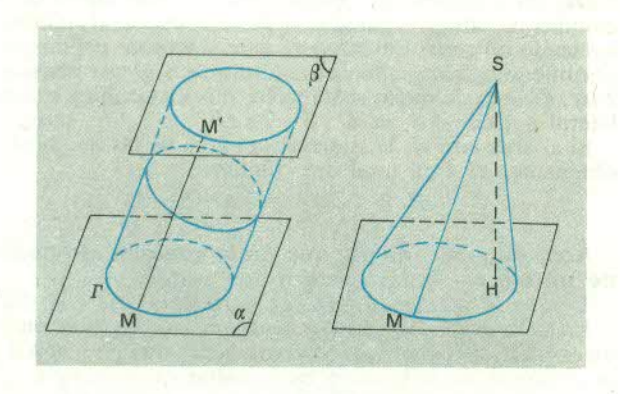


Fig. 18   Fig. 19

Cono. — *Cono* o *superficie cónica* es la superficie engendrada por una recta SM, llamada *generatriz*, que se mueve pasando por un punto fijo S, el *vértice*, y apoyándose en una curva fija o *directriz*. Si la directriz es una curva plana, ésta es la base del cono.

También se llama cono al volumen limitado por la superficie cónica y por el plano de la base. *Altura* del cono es la perpendicular SH trazada desde el vértice al plano de la base (*fig.* 19).

Se llama *cono de revolución* a aquel cuya base es un círculo y cuyo vértice S está en la perpendicular al plano de la base que pasa por el centro de la misma.

Esfera. — DEFINICIONES. — Se llama *superficie esférica* al lugar geométrico de los puntos del espacio que están a una distancia dada R, llamada *radio*, de un punto fijo O llamado *centro*. La *esfera* es el volumen limitado por una superficie esférica.

Se dice que un punto M es interior a la esfera, si OM es menor que R y M es exterior a la esfera si OM > R.

Se llama *diámetro* toda recta que pasa por el centro O de la esfera, y *plano diametral* todo plano que pase por dicho centro. Un diámetro corta a la superficie esférica en dos puntos A y B. Un plano diametral corta a dicha superficie según una infinidad de puntos M que verifican que OM = R. Luego estos puntos estarán en una circunferencia de centro O y radio R; el círculo correspondiente se denomina *círculo máximo* de la esfera (*fig.* 20).

Plano tangente a la esfera. — TEOREMA. — Las tangentes AT a las curvas trazadas a la superficie de una esfera S, que pasan por un punto A de ella, y que admiten una tangente en dicho punto, están en el plano perpendicular al radio OA en el punto A. Este plano se llama plano tangente a la esfera en el punto A (*fig.* 21).

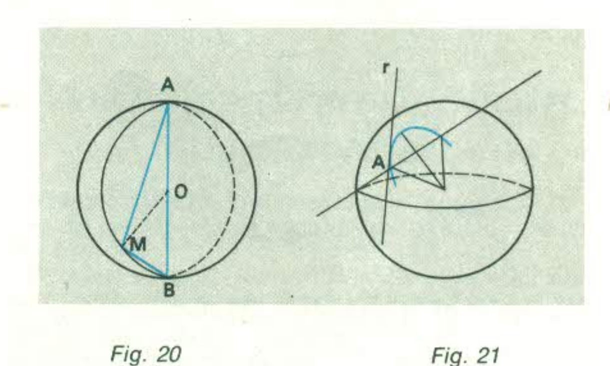


Fig. 20   Fig. 21

Áreas de las superficies de revolución

Áreas laterales. — *De una pirámide regular.* — *Pirámide regular* es aquella cuya base es un polígono regular convexo inscrito en una circunferencia de radio R, y cuyo vértice S es un punto del eje del círculo.

Apotema de una pirámide regular es la perpendicular SH trazada desde el vértice S a uno cualquiera de los lados del polígono que constituye la base de la pirámide.

Área lateral de la pirámide es la suma de las áreas de los triángulos que constituyen sus caras laterales (*fig.* 22).

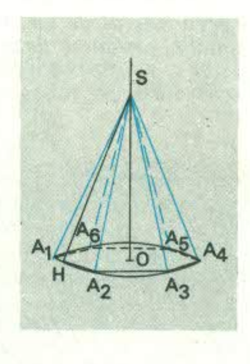


Fig. 22

TEOREMA. — *El área lateral de una pirámide regular es igual al semiproducto de la apotema por el perímetro de la base.*

Al ser cada uno de los triángulos $A_{i-1}SA_i$ iguales, el área lateral será n veces el área de uno de estos triángulos, por ejemplo el A_1SA_2. Área $A_1SA_2 = \frac{1}{2} \cdot SH \cdot A_1A_2$; en consecuencia, el área lateral será :

$$S = \frac{1}{2} \cdot SH \cdot A_1A_2 \cdot n.$$

Pero $A_1A_2 \cdot n$ es el perímetro de la base de la pirámide, luego el teorema queda demostrado (*fig.* 22).

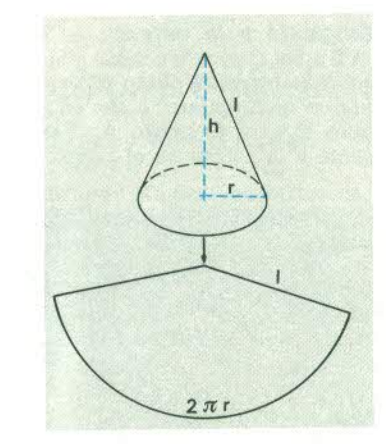


Fig. 23

De un cono de revolución. — Dado un cono (*fig.* 23) de altura h, radio r, y generatriz l, para hallar su área lateral lo desarrollamos según una de sus generatrices, obteniendo de esta forma un triángulo curvilíneo (*fig.* 24).

El área de dicho triángulo es : $S = \frac{1}{2} b \cdot a$, pero $b = 2\pi r$ y $a = \ell$, $S = \frac{1}{2} 2\pi r \cdot \ell = \pi \cdot r \cdot \ell$.

Si al área lateral le sumamos el área del círculo de la base, se obtiene el área total del cono : $S = \pi \cdot r \cdot \ell + \pi r^2 = \pi r (\ell + r)$.

De un tronco de cono de revolución. — Se llama *tronco de cono* la parte de cono comprendida entre la base O y una sección O′ producida en el cono por un plano paralelo a esta base. Esta sección se llama base menor del tronco de cono. Altura del tronco de cono es la distancia entre los planos de las dos bases. Apotema del tronco de cono es la parte AB de una arista del cono comprendida entre los planos de las dos bases (*fig.* 24).

TEOREMA. — *El área lateral de un tronco de cono de bases paralelas es igual al producto de la semisuma de las longitudes de las circunferencias de las bases por su apotema.*

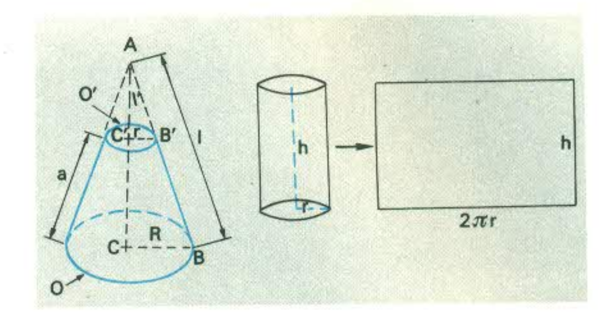


Fig. 24 Fig. 25

Un tronco de cono recto es la figura geométrica originada al seccionar un cono por un plano paralelo a su base.

Su área lateral la vamos a calcular como diferencia de las áreas laterales de los conos de radios R y r, respectivamente. $S_\ell = S_R - S_r = \pi \cdot R \cdot \ell - \pi \cdot r \cdot \ell$ (*fig.* 24).

De los triángulos ABC y A′B′C′, se deduce :

$$\frac{R}{r} = \frac{\ell}{\ell'} \iff \frac{r}{\ell'} = \frac{R}{\ell} = \frac{R-r}{\ell-\ell'} = \frac{R-r}{a}; \quad \ell = \frac{Ra}{R-r}$$

de la misma forma se obtiene $\ell' = \frac{ra}{R-r}$. Sustituyendo estos valores en la fórmula $S_\ell = \pi R\ell - \pi r \ell'$, se tiene $S_\ell = \pi R \cdot \frac{Ra}{R-r} - \frac{\pi r \cdot ra}{R-r} = \frac{\pi a (R^2 - r^2)}{R-r} = \pi a (R + r)$, o sea, $S_\ell = \pi \cdot a (R + r)$.

Si al área lateral le sumamos el área de las bases, obtenemos el área total del tronco de cono $S_T = \pi a (R + r) + \pi R^2 + \pi r^2$.

De un cilindro de revolución. — Sea (*fig.* 25) un cilindro de altura h y radio r. Desarrollando el cilindro, haciendo un corte a lo largo de una generatriz del mismo, se obtiene un rectángulo cuya altura es h, y cuya base es $2\pi r$. El área de dicho rectángulo, que es también el área lateral del cilindro, será : $S = 2\pi rh$.

Si al área lateral, le sumamos el área de las dos bases, obtenemos el área total del cilindro :

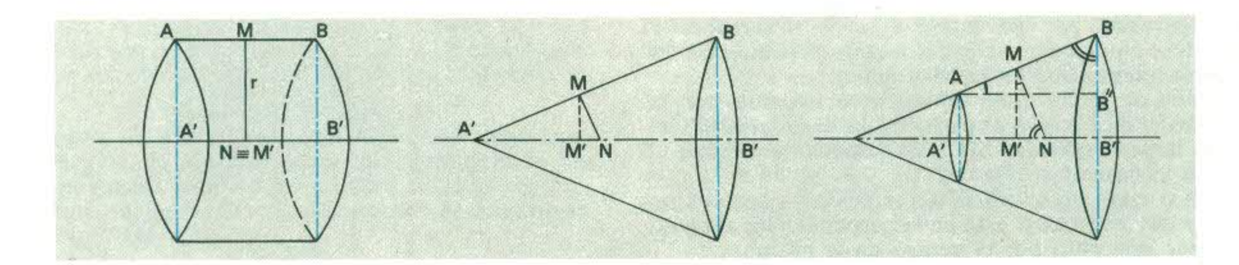
$$S = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r (h + r).$$

Área engendrada por una recta que gira alrededor de un eje. — Pueden ocurrir dos casos :

1) Que la recta que gira sea paralela al eje (*fig.* 26). En este caso, la figura engendrada por la rotación es una superficie cilíndrica. Si el segmento que gira es AB y la distancia hasta la recta es r, entonces se tiene :

$$S = 2\pi r \cdot AB = 2\pi r \cdot A'B' = 2\pi\, MN \cdot A'B'.$$

Fig. 26 Fig. 27 Fig. 28



2) Que la recta que gira no sea paralela al eje de rotación.

En este caso, hemos de hacer dos subdivisiones :

a) Un extremo del segmento que gira, AB, corta al eje de rotación (*fig.* 27). La figura engendrada es un cono, cuya área lateral es $S = \pi r \cdot AB$. Si trazamos la mediatriz de AB, ésta corta al eje en el punto N, formándose dos triángulos el MM'N y el ABB', que son semejantes, verificándose : $\frac{MM'}{AB'} = \frac{MN}{AB} = \frac{M'N}{BB'}$; ahora bien, $MM' = \frac{r}{2}$, con lo cual queda : $\frac{\frac{r}{2}}{AB'} = \frac{MN}{AB}$; y desarrollando $r \cdot AB = 2\,MN \cdot AB' = 2\,MN \cdot A'B'$, y, finalmente : $S = \pi r \cdot AB = 2\pi\, A'B' \cdot MN$.

b) Ni A ni B pertenecen al eje de rotación. En este caso, el área engendrada es un tronco de cono (*fig.* 28), cuya área, como sabemos, es : $S = \pi a\,(R + r)$, donde $a = AB$, $R = BB'$, $r = AA'$; $S = \pi \cdot AB\,(R + r)$.

Si trazamos la paralela AB" al eje de rotación, se forman dos triángulos semejantes, el ABB" y el MM'N, que verifican : $\frac{MN}{AB} = \frac{MM'}{A'B'}$; dado que $MM' = \frac{R + r}{2}$, queda : $\frac{MN}{AB} = \frac{\frac{R + r}{2}}{A'B'}$; $(R + r) \cdot AB = 2 \cdot MN \cdot A'B'$. Sustituyendo estos valores en la fórmula del área, tenemos definitivamente $S = 2\pi\, MN \cdot A'B'$. En los tres casos anteriores, la fórmula que nos ha dado el área ha sido la misma, por lo que concluimos : *el área engendrada por un segmento de recta al girar alrededor de un eje que no lo atraviesa, y coplanario con el segmento, es igual al producto de la proyección ortogonal del segmento sobre el eje por la longitud de una circunferencia cuyo radio es el segmento que une el punto medio del segmento que gira con el eje.*

Área de la zona. — Se llama *zona esférica* la porción de superficie esférica comprendida entre dos planos paralelos. Los dos planos paralelos cortan a la superficie esférica según dos circunferencias llamadas *bases* de la zona. La distancia entre estos dos planos es la altura *h* de la zona (*fig.* 29).

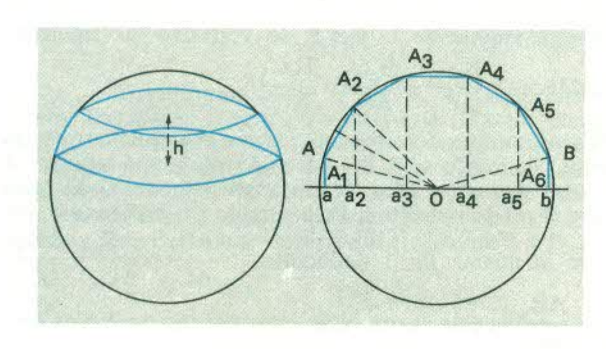


Fig. 29 *Fig. 30*

Sea AB un arco de la circunferencia (*fig.* 30) de radio *r*, y α uno de sus diámetros que no corte al arco AB. Sea θ el ángulo central correspondiente al arco AB. Inscribamos en la circunferencia un polígono regular, de forma que su primer vértice A_1 coincida con el punto A, que el segundo A_2 esté situado en el arco AB, y que el ángulo $\widehat{A_2 O A_1} = \frac{\theta}{n}$. El vértice $(n + 1)$ de dicho polígono coincidirá con el punto B. Al girar alrededor de la recta α, la línea quebrada $A_1 A_2 \ldots A_n$ B engendrará una superficie S. Llamando a_1, $a_2, \ldots$ a las proyecciones ortogonales de los vértices $A_1, A_2, \ldots$ sobre la recta α, *a* y *b* las de los puntos A y B, el área engendrada por dicha línea poligonal será la suma de las áreas engendradas por cada uno de los segmentos $A_i\,A_{i+1}$; $S = 2\pi \cdot OH\,(a_1 a_2 + a_2 a_3 + \ldots)$. Pero la suma $a_1 a_2 + a_2 a_3 + \ldots$ es igual a ab y, por consiguiente, $S = 2\pi \cdot OH \cdot ab$.

Cuando *n* aumenta indefinidamente, el punto H (punto medio de A_1A_2) tiende a confundirse con el punto fijo A, con lo cual el área S tiende hacia un límite cuyo valor es $2\pi \cdot r \cdot AB$ y concluimos : *el área de una zona es igual al producto de la longitud de una circunferencia máxima de la esfera por la altura de la zona.*

Área de la superficie esférica. — La superficie esférica puede considerarse como una zona cuya altura es 2R. Por consiguiente, el área de dicha superficie será : $S = 4\pi \cdot R^2$.

Se llama *huso esférico* la porción de superficie esférica comprendida entre dos semiplanos diametrales. Si θ es la medida en radianes del ángulo plano correspondiente al diedro formado por estos semiplanos, el área del huso esférico es $2\theta\, R^2$.

Volumen de los poliedros y cuerpos redondos

Volumen del paralelepípedo rectángulo. — El volumen del paralelepípedo rectángulo es igual al producto de sus tres lados.

En efecto (*fig.* 31), considerando que los volúmenes de los paralelepípedos que tienen la misma base y altura son iguales, y que el volumen de un paralelepípedo de altura AC, AC = AB + BC es igual a la suma de los volúmenes de los paralelepípedos de altura AB y BC, esto basta para deducir que el volumen del paralelepípedo correspondiente a la altura AB es una magnitud homóloga de este

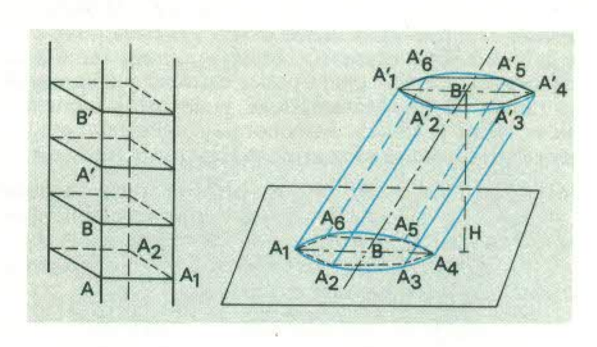


Fig. 31 *Fig. 32*

segmento. Por consiguiente, la razón de los volúmenes V y V' de paralelepípedos de alturas correspondientes A' y B' será : $\frac{V}{V'} = \frac{AB}{A'B'}$.

Supuesto esto, consideremos cuatro paralelepípedos rectángulos : los lados del primero son *a, b, c* y su volumen V; los del segundo *a, b* y 1, siendo su volumen V_1; los del tercero, *a*, 1 y 1 y su volumen V_2; los del cuarto 1, 1 y 1, y por definición su volumen será 1. Comparando el volumen de cada uno de ellos con el siguiente, se verifica :

$$\frac{V}{V_1} = c\,;\ \frac{V_1}{V_2} = b\,;\ \frac{V_2}{1} = a\,;\ V_2 = a\,;\ V_1 = a \cdot b\,;\ V = a \cdot b \cdot c.$$

Volúmenes del paralelepípedo y del prisma. — Como anteriormente, se puede fácilmente demostrar que el *volumen de estos cuerpos geométricos es igual al producto del área de su base por su altura* : $S = B \cdot h$.

Volumen de un cilindro. — Sea un cilindro de altura h (*fig.* 32) y radio R. Inscribamos en dicho círculo un polígono regular de n lados $A_1 A_2 \ldots A A_n$.

El prisma cuya base es $A_1 A_2 \ldots A A_n$, y cuyas aristas laterales A_1A_1', A_2A_2' son iguales y paralelas, tiene por volumen el producto de la altura del prisma por el área B de la base del prisma.

Cuando el número n aumenta indefinidamente, el área del polígono regular inscrito en el círculo de radio R tiende a aproximarse al área $\pi \cdot R^2$ de dicho círculo. Por tanto, el volumen del prisma $V = B \cdot h$ tenderá hacia el límite $V = \pi \cdot R^2 \cdot h$ y concluimos : *el volumen de un cilindro de radio* R *y altura* h *es igual al producto del área de su base por su altura* : $S = \pi \cdot R^2 \cdot h$.

Volumen de un cono. — De manera similar a como hemos obtenido el volumen del cilindro, se obtiene para el volumen de un cono de radio R y altura h la siguiente expresión : $V = \frac{1}{3} \pi \cdot R^2 \cdot h$.

Volumen de la esfera. — El volumen de una esfera de radio R se puede demostrar que es igual a $V = \frac{4}{3} \pi R^3$.

Trigonometría

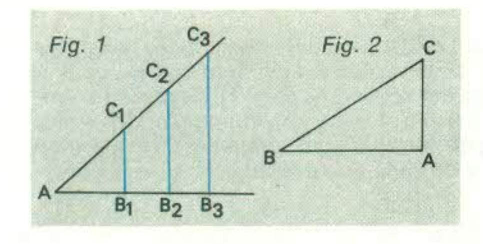
Determinación de un ángulo por razón de segmentos. Tangente, seno y coseno de un ángulo. Cotangente, secante y cosecante de un ángulo. Relación entre las razones trigonométricas de un ángulo. Longitud de un arco y arcos orientados sobre un círculo. Funciones trigonométricas. *Representaciones lineales. Valores notables de las funciones trigonométricas.* Variación de las funciones circulares. Relación fundamental. Relaciones trigonométricas. *De ángulos complementarios. De ángulos suplementarios.* Relación entre las razones trigonométricas. *De ángulos que se diferencian en* $\pi/2$. *De los ángulos que se diferencian en* π. *De ángulos opuestos. De ángulos que se diferencian en* 2π. *De ángulos que suman* 2π. Reducción de un arco al primer cuadrante. Algunas razones trigonométricas importantes. Cálculo de las funciones circulares de un ángulo dado. Funciones circulares inversas. Funciones trigonométricas. *Del ángulo suma. Del ángulo diferencia.* Razones trigonométricas. *Del ángulo doble. Del ángulo mitad.* Transformación en producto de suma o diferencia de funciones circulares. — **Resolución de triángulos.** Definiciones. Teorema de los senos. Triángulos rectángulos. Teorema y fórmulas de los cosenos. Triángulos rectángulos. Fórmulas logarítmicas para la resolución de triángulos. *Primero y segundo casos.* Fórmulas de las tangentes. *Utilización de las fórmulas de las tangentes.* Fórmulas de Briggs.

El término trigonometría procede del griego *trigonos* (triángulo) y *metron* (medida). Esta parte de las Matemáticas trata, por tanto, del cálculo de todos los elementos del triángulo. Esto es en general, pues en la hora actual la Trigonometría, inmersa completamente en el Álgebra, es necesaria para poder estudiar y comprender otras ramas de las Matemáticas y de otras ciencias y técnicas, como la Física, Astronomía, Ingeniería, etc. Sus orígenes se remontan a los griegos Hiparco y Eudoxio.

Determinación de un ángulo por razón de segmentos. — Sea un ángulo A. Trazando varias perpendiculares a uno de sus lados, se forman varios triángulos $A B_1 C_1$, $A B_2 C_2$, $A B_3 C_3 \ldots$ Estos triángulos son todos semejantes, verificándose las siguientes igualdades :

$$\frac{B_1 C_1}{A B_1} = \frac{B_2 C_2}{A B_2} = \frac{B_3 C_3}{A B_3} = \ldots$$

El ángulo A determina unívocamente las razones anteriores e inversamente aquellas determinan de manera única el ángulo A (*fig.* 1).



Tangente, seno y coseno de un ángulo. — Dado un ángulo agudo B, podemos hacer que dicho ángulo pertenezca a un triángulo rectángulo A B C. Llamaremos *tangente* de B, y escribiremos *tg* B, a la razón del cateto opuesto al cateto contiguo de dicho ángulo :

$$tg\ B = \frac{CA}{BA} \ (fig.\ 2).$$

En el triángulo de la *fig.* 1, se verifican las siguientes igualdades : $\frac{B_1C_1}{AC_1} = \frac{B_2C_2}{AC_2} = \frac{B_3C_3}{AC_3}$.

Estas razones determinan también el ángulo correspondiente, llamando seno de A (sen A) a la razón anterior. O de otra manera : *seno* de un ángulo agudo es la razón entre el cateto opuesto a dicho ángulo y la hipotenusa.

De la misma *fig.* 1 deducimos : $\frac{AB_1}{AC_1} = \frac{AB_2}{AC_2} = \frac{AB_3}{AC_3} = \ldots = \frac{AB_n}{AC_n}$; a esta razón se le llama coseno de A (cos A), o *coseno* de un ángulo agudo es la razón entre el cateto contiguo a dicho ángulo y la hipotenusa.

Cotangente, secante y cosecante de un ángulo. — Dado un ángulo A, llamaremos *cotangente* de A (cotg A) a la razón inversa de la tangente o, lo que es lo mismo, la razón entre el cateto contiguo y el cateto opuesto de dicho ángulo.

Secante de un ángulo. — Definimos $\sec A = \frac{1}{\cos A}$.

Cosecante de un ángulo. — Definimos $\operatorname{cosec} A = \dfrac{1}{\operatorname{sen} A}$.

Relación entre las razones trigonométricas de un ángulo. — Como fácilmente observamos, dividiendo las razones que definen el seno y el coseno, se tiene :

$$\frac{B_1C_1}{AC_1} = \frac{B_2C_2}{AC_2} = \dots = \frac{B_nC_n}{AC_n} = \operatorname{sen} A$$

$$\frac{AB_1}{AC_1} = \frac{AB_2}{AC_2} = \dots = \frac{AB_n}{AC_n} = \cos A$$

$$\frac{\operatorname{sen} A}{\cos A} = \frac{B_1C_1}{AB_1} = \frac{B_2C_2}{AB_2} = \dots = \operatorname{tg} A$$

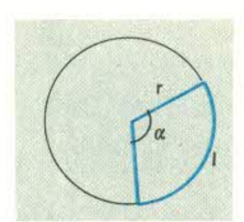
Inversamente, $\dfrac{\cos A}{\operatorname{sen} A} = \dfrac{AB_1}{B_1C_1} = \dfrac{AB_2}{B_2C_2} = \dots = \operatorname{cotg} A.$

Resumiendo, $\dfrac{\operatorname{sen} A}{\cos A} = \operatorname{tg} A, \ \dfrac{\cos A}{\operatorname{sen} A} = \operatorname{cotg} A,$

$$\frac{1}{\sec A} = \cos A, \ \frac{1}{\operatorname{cosec} A} = \operatorname{sen} A.$$

Longitud de un arco y arcos orientados sobre un círculo. — Sobre un círculo de radio r, un ángulo central de α radianes intercepta un arco de longitud $\ell = r \cdot \alpha$ (*fig.* 3).

Fig. 3



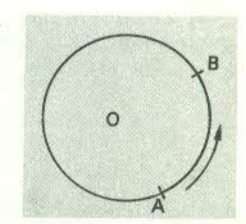


Fig. 4

Sea la circunferencia de la *fig.* 4, y sobre ella dos puntos fijados en el sentido positivo de rotación (sentido contrario a las agujas de un reloj). Consideremos todos los arcos que tienen por origen A y extremo final B; evidentemente, hay una infinidad de arcos que cumplen estas condiciones, según sea el sentido de giro y según el número de veces que se describe el círculo de A a B, antes de detenernos en ese punto. Como a cada arco le corresponde un ángulo central, en la expresión $\widehat{OA\,OB} = \alpha + 2\pi k$, podemos expresar los arcos en radianes y representarlos por $\widehat{AB} = \alpha + 2\pi k$.

Los arcos $\widehat{BA}$ los representaremos por $-\alpha + 2\pi k$. Evidentemente se verifica que $\widehat{AB} + \widehat{BC} \dots + \widehat{MN} + \widehat{NB} = 2\pi k$.

Funciones trigonométricas. — *Representaciones lineales.* — Sea θ un ángulo con el sentido indicado en la *fig.* 5. Con el vértice O, como centro, trácese un círculo de radio unidad que corte al lado inicial OX de θ en el punto A del eje de las X, y en P al lado terminal de θ. Trácese MP perpendicular a OX; trácense también las tangentes al círculo en A y B, que encuentran al lado terminal de θ o a su prolongación por O en los puntos Q y R respectivamente.

En cada figura, los triángulos OMP, OAQ y OBR son semejantes, verificándose :

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{MP}{OP} = MP \qquad \operatorname{cosec}\theta = \frac{OP}{MP} = \frac{OR}{OB} = OR$$

$$\cos\theta = \frac{OM}{OP} = OM \qquad \sec\theta = \frac{OP}{OM} = \frac{OQ}{OA} = OQ$$

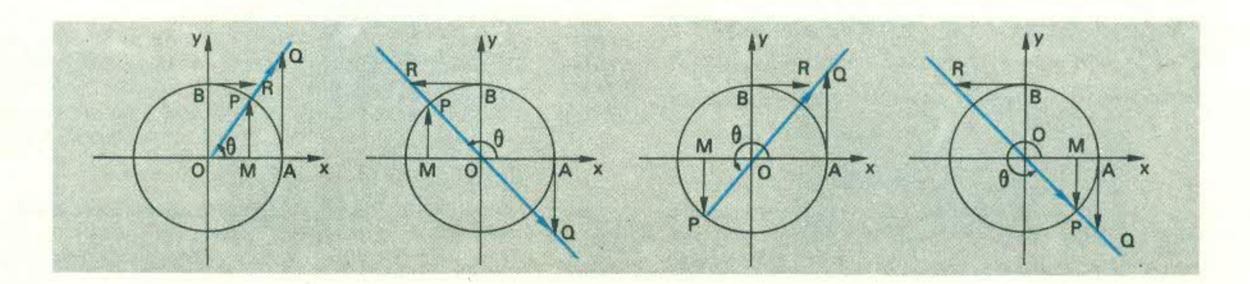
$$\operatorname{tg}\theta = \frac{MP}{OM} = \frac{AQ}{OA} = AQ \qquad \operatorname{cotg}\theta = \frac{OM}{MP} = \frac{BR}{OB} = BR$$

Los segmentos MP, OM, AQ,..., son segmentos dirigidos; la magnitud de cada función viene dada por la longitud del segmento correspondiente, y el signo por la dirección indicada. Los segmentos dirigidos OQ y OR se considerarán positivos cuando se midan sobre el lado terminal del ángulo y negativos cuando se midan sobre la prolongación de este lado.

Valores notables de las funciones trigonométricas. — Algunos valores de las funciones trigonométricas son especialmente importantes, entre ellos daremos los siguientes :

	0°	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
sen α	0	1	0	−1	0
cos α	1	0	−1	0	1
tg α	0	±∞	0	±∞	0
cotg α	±∞	0	±∞	0	±∞

Fig. 5



Variación de las funciones circulares. — 1) *Cosenoide.* En el círculo trigonométrico de la *fig.* 6 podemos observar la variación del segmento orientado $\overrightarrow{ON}$, representativo del coseno, al moverse el punto P sobre la circunferencia. Los valores que toma dicho segmento orientado los esquematizamos en el cuadro siguiente :

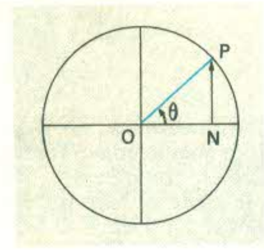


Fig. 6

θ	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3}{2}\pi$		2π
cos θ	1	↘	0	↘	−1	↗	0	↗	1

Representando estos valores en unos ejes de coordenadas (*fig.* 7), la gráfica de la función $y = \cos x$ será :

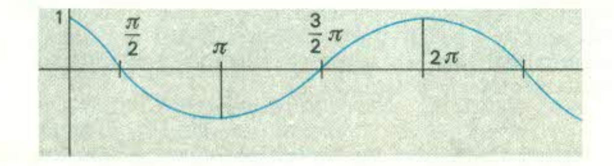


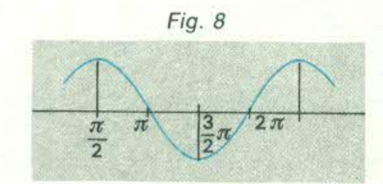
Fig. 7

2) *Senoide.* La variación del segmento orientado o vector $\overrightarrow{NP}$ (*fig.* 6) al moverse P sobre la circunferencia se puede representar mediante el cuadro :

θ	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3}{2}\pi$		2π
sen θ	0	↗	1	↘	0	↘	−1	↗	0

Representando estos valores en unos ejes de coordenadas (*fig.* 8), la gráfica de la función $y = \text{sen } x$ será :

Fig. 8



Como podemos observar en ambas gráficas, la senoide y la cosenoide son una trasladada de la otra en $\frac{\pi}{2}$. Es decir, $\cos x = \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

3) *Tangentoide.* De forma similar encontramos para la variación de la tangente el cuadro :

θ	0		$\frac{\pi}{2}$		π
tg θ	0	↗	$+\infty$ | $-\infty$	↗	0

Valores que, representados en ejes coordenados (*fig.* 9), nos dan la gráfica $y = \text{tg}\, x$.

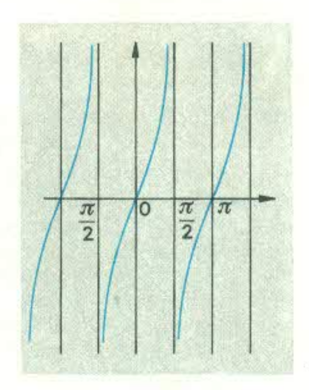


Fig. 9

4) *Cotangentoide.* La tabla de variación de la cotangente viene dada por el siguiente cuadro :

θ	θ		$\frac{\pi}{2}$		π
cotg θ	∞	↘	0	↘	$-\infty$ | $+\infty$

Y la gráfica de $y = \text{cotg } x$ aparece en la *fig.* 10.

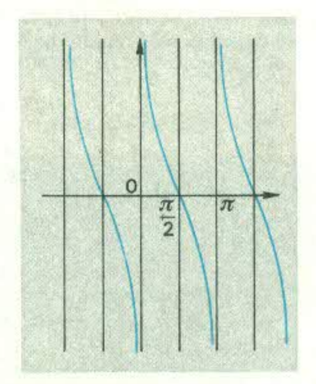


Fig. 10

5) *Gráfica de la secante.*

θ	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3}{2}\pi$		2π
$\sec\theta$	1	↗	$+\infty$ | $-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↘	1

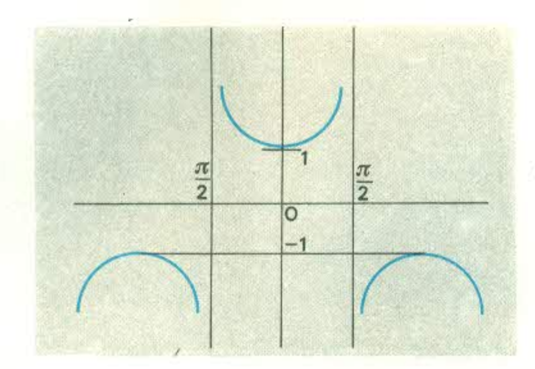


Fig. 11

6) *Gráfica de la cosecante.*

θ	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3}{2}\pi$		2π
$\operatorname{cosec}\theta$	$-\infty$ | $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$ | $-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$ | $+\infty$

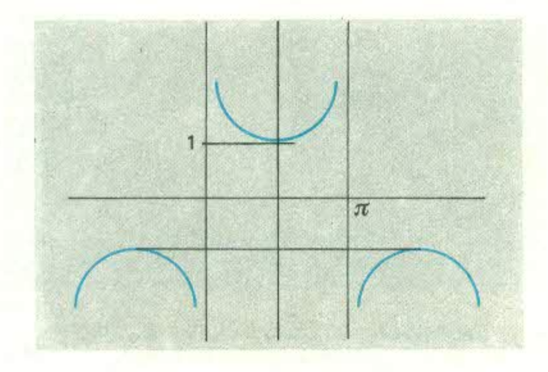


Fig. 12

Las funciones trigonométricas son funciones periódicas, y el menor intervalo de valores del ángulo que corresponde a un ciclo completo de valores de la función se denomina período de la función. De los grafos anteriores, deducimos que las funciones $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\sec x$ y $\operatorname{cosec} x$ tienen período 2π y las funciones $\operatorname{tg} x$ y $\operatorname{cotg} x$ tienen período π.

Relación fundamental. — Representemos la circunferencia trigonométrica, y apliquemos el teorema de Pitágoras al triángulo OPM de la *fig.* 13.

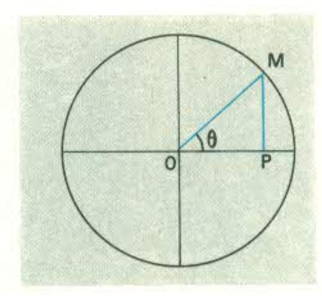


Fig. 13

$\overline{OP}^2 + \overline{PM}^2 = \overline{OM}^2$ o, empleando los valores definidos para $\overline{OP}$ y $\overline{PM}$, se encuentra : $(\cos\theta)^2 + (\operatorname{sen}\theta)^2 = 1$, que escribiremos $\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$, relación que denominaremos *relación fundamental de la Trigonometría del círculo.*

Relaciones trigonométricas. — *De ángulos complementarios.* — Recordemos que dos ángulos se llaman complementarios cuando su suma es 90^0. Consideremos las circunferencias trigonométricas de las *fig.* 14 y 15.

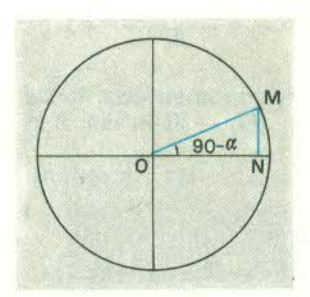


Fig. 14

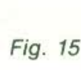
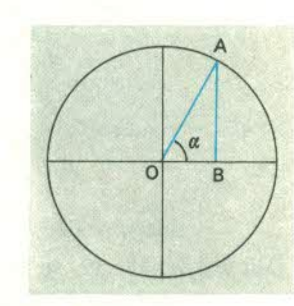


Fig. 15



Sabemos que $\widehat{AOB} = \alpha \quad \begin{cases} \operatorname{sen}\alpha = \overline{AB} \\ \cos\alpha = \overline{OB} \end{cases}$

También, $\widehat{MON} = 90^0 - \alpha \quad \begin{cases} \operatorname{sen}(90-\alpha) = \overline{MN} \\ \cos(90-\alpha) = \overline{ON} \end{cases}$

Los triángulos AOB y MON son iguales, ya que siendo rectángulos tienen iguales la hipotenusa $\overline{OA} = \overline{ON} = 1$ y un ángulo agudo $\widehat{BOA} = \widehat{NOM} = \alpha$. Como consecuencia,

$$\begin{cases} \overline{AB} = \overline{ON} \\ \overline{OB} = \overline{MN} \end{cases} \iff \operatorname{sen}\alpha = \cos(90-\alpha);$$

$\cos\alpha = \operatorname{sen}(90-\alpha)$. Dividiendo miembro a miembro las dos igualdades anteriores, se puede encontrar que $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{cotg}(90-\alpha)$.

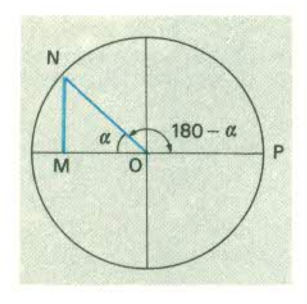


Fig. 16

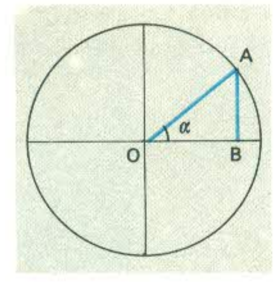


Fig. 17

De ángulos suplementarios. — Consideremos los ángulos suplementarios $\widehat{BOA}$ y $\widehat{PON}$. (*Fig.* 16 y 17.) Los triángulos AOB y MON son iguales, ya que siendo rectángulos tienen iguales la hipotenusa $\overline{OA} = \overline{OM} = 1$ y un ángulo agudo $\widehat{BOA} = \widehat{MON} = \alpha$. Como consecuencia,

$$\begin{cases} \overline{AB} = \overline{MN} \\ \overline{OB} = \overline{ON} \end{cases} \iff \begin{cases} \operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}(180 - \alpha) \\ \cos\alpha = -\cos(180 - \alpha) \end{cases}$$

Dividiendo miembro a miembro :

$$\operatorname{tg}\alpha = -\operatorname{tg}(180 - \alpha); \quad \operatorname{cotg}\alpha = -\operatorname{cotg}(180 - \alpha).$$

Relación entre las razones trigonométricas. — *De ángulos que se diferencian en π/2.* — Si un ángulo es α, el otro será $90 + \alpha$.

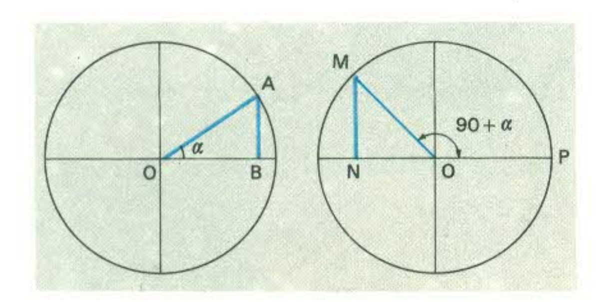


Fig. 18 Fig. 19

En las *fig.* 18, 19, se tiene : $\widehat{BOA} = \alpha$

$$\begin{cases} \operatorname{sen}\alpha = \overline{AB} \\ \cos\alpha = \overline{OB} \end{cases}$$

$$\widehat{POM} = 90 + \alpha \quad \begin{cases} \operatorname{sen}(90 + \alpha) = \overline{MN} \\ \cos(90 + \alpha) = -\overline{ON} \end{cases}$$

Los triángulos AOB y MON son iguales, ya que siendo rectángulos tienen iguales la hipotenusa y un ángulo agudo

$$\widehat{BOA} = \widehat{OMN} = \alpha \implies \begin{cases} \overline{AB} = \overline{ON} \\ \overline{OB} = \overline{MN} \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} \operatorname{sen}\alpha = -\cos(90 + \alpha) \\ \cos\alpha = \operatorname{sen}(90 + \alpha) \end{cases}$$

dividiendo miembro a miembro, se encuentra :

$$\operatorname{tg}\alpha = -\operatorname{cotg}(90 + \alpha), \quad \operatorname{cotg}\alpha = -\operatorname{tg}(90 + \alpha).$$

De los ángulos que se diferencian en π. — Si un ángulo es α, el otro es $\pi + \alpha$. En las *fig.* 20, 21, se observa :

$$\widehat{BOA} = \alpha \quad \begin{cases} \operatorname{sen}\alpha = \overline{AB} \\ \cos\alpha = \overline{OB} \end{cases}$$

$$\widehat{POM} = 180 + \alpha \quad \begin{cases} \operatorname{sen}(180 + \alpha) = -\overline{MN} \\ \cos(180 + \alpha) = -\overline{ON} \end{cases}$$

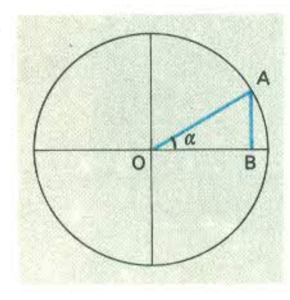


Fig. 20

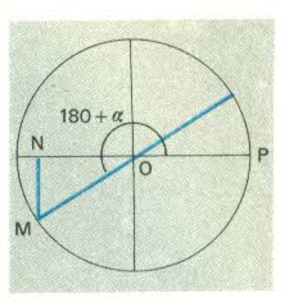


Fig. 21

Los triángulos AOB y MON son iguales pues, siendo rectángulos, tienen iguales la hipotenusa y un ángulo agudo $\widehat{AOB} = \widehat{NOM} = \alpha$. En consecuencia :

$$\left.\begin{matrix} \overline{AB} = \overline{MN} \\ \overline{OB} = \overline{ON} \end{matrix}\right\} \iff \begin{matrix} \operatorname{sen}\alpha = -\operatorname{sen}(180 + \alpha) \\ \cos\alpha = -\cos(180 + \alpha) \end{matrix}$$

dividiendo miembro a miembro :
$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(180 + \alpha)$, $\operatorname{cotg}\alpha = \operatorname{cotg}(180 + \alpha)$

De ángulos opuestos. — Si un ángulo es α, su opuesto es $-\alpha$ (*fig.* 22 y 23).

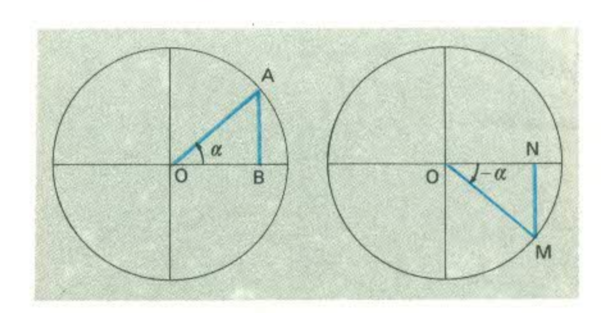


Fig. 22 Fig. 23

En las circunferencias de las *fig.* 22 y 23, se verifica :

$$\widehat{BOA} = \alpha \begin{cases} \operatorname{sen}\alpha = \overline{AB} \\ \cos\alpha = \overline{OB} \end{cases}$$

$$\widehat{NOM} = -\alpha \begin{cases} \operatorname{sen}(-\alpha) = -MN \\ \cos(-\alpha) = \overline{ON} \end{cases}$$

En los triángulos rectángulos AOB y MON, que son iguales, se verifica :

$$\begin{cases} \overline{AB} = \overline{MN} \\ \overline{OB} = \overline{ON} \end{cases} \iff \begin{matrix} \operatorname{sen}\alpha = -\operatorname{sen}(-\alpha) \\ \cos\alpha = \cos(-\alpha) \end{matrix}$$

y dividiendo : $\operatorname{tg}\alpha = -\operatorname{tg}(-\alpha)$; $\operatorname{cotg}\alpha = -\operatorname{cotg}(-\alpha)$.

De ángulos que se diferencian en 2π. — Dos ángulos que se diferencian en 2π corresponden a un mismo punto de la circunferencia trigonométrica, luego sus razones trigonométricas son iguales.

$$\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}(360+\alpha),\quad \cos\alpha = \cos(360+\alpha),$$
$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(360+\alpha).$$

De ángulos que suman 2π. — Si un ángulo es α, el otro es $360-\alpha$ (*fig.* 24).

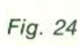
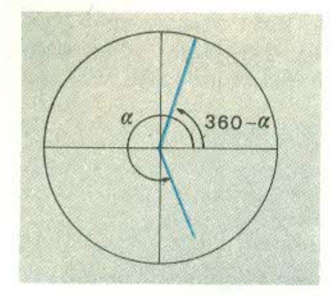



Fig. 24

El ángulo $360-\alpha$ corresponde en la circunferencia al mismo punto que el ángulo $(-\alpha)$, luego sus razones serán iguales : $\operatorname{sen}\alpha = -\operatorname{sen}(360-\alpha)$, $\cos\alpha = \cos(360-\alpha)$, $\operatorname{tg}\alpha = -\operatorname{tg}(360-\alpha)$.

Reducción de un arco al primer cuadrante. — Las funciones trigonométricas de un ángulo α podemos reducirlas a funciones de un arco del primer cuadrante, lo que nos facilita el problema de hallar dichas razones.

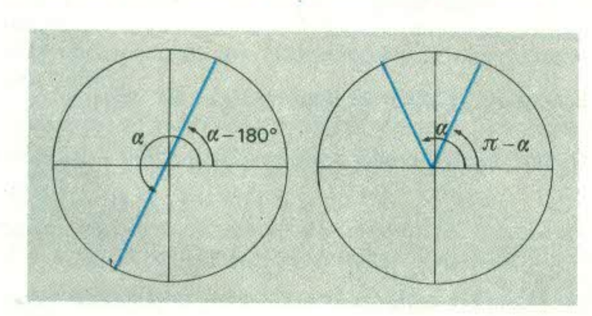


Fig. 25 Fig. 26

En efecto, siendo α, pueden ocurrir dos casos :

a) $\alpha > 360^0 \Longrightarrow \alpha = 360k+\alpha'$, donde $\alpha' < 360^0$. Las razones de α son idénticas a las de α' que ya es menor que 360^0.

b) $\alpha < 360^0$. Pueden ocurrir tres subcasos :

i) $270^0 < \alpha < 360^0$. En este caso (*fig.* 24), se verifica :

$$\cos\alpha = \cos(360-\alpha)$$
$$\operatorname{sen}\alpha = -\operatorname{sen}(360-\alpha)$$
$$\operatorname{tg}\alpha = -\operatorname{tg}(360-\alpha)$$

ii) $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$. Reducimos las razones de α a las del primer cuadrante, haciendo : $\operatorname{sen}\alpha = -\operatorname{sen}(\alpha-180)$, $\cos\alpha = -\cos(\alpha-180)$. (*Fig.* 25.)

iii) $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ (*fig.* 26). $\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}(\pi-\alpha)$, $\cos\alpha = -\cos(\pi-\alpha)$, $\operatorname{tg}\alpha = -\operatorname{tg}\alpha\ (\pi-\alpha)$.

Ejemplo : hallar las razones del ángulo $3\,645^0$.

$3\,645^0 = 360\times10+45$; luego $\operatorname{sen}3\,645^0 = \operatorname{sen}45^0 = \sqrt{2}/2$, $\cos 3\,645^0 = \cos 45^0 = \sqrt{2}/2$

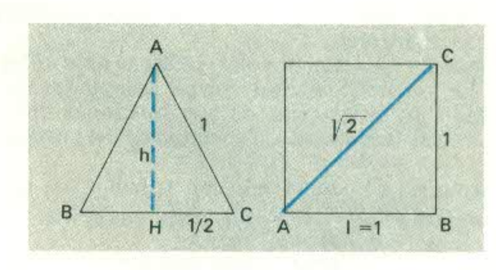


Fig. 27 Fig. 28

Algunas razones trigonométricas importantes. — Sea el triángulo equilátero de radio 1. Su altura será $h = \sqrt{1-\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (*fig.* 27); el triángulo rectángulo AHC tiene el ángulo $\widehat{A} = 30^0$ y el $\widehat{C} = 60^0$. Las razones trigonométricas de dichos ángulos serán :

$$\operatorname{sen}\widehat{A} = \operatorname{sen}30^0 = \frac{1}{2} : 1 = \frac{1}{2};$$
$$\cos\widehat{A} = \cos 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2} : 1 = \frac{\sqrt{3}}{2};$$
$$\operatorname{tg}\ \widehat{A} = \operatorname{tg}\ 30^0 = \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Igualmente,

se obtiene para el ángulo $\widehat{C}$
$$\begin{cases} \operatorname{sen}\widehat{C} = \cos\widehat{A} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos\widehat{C} = \frac{1}{2} \\ \operatorname{tg}\ \widehat{C} = \sqrt{3} \end{cases}$$

En el cuadrado de lado 1, su diagonal es $\sqrt{2}$ (*fig.* 28), obteniéndose del triángulo ABC las siguientes razones :

$$\operatorname{sen}\widehat{A} = \operatorname{sen}45^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$
$$\cos\widehat{A} = \operatorname{sen}\widehat{A} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$
$$\operatorname{tg}\ \widehat{A} = \frac{\operatorname{sen}\widehat{A}}{\cos\widehat{A}} = 1.$$

Resumiendo, se obtiene el siguiente cuadro.

	$\frac{\pi}{6} = 30°$	$\frac{\pi}{3} = 60°$	$\frac{\pi}{4} = 45°$
sen α	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
cos α	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
tg α	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	1

Cálculo de las funciones circulares de un ángulo dado. — Las dos relaciones $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ y $\operatorname{tg}x = \frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}$ indican que existe una relación entre las funciones circulares de x ; además, dada una función de x, podemos hallar las demás funciones correspondientes a

dicho ángulo. Así pues, se nos pueden presentar los problemas siguientes :

1.º Dada una función circular, hallar el arco correspondiente. En general, existirán varias soluciones.

2.º Dado un arco y una de sus funciones circulares, hallar las otras funciones. La solución de este problema es única.

Problema 1.º *a*) conociendo sen x, hallar cos x y tg x.

Supongamos que $\operatorname{sen} x = a \Longrightarrow \cos x = \pm\sqrt{1-a^2}$;

$\operatorname{tg} x = \dfrac{a}{\pm\sqrt{1-a^2}}$. Como vemos, hay dos soluciones para cada una de las funciones circulares; en efecto, como se sabe, $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(\pi - x)$, y $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(x + 2k\pi) = \operatorname{sen}(\pi - x + 2k'\pi)$.

Así pues, en cada caso particular se necesita conocer algún dato más para poder hallar el arco pedido, pues hasta ahora puede ser el x o el $\pi - x$.

Supongamos que $\operatorname{sen} x = \dfrac{1}{2} \Longrightarrow x = 30^0$ ó $x = 150^0$.

Correspondiendo a cada uno de estos arcos existen los siguientes valores para el $\cos x$ y $\operatorname{tg} x$:

$$\cos x = \pm\sqrt{1-\frac{1}{4}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{tg} x = \pm\frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

	30^0	150^0
$\operatorname{sen}\alpha$	1/2	1/2
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$
$\operatorname{tg}\ \alpha$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{-1}{\sqrt{3}}$

b) dado $\cos x = a$, hallar $\operatorname{sen} x$ y $\operatorname{tg} x$.

Sabemos que $\cos x = \cos(-x) = a$, luego encontraremos los valores del seno y la tangente para los ángulos x y $-x$; $\operatorname{sen} x = \pm\sqrt{1-a^2}$; $\operatorname{tg} x = \pm\dfrac{\sqrt{1-a^2}}{a}$.

Ejemplo : conocido $\cos x = \dfrac{1}{2}$, hallar $\operatorname{sen} x$ y $\operatorname{tg} x$.

$$\cos x = \frac{1}{2} \Longrightarrow x \begin{matrix} \nearrow 60^0 \\ \searrow 300^0 \end{matrix} \Longrightarrow \operatorname{sen} x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\operatorname{tg} x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} : \frac{1}{2} = \pm\sqrt{3}$$

	60^0	300^0
$\cos\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{sen}\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$
$\operatorname{tg}\ \alpha$	$+\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$

c) dada $\operatorname{tg} x$, hallar $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$.

Sabemos que $\operatorname{tg} x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$, y $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$; dividiendo los dos miembros de esta igualdad por $\cos^2 x$, nos queda : $\dfrac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \Longrightarrow \operatorname{tg} x = \pm\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x} - 1};$$

$$\cos x = \pm\sqrt{\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}}.$$

Problema 2.º Dado $x = 90^0$ y conociendo que $\cos x = 0$, hallar los valores de las restantes funciones.

$$\operatorname{sen} x = \sqrt{1-\cos^2 x} = 1; \quad \operatorname{tg} x = \frac{1}{0} = \infty.$$

Este problema ha tenido solución única, puesto que conocíamos perfectamente el arco, y entonces hemos eliminado el signo menos (−) de la raíz, que correspondería a un arco del tercer cuadrante para el seno.

Funciones circulares inversas. — Dada la ecuación trigonométrica $x = \operatorname{sen} y$, sabemos que, dada y, la variable x queda unívocamente determinada, poseyendo un valor único.

Pero dada x, el problema puede, o no, tener solución, o tener infinitas. Por ejemplo, la ecuación $2 = \operatorname{sen} y$ no puede resolverse (no tiene solución), puesto que no existe ningún arco y cuyo seno valga 2.

Esto es, conocida x, la variable y no la podemos determinar unívocamente. Como es natural, convendría conocer dicha variable y en función de x, o, lo que es lo mismo, hallar la función inversa de la $x = \operatorname{sen} y$.

Esta función se escribe $y = \operatorname{arc\,sen} x$, leyéndose y = arco seno x, o también, y = arco cuyo seno es x.

Ejemplo : resolver la ecuación $y = \operatorname{arc\,sen} \dfrac{1}{2}$.

Dichos arcos, como sabemos, son : $y = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi k$, o $y = 150^0 + 2\pi k$, $(k = 0, 1, \ldots)$.

Es decir, existe un conjunto doblemente infinito de soluciones, llamándose soluciones principales a las $y_0 = 30^0$, e $y_1 = 150^0$.

De todas las soluciones posibles que podemos encontrar de la ecuación $x = \operatorname{sen} y$, sólo existe un valor para y comprendido entre $\dfrac{\pi}{2}$ y $\dfrac{-\pi}{2}$. A esa solución la llamaremos arc sen x.

De manera similar se define la función inversa de la $y = \cos x$, como la $x = \operatorname{arc\,cos} y$, de todas las soluciones de la ecuación $y = \cos x$.

Dada la ecuación $x = \operatorname{tg} y$, y conocido un valor de $x = x_0\, x_0 = \operatorname{tg} y$, existen infinitos valores de y para los que $x = x_0$. De todas esas soluciones, llamaremos arc tg x_0 a la solución comprendida entre $\dfrac{-\pi}{2}$ y $\dfrac{\pi}{2}$.

Funciones trigonométricas. — *Del ángulo suma.* — Seno de $(\alpha + \beta)$.

Sean los ángulos α y β, y tratemos de hallar las razones circulares de $(\alpha + \beta)$, conocidas las razones de α y de β. $\alpha < 90^0$, $\beta < 90^0$.

Para hallar dichas razones, vamos a hacerlo por dos caminos, uno de ellos utilizando números complejos y otro utilizando la circunferencia trigonométrica.

Sabemos que dados dos números complejos

$$\begin{aligned} z_1 &= r_\alpha = r(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha) \\ z_2 &= r'_\beta = r'(\cos\beta + i\operatorname{sen}\beta) \end{aligned} \qquad [1]$$

el producto $z_1 \cdot z_2 = r_\alpha \cdot r'_\beta = r \cdot r'_{(\alpha+\beta)}$
$= r \cdot r'[\cos(\alpha+\beta) + i \operatorname{sen}(\alpha+\beta)]$. **[2]**

Multiplicando miembro a miembro las igualdades [1], e identificándolas a [2], se obtiene :

$$z_1 \cdot z_2 = r(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha) \cdot r'(\cos\beta + i \operatorname{sen}\beta) = r \cdot r'[\cos\alpha \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta + i \operatorname{sen}\alpha \cos\beta + i \cos\alpha \operatorname{sen}\beta] =$$
$$= r \cdot r'[(\cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta) + i(\operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha \operatorname{sen}\beta)] = r \cdot r'[\cos(\alpha+\beta) + i \operatorname{sen}(\alpha+\beta)]$$
$$\Longrightarrow \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta;$$
$$\operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha \operatorname{sen}\beta.$$

El otro modo es el siguiente (*fig.* 29).

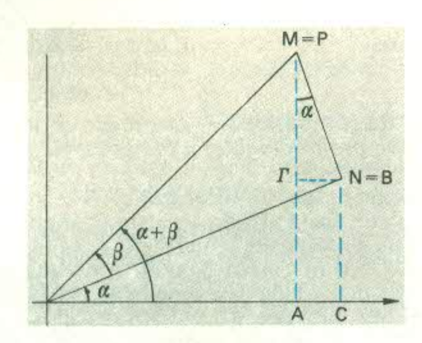


Fig. 29

Sea M un punto del lado terminal de $\alpha + \beta$. Tracemos MA perpendicular al eje OX, MN perpendicular al lado terminal de α, NC perpendicular a OX y NT perpendicular a MA.

Aplicando las definiciones de seno y coseno a los triángulos OAM, ONC y OMN, tenemos : $\operatorname{sen}(\alpha+\beta) =$

$$\frac{AM}{OM} = \frac{AT+TM}{OM} = \frac{CN+TM}{OM} = \frac{CN}{OM} + \frac{TM}{OM} =$$
$$\frac{CN \cdot ON}{OM \cdot ON} + \frac{TM \cdot NM}{OM \cdot NM} = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha \operatorname{sen}\beta \iff \operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha \operatorname{sen}\beta.$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{OA}{OM} = \frac{OC-AC}{OM} = \frac{OC-TN}{OM} = \frac{OC}{OM} - \frac{TN}{OM} =$$
$$\frac{OC \cdot OM}{OM \cdot ON} - \frac{TN \cdot NM}{MN \cdot OM} = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta.$$

Dividiendo $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)$ entre $\cos(\alpha+\beta)$, se obtiene :

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha \operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta}$$

dividiendo numerador y denominador por $\cos\alpha\cos\beta$:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\dfrac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha \operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}.$$

Del ángulo diferencia. — Seno de $(\alpha - \beta)$. Dados los ángulos α y β, se trata de hallar $\operatorname{sen}(\alpha-\beta)$, $\cos(\alpha-\beta)$, y $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$.

Utilizaremos el método de los números complejos

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_\alpha}{r'_\beta} = \frac{r}{r'}(\alpha-\beta) = \frac{r(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)}{r'(\cos\beta + i \operatorname{sen}\beta)}$$
$$= \frac{r(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)(\cos\beta - i \operatorname{sen}\beta)}{r'(\cos\beta + i \operatorname{sen}\beta)(\cos\beta - i \operatorname{sen}\beta)} =$$
$$\frac{r[(\cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta) + i(\operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha \operatorname{sen}\beta)]}{r'(\cos^2\beta + \operatorname{sen}^2\beta)}$$
$$= \frac{r}{r'}[\cos(\alpha-\beta) + i \operatorname{sen}(\alpha-\beta)] \Longrightarrow$$
$$\begin{cases} \operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha \operatorname{sen}\beta \\ \cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta \end{cases}$$

dividiendo entre sí las dos igualdades :

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha \operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta}$$
$$= \frac{\dfrac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha \operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha \cos\alpha}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}.$$

Ejemplo : hallar las razones del ángulo $\alpha = 15^0$.

Haciendo $15 = 45 - 30$, se tiene :

$$\operatorname{sen} 15^0 = \operatorname{sen}(45^0 - 30^0) = \operatorname{sen} 45^0 \cos 30^0 - \cos 45^0 \operatorname{sen} 30^0$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} - 1)$$
$$\cos 15^0 = \cos(45^0 - 30^0) = \cos 45^0 \cos 30^0 - \operatorname{sen} 45^0 \operatorname{sen} 30^0$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} + 1)$$
$$\operatorname{tg} 45^0 = \operatorname{tg}(45^0 - 30^0) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta} = \frac{\operatorname{tg} 45^0 - \operatorname{tg} 30^0}{1 + \operatorname{tg} 45^0 \cdot \operatorname{tg} 30^0}$$
$$= \frac{1 - \sqrt{3}/3}{1 + \sqrt{3}/3}.$$

Ejemplo : simplificar $\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)$

$$\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta - (\cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta) = -2 \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta.$$

Razones trigonométricas. — *Del ángulo doble.* — Se trata de hallar las razones del ángulo 2α, conocidas las de α.

$$\operatorname{sen}(\alpha+\alpha) = \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + \cos\alpha \operatorname{sen}\alpha = 2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha.$$
$$\cos(\alpha+\alpha) = \cos 2\alpha = \cos\alpha \cdot \cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha.$$
$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha}{\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha} = \frac{2 \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}.$$

Ejemplo : hallar las razones de 120^0, conocidas las de 60^0.

$$\operatorname{sen}(60^0 + 60^0) = 2 \operatorname{sen} 60 \cos 60 = \frac{2\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\cos(60^0 + 60^0) = \cos^2 60 - \operatorname{sen}^2 60 = \frac{1}{4} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$
$$= \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}.$$

Del ángulo mitad. — En este caso se trata de hallar las razones del ángulo $\frac{a}{2}$, conocidas las razones de a. Para ello sabemos que :

$\cos^2\frac{a}{2} + \text{sen}^2\frac{a}{2} = 1$ (en virtud de la igualdad fundamental).

$\cos^2\frac{a}{2} - \text{sen}^2\frac{a}{2} = \cos a$ (en virtud de $\cos 2a = \cos^2 a - \text{sen}^2 a$).

Restando ambas expresiones, queda

$$2\,\text{sen}^2\frac{a}{2} = 1 - \cos a.$$

Sumando ambas expresiones, queda

$$2\cos^2\frac{a}{2} = 1 + \cos a.$$

Despejando :

$$\text{sen}\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{2}};\quad \cos\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos a}{2}}.$$

Dividiendo $\text{sen}\frac{a}{2}$ entre $\cos\frac{a}{2}$, $\text{tg}\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{1+\cos a}}$.

Transformación en producto de suma o diferencia de funciones circulares. — El objeto de esa transformación es facilitar el cálculo logarítmico.

$$\text{sen}(a+b) = \text{sen}\,a\cdot\cos b + \cos a\cdot\text{sen}\,b$$
$$\text{sen}(a-b) = \text{sen}\,a\cdot\cos b - \cos a\cdot\text{sen}\,b$$
$$\cos(a+b) = \cos a\cdot\cos b - \text{sen}\,a\cdot\text{sen}\,b$$
$$\cos(a-b) = \cos a\cdot\cos b + \text{sen}\,a\cdot\text{sen}\,b$$

Sumándolas y restándolas miembro a miembro, encontramos :

$$\text{sen}(a+b) + \text{sen}(a-b) = 2\,\text{sen}\,a\cdot\cos b$$
$$\text{sen}(a+b) - \text{sen}(a-b) = -2\cos a\cdot\text{sen}\,b$$

Si hacemos $\left.\begin{matrix} a+b=p \\ a-b=q \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \begin{matrix} a=\frac{p+q}{2} \\ b=\frac{p-q}{2} \end{matrix}$

queda finalmente :

$$\text{sen}\,p + \text{sen}\,q = 2\cdot\text{sen}\frac{p+q}{2}\cdot\cos\frac{p-q}{2}$$

$$\text{sen}\,p - \text{sen}\,q = -2\cdot\cos\frac{p+q}{2}\cdot\text{sen}\frac{p-q}{2}$$

$$\left.\begin{matrix} \cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos a\cdot\cos b \\ \cos(a+b) - \cos(a-b) = -2\,\text{sen}\,a\cdot\text{sen}\,b \end{matrix}\right\}$$

$$\cos p + \cos q = 2\cdot\cos\frac{p+q}{2}\cdot\cos\frac{p-q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2\,\text{sen}\frac{p+q}{2}\cdot\text{sen}\frac{p-q}{2}$$

Igualmente, $\text{tg}\,p + \text{tg}\,q = \frac{\text{sen}\,p}{\cos p} + \frac{\text{sen}\,q}{\cos q}$

$$= \frac{\text{sen}\,p\cos q + \text{sen}\,q\cos p}{\cos p\cos q} = \frac{\text{sen}(p+q)}{\cos p\cdot\cos q}$$

$$\text{tg}\,p - \text{tg}\,q = \frac{\text{sen}\,p}{\cos p} - \frac{\text{sen}\,q}{\cos q} = \frac{\text{sen}\,p\cos q - \text{sen}\,q\cos p}{\cos p\cdot\cos q} = \frac{\text{sen}(p-q)}{\cos p\cdot\cos q}.$$

Resolución de triángulos

Definiciones. — Se llaman elementos de un triángulo a cualquiera de sus lados o de sus ángulos. Los tres ángulos de un triángulo diremos que son elementos dependientes, puesto que su suma es 180^0. Resolver el triángulo significa calcular sus seis elementos, conocidos tres de ellos que sean independientes entre sí. Por consiguiente, uno de los datos ha de ser un lado. Según sean los datos restantes, distinguiremos los siguientes casos de resolución.

	DATOS	INCÓGNITAS
Primer caso	a, B, C	b, c, A
Segundo caso	a, b, A	B, C, c
Tercer caso	a, b, C	A, B, c
Cuarto caso	a, b, c	A, B, C

Teorema de los senos. — *Los lados de un triángulo cualquiera son proporcionales a los senos de sus ángulos opuestos.*

Demostración : sea un triángulo ABC y en él dos alturas : una que corta al lado opuesto al ángulo B, y otra que corta a la prolongación del lado c (*fig.* 30).

La altura h es un cateto común a los dos triángulos rectángulos en que queda descompuesto el triángulo ABC por dicha altura; por tanto, se verifica : $h = c\cdot\text{sen}\,A$, y $h = a\cdot\text{sen}\,C$; de modo que podemos escribir $c\cdot\text{sen}\,A = a\cdot\text{sen}\,C$, o en forma de proporción : $\frac{a}{\text{sen}\,A} = \frac{c}{\text{sen}\,C}$.

La altura h' es cateto común a los dos triángulos rectángulos AH'C y BH'C; por tanto, $h' = b\cdot\text{sen}\,a$, y también $h' = a\cdot\text{sen}(180 - B) = a\cdot\text{sen}\,B$, y entonces se puede escribir en forma de proporción $\frac{a}{\text{sen}\,A} = \frac{b}{\text{sen}\,B}$.

Las dos proporciones obtenidas se pueden escribir en una sola expresión $\frac{a}{\text{sen}\,A} = \frac{b}{\text{sen}\,B} = \frac{c}{\text{sen}\,C}$. Expresión esta última que recibe el nombre de *fórmula de los senos*.

PRIMER CASO. — Datos : a, B, C; Incógnitas : b, c, A.

$A = 180 - (B + C)$. De la fórmula de los senos, se obtiene :

$$b = \frac{a\cdot\text{sen}\,B}{\text{sen}\,A};\quad c = \frac{a\cdot\text{sen}\,C}{\text{sen}\,A}.$$

SEGUNDO CASO. — Datos : a, b, A; Incógnitas : B, C, c.

Para hallar B, lo hacemos a través de su seno :

$$\text{sen}\,B = \frac{b\cdot\text{sen}\,A}{a}$$

Entonces, $C = 180 - (A + B)$. Y c, lo hallamos a través del teorema de los senos : $c = \frac{a\cdot\text{sen}\,C}{\text{sen}\,A}$.

Para que exista un ángulo B cuyo seno sea $\frac{b\cdot\text{sen}\,A}{a}$, debe de ser $b\cdot\text{sen}\,A \leqslant a$. Ahora bien, suponiendo ya que $b\cdot\text{sen}\,A \leqslant a$, deben tenerse en cuenta varias posibilidades que influyen en el número de soluciones.

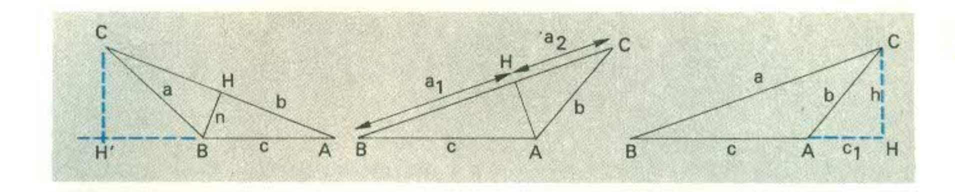


Fig. 30 Fig. 31 Fig. 32

Triángulos rectángulos. — Al ser el triángulo rectángulo, ya se conoce uno de sus ángulos, el recto. Los casos correspondientes a los dos que hemos estudiado serán los siguientes :

1) Resolver un triángulo rectángulo conociendo un cateto y un ángulo agudo.

2) Resolver un triángulo rectángulo conociendo la hipotenusa y un cateto.

En ambos casos no es necesario utilizar el teorema de los senos, sino únicamente la definición de las razones trigonométricas de un ángulo agudo. En cualquiera de los dos problemas, la solución es única.

Teorema y fórmulas de los cosenos. — El teorema de los senos no basta para resolver un triángulo del que se conocen dos lados y el ángulo comprendido, sino que se necesitan otras fórmulas que vienen dadas por el siguiente teorema : *El cuadrado de un lado de un triángulo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos, menos el doble del producto de estos dos lados por el coseno del ángulo entre ellos comprendido.*

Demostración : un lado de un triángulo puede ser opuesto a un ángulo agudo, recto u obtuso. Dejando aparte el caso del lado opuesto a un ángulo recto, que se resuelve a través del teorema de Pitágoras, sólo restan las otras dos posibilidades.

Primera : *lado opuesto a un ángulo agudo* (*fig.* 31). Sea el triángulo ABC. Trazando la altura correspondiente al lado BC, éste queda descompuesto en dos segmentos BH y HC. En el triángulo rectángulo AHB, se verifica : $h^2 = c^2 - a^2$, y en el triángulo rectángulo AHC :

$$b^2 = h^2 + a^2.$$

Como, por otra parte, $a_2 = a - a_1$, $a_2^2 = (a - a_1)^2 = a^2 - 2a \cdot a_1 + a_1^2$, al sustituir estos valores en la segunda igualdad, queda

$$b^2 = c^2 - a_1^2 + a^2 - 2a \cdot a_1 + a_1^2 = c^2 + a^2 - 2a \cdot a_1.$$

Finalmente, en el triángulo rectángulo AHB, se verifica que $a_1 = c \cdot \cos B$; sustituyendo esta relación en la igualdad anterior, obtenemos la fórmula definitiva

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B.$$

Segunda : *lado opuesto a un ángulo agudo* (*fig.* 32). En el mismo triángulo de la figura anterior, trazando la altura correspondiente al lado c, se obtiene el triángulo rectángulo BHC, en el que se verifica : $a^2 = h^2 + (c + c_1)^2 = h^2 + c^2 + 2cc_1 + c_1^2$. Ahora bien, en el triángulo rectángulo AHC, se tiene : $h^2 = b^2 - c_1^2$. Sustituyendo en la primera igualdad,

$$a^2 = b^2 - c_1^2 + c^2 + 2c \cdot c_1 + c_1^2 = b^2 + c^2 + 2c \cdot c_1.$$

Por otra parte, en el mismo triángulo AHC, se observa que $c_1 = b \cdot \cos(180 - A) = -b \cdot \cos A$. Sustituyendo este resultado en la primera igualdad, se obtiene finalmente : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$.

TERCER CASO. — Datos : $a, b,$ C; Incógnitas : A, B, c.

Por el teorema del coseno,

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C}.$$

Por el teorema de los senos, $\operatorname{sen} A = \dfrac{a \cdot \operatorname{sen} C}{c}$, y

$$B = 180 - (A + C).$$

CUARTO CASO. — Datos : a, b, c; Incógnitas : A, B, C. Aplicando el teorema de los cosenos, se tiene :

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}; \quad \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac};$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Triángulos rectángulos. — Por ser un triángulo rectángulo, uno de sus ángulos ya se conoce. Si además se conocen los dos catetos, pueden aplicarse las definiciones de las razones trigonométricas :

$$\operatorname{tg} B = \frac{b}{c}; \quad \operatorname{tg} C = \frac{c}{b}; \quad a^2 = b^2 + c^2.$$

No existe, para triángulos rectángulos, un caso análogo al cuarto ya estudiado, puesto que los tres lados de un triángulo rectángulo no son independientes entre sí, sino que, conocidos dos de ellos, se puede hallar el tercero.

Fórmulas logarítmicas para la resolución de triángulos. — *Primero y segundo casos.* — Cuando los datos del problema son números con muchas cifras o con decimales, es preferible, en la práctica, calcular el logaritmo del elemento desconocido, y después hallar este elemento en las tablas.

Ejemplo : calcular un triángulo conocidos los siguientes datos : $a = 15'25$ m, $A = 60^0 35'$, $B = 47^0 15'$

De las fórmulas de los senos :

$$b = \frac{a \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A}, \quad c = \frac{a \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A}$$

$$\Longrightarrow \begin{array}{l} \log b = \log a + \log \operatorname{sen} B + \operatorname{colog} \operatorname{sen} A \\ \log c = \log a + \log \operatorname{sen} C + \operatorname{colog} \operatorname{sen} A \end{array}$$

$C = 180 - (A + B) = 72^0 10'$

$\log a = 1'183270$

$\log \operatorname{sen} B = \bar{1}'865886$

$\log \operatorname{sen} C = \bar{1}'978615$

$\log \operatorname{sen} A = 1'940054$; $\operatorname{colog} \operatorname{sen} A = 0'059946$

$\log b = 1'109\,102$; $\quad b = \operatorname{antilog} 1'109\,102 = 12'856$ m.

$\log c = 1'221\,831$; $\quad c = \operatorname{antilog} 1'221\,831 = 16'666$ m.

Fórmulas de las tangentes. — Sabemos, por el teorema de los senos, que se verifica :

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}.$$

Llamando k al valor común de estas tres razones, podemos escribir : $a = k \cdot \operatorname{sen} A$, $b = k \cdot \operatorname{sen} B$, $c = k \cdot \operatorname{sen} C$, y operando :

$$\frac{a + b}{a - b} = \frac{k \cdot \operatorname{sen} A + k \cdot \operatorname{sen} B}{k \cdot \operatorname{sen} A - k \cdot \operatorname{sen} B} = \frac{k\,(\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B)}{k\,(\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B)}$$

$= \dfrac{\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B}$. Aplicando la fórmula de transformación en producto de la suma y de la diferencia de los senos de dos ángulos, se obtiene :

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{2\,\mathrm{sen}\frac{A+B}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2}}{2\cos\frac{A+B}{2}\cdot\mathrm{sen}\frac{A-B}{2}}$$

$$=\mathrm{tg}\frac{A+B}{2}\cdot\mathrm{cotg}\frac{A-B}{2}=\frac{\mathrm{tg}\frac{A+B}{2}}{\mathrm{tg}\frac{A-B}{2}}.$$

Utilización de las fórmulas de las tangentes. — Supongamos que se conocen dos lados a, b y el ángulo comprendido C de un triángulo cualquiera. Entonces, también se conoce $\frac{A+B}{2}$, puesto que $A+B+C=180$, $\frac{A+B}{2}=90-\frac{C}{2}$, de modo que de la proporción $\frac{a+b}{a-b}=\frac{\mathrm{tg}\frac{A+B}{2}}{\mathrm{tg}\frac{A-B}{2}}$ se conocen tres términos, y el cuarto será entonces: $\mathrm{tg}\frac{A-B}{2}=\frac{(a-b)\cdot\mathrm{tg}\frac{A+B}{2}}{a+b}$. Una vez obtenido el ángulo $\frac{A-B}{2}$, que representaremos por α, se resolverá el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{A+B}{2}=90-\frac{C}{2}\\ \frac{A-B}{2}=\alpha\end{array}\right\}$$

Al sumar las dos ecuaciones miembro a miembro, se obtiene el ángulo A y, al restarlas, el B:

$$A=90-\frac{C}{2}+\alpha,\qquad B=90-\frac{C}{2}-\alpha.$$

Una vez conocidos los ángulos A y B, el cálculo del lado c se hace a través del teorema de los senos.

Ejemplo: resolver un triángulo conocidos $b=15'2$ m, $a=30'51$ m, $C=60^0 31'$.

De las fórmulas de las tangentes se deduce:

$$\log\mathrm{tg}\frac{A-B}{2}=\log(a-b)+\log\mathrm{tg}\frac{A+B}{2}+\mathrm{colog}(a+b);$$

$$\log\mathrm{tg}\frac{A-B}{2}=\bar{1}'729679;\ \frac{A-B}{2}=28^0 13'10''$$

$$\Longrightarrow\begin{cases}A=90-\frac{C}{2}+\frac{A-B}{2}=87^0 57'40''\\ B=90-\frac{C}{2}-\frac{A-B}{2}=31^0 31'20''\end{cases}$$

Para hallar c, de la fórmula $c=\frac{a\cdot\mathrm{sen}\,C}{\mathrm{sen}\,A}$ se deduce:

$$\log c=\log a+\log\mathrm{sen}\,c+\mathrm{colog}\,\mathrm{sen}\,A=\bar{1}'424485;$$
$$c=\mathrm{antilog}\,\bar{1}'424485=0'265757\text{ m.}$$

CÁLCULOS

$a+b=45'71$
$a-b=14'31$
$\frac{A+B}{2}=90-\frac{c}{2}=59^0 44'30''$

$\log(a+b)=1'660011$	$\log a=1'484442$
$\mathrm{colog}(a+b)=\bar{2}'339989$	$\log\mathrm{sen}\,C=\bar{1}'939768$
$\log(a-b)=1'155640$	$\log\mathrm{sen}\,A=\bar{1}'999725$
$\log\mathrm{tg}\frac{A+B}{2}=0'234050$	$\mathrm{colog}\,\mathrm{sen}\,A=\bar{2}'000275$

Fórmulas de Briggs. — Para un ángulo cualquiera A, se verifica: $\cos^2\frac{A}{2}=\frac{1+\cos A}{2}$. Aplicando el teorema del coseno, se tiene: $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$. Sustituyendo este valor de cos A en la igualdad anterior, se obtiene:

$$\cos^2\frac{A}{2}=\frac{1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}=\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{4bc}$$
$$=\frac{(b+c)^2-a^2}{4bc}=\frac{(b+c-a)(b+c+a)}{4bc};$$

$$\Longrightarrow\quad\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(b+c-a)(b+c+a)}{4bc}}.$$

El signo de la raíz cuadrada es positivo, porque tanto si A es agudo, como si es obtuso, $\frac{A}{2}$ es un ángulo agudo y su coseno, por tanto, es positivo.

Haciendo $a+b+c=2p$ (p es el semiperímetro), entonces $b+c-a=a+b+c-2a=2p-2a=2(p-a)$, y la fórmula queda $\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{2(p-a)\cdot 2p}{4bc}}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$. Análogamente se obtiene, para los demás ángulos, $\cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}}$; $\cos\frac{c}{2}=\sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$.

Ejemplo: resolver un triángulo conocidos $a=50$ m, $b=32$ m, $c=40$ m.

De la fórmula $\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$ se deduce:

$\log\cos\frac{A}{2}=\frac{1}{2}[\log p+\log(p-a)+\mathrm{colog}\,bc]$, y también

$\log\cos\frac{B}{2}=\frac{1}{2}[\log p+\log(p-b)+\mathrm{colog}\,ac]$,

$\log\cos\frac{C}{2}=\frac{1}{2}[\log p+\log(p-c)+\mathrm{colog}\,ab]$; sustituyendo en estas fórmulas los valores encontrados en los cálculos:

$\log\cos\frac{A}{2}=\bar{1}'859757;\quad\frac{A}{2}=43^0 36'42'',\ A=87^0 13'24''$

$\log\cos\frac{B}{2}=\bar{1}'973349;\quad\frac{B}{2}=19^0 52'5'',\ B=39^0 44'10''$

$\log\cos\frac{C}{2}=\bar{1}'951715;\quad\frac{C}{2}=26^0 31'13'',\ C=53^0 2'26''$

CÁLCULOS

$p=61$;	$\log p=1'785330$
$p-a=11$;	$\log(p-a)=1'041393$
$p-b=29$;	$\log(p-b)=1'462398$
$p-c=21$;	$\log(p-c)=1'322219$
$bc=1\,280$;	$\log bc=3'107210$
$ac=2\,000$;	$\log ac=3'301030$
$ab=1\,600$;	$\log ab=3'204120$

$\mathrm{colog}\,bc=\bar{4}'892790$
$\mathrm{colog}\,ac=\bar{4}'698970$
$\mathrm{colog}\,ab=\bar{4}'795880$

Geometría analítica

Recta real. Representación gráfica de los números reales. Coordenadas cartesianas en el plano. Distancia entre dos puntos. Punto de división de un segmento. Punto medio de un segmento. Ecuaciones. *De una recta. De la recta que pasa por dos puntos. Punto pendiente. Explícita de la recta. Canónica de la recta.* Rectas paralelas perpendiculares. Forma general de la ecuación de la recta. Paralelismo de rectas en su forma general. Ecuación de la recta paralela a una dada por un punto exterior a ésta. Perpendicularidad de rectas en forma general. Recta perpendicular a una dada, pasando por un punto exterior a ella. Condición para que dos rectas se confundan. Coordenadas del baricentro de un triángulo. — **Métrica del plano :** Ecuación normal de una recta. Reducción de la ecuación de una recta a la forma normal. Distancia de un punto a una recta. Ángulo de dos rectas.

Recta real. Representación gráfica de los números reales. — Cuando estudiamos el número real, vimos que era posible establecer una biyección entre dicho conjunto y los puntos de una recta. En efecto, tomando como punto cero (0) un punto cualquiera de la recta, a la derecha del mismo colocaremos los números positivos y a la izquierda los negativos. Tomando un segmento arbitrario como unidad, los números enteros quedan representados tomando dicho segmento sobre sí mismo el número de veces necesario.

Los números racionales también son inmediatos de representar. Por ejemplo, para representar el número $\frac{2}{5}$, se divide el segmento unidad en cinco partes, y después se toman dos veces el segmento obtenido a partir del origen.

Los números irracionales se pueden representar como límites de sucesiones de números racionales. Así, para representar el número *e*, se hace a través de hallar el límite de dos sucesiones convergentes de racionales : las 2, 2'7, 2'71, 2'717, ... y la 3, 2'8, 2'72, 2'718, ... De esta manera, a cada punto de una recta le corresponde un único número real e, inversamente, a cada número real le corresponde un único punto de la recta (*fig.* 1).

−2 0 $\frac{1}{5}$ +1 +2

Fig. 1

Coordenadas cartesianas en el plano. — Dos rectas de un plano que se corten pueden considerarse como un par de ejes coordenados. Si estas rectas son perpendiculares, los ejes se llaman *ortogonales* o *rectangulares* y, si no lo son, se llaman *oblicuos*. Nosotros, en nuestro estudio, vamos a considerar únicamente ejes ortogonales.

Los elementos que vamos a diferenciar en unos ejes de coordenadas son : *a*) *el origen de coordenadas* O, punto del plano obtenido como intersección de los dos ejes, y *b*) *los ejes propiamente dichos*, que reciben los nombres de eje de *abscisas* o eje de las X, el horizontal, y eje de *ordenadas* o eje de las Y, que es el vertical (*fig.* 2).

Con las consideraciones ya hechas en Álgebra, el plano hemos visto que lo podemos considerar como el producto cartesiano de R × R, donde R es la recta real.

Con esta consideración, un punto P cualquiera del plano lo podemos identificar a un par de números reales ($x\,y$) que llamaremos *coordenadas* de ese punto.

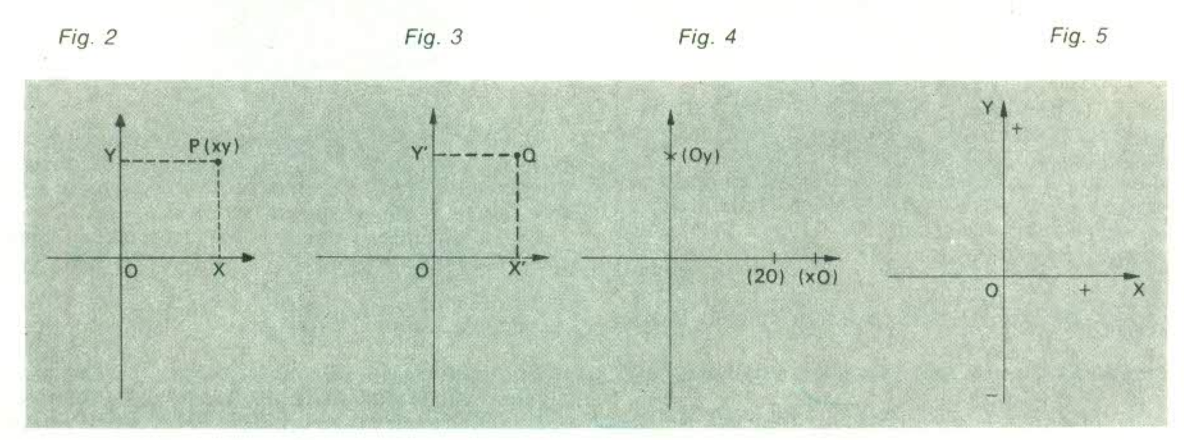
Si consideramos el origen de coordenadas como el par $(0\,0) \in R \times R$, es claro que el par ($x\,y$) corresponderá a un punto del plano cuya proyección sobre el eje de abscisas sea *x*, y cuya proyección sobre el eje de ordenadas sea *y* tal como puede verse en la *fig.* 2.

Recíprocamente, dado un punto Q del plano, Q cualquiera, podemos asignarle de forma única una pareja de números reales ($a\,b$). Este par ($a\,b$) lo obtenemos proyectando Q sobre los ejes OX y OY respectivamente. Tomando ahora $a = OX'$, $b = OY'$, habremos encontrado el resultado deseado (*fig.* 3).

Puede ocurrir que alguna de las dos coordenadas de un punto sea 0; en ese caso, dicho punto pertenece a alguno de los ejes coordenados. Por ejemplo (*fig.* 4) el punto (2 0), o en general el (x 0), está sobre el eje de las X, y los puntos de coordenadas (0 y) están sobre el eje de las Y.

Como convenio, aceptamos que el punto O es el origen de signos (*fig.* 5), tomando en OX el signo positivo a la derecha y el negativo a la izquierda. Para el eje de ordenadas, los signos positivos se toman hacia arriba, y los negativos hacia abajo.

Fig. 2 *Fig. 3* *Fig. 4* *Fig. 5*



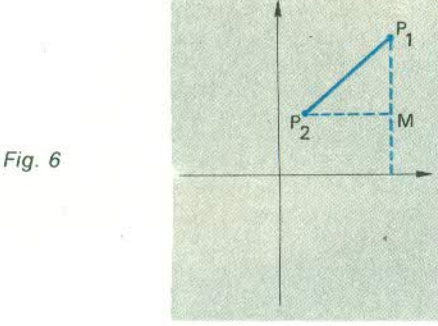


Fig. 6

Distancia entre dos puntos. — Dados dos puntos cualesquiera del plano, se trata de hallar la distancia entre dichos puntos. Sean $P_1(x_1\,y_1)$, $P_2(x_2\,y_2)$ (*fig.* 6).

En el triángulo rectángulo P_1P_2M, de lados $P_1P_2 = d$, $\overline{P_1M} = y_1 - y_2$, $\overline{P_2M} = x_1 - x_2$, se verifica :

$$d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2;\ d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Ejemplo : 1.° hallar la distancia entre P(0 3) y P(3 1). $d = \sqrt{(3-0)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$;

2.° hallar un punto que equidiste de $P_1(3\,2)$ y $P_2(1\,3)$.

Llamando $P(x\,y)$ a dicho punto se habrá de verificar :

$\overline{PP_1} = \sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2}$; $\overline{PP_2} = \sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2}$.

Igualando las dos expresiones : $(x-3)^2 + (y-2)^2 = (x-1)^2 + (y-3)^2 \iff x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 = x^2 - 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 \iff -4x + 2y + 3 = 0$.

Resultando, finalmente, que existen infinitos puntos que equidistan de P_1 y P_2. En efecto, todos los puntos de la mediatriz del segmento P_1P_2, puntos que forman la recta $2y - 4x + 3 = 0$.

Punto de división de un segmento. — Dado un segmento $\overline{AB}$, se trata de hallar un punto $P(xy)$ tal que la razón de las distancias orientadas $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$ sea un número real dado λ. Es decir $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \lambda$ (*fig.* 7).

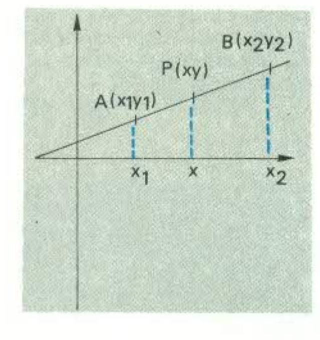


Fig. 7

Dado que los segmentos $\overline{PA}$ y $\overline{PB}$ son de signos contrarios, el cociente $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$ será negativo cuando P esté entre A y B. Si P estuviese fuera del segmento AB, entonces el cociente $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$ sería positivo. Una vez hechas estas aclaraciones, pasemos a hallar las coordenadas de $P(x\,y)$.

Sabemos que $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \lambda = \frac{\overline{xx_1}}{\overline{xx_2}} \iff$ pero $\begin{cases} \overline{xx_1} = -\overrightarrow{x_1x} = -(x - x_1) = x_1 - x \\ \overline{xx_2} = -x_2x = -(x - x_2) = x_2 - x \end{cases}$ de lo que deducimos : $\frac{x_1 - x}{x_2 - x} = \lambda$, y despejando x, se tiene $x = \frac{x_1 - \lambda x_2}{1 - \lambda}$.

Análogamente, se obtiene para la ordenada :

$$y = \frac{y_1 - \lambda y_2}{1 - \lambda}.$$

Punto medio de un segmento. — Si P es tal que la distancia de P a A es la misma que desde P a B, entonces $\overline{PA} = -\overline{PB}$, y $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = -1$, $\iff x = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$.

Ejemplo : hallar los puntos que dividen al segmento AB en cuatro partes iguales, A(2 0), B(– 1 4).

Llamemos $P_1(x_1\,y_1)$, $P_2(x_2\,y_2)$, $P_3(x_3\,y_3)$ a dichos puntos.

Para P_1 se verifica : $\frac{\overline{P_1A}}{\overline{P_1B}} = -\frac{1}{3}$; $x_1 = \frac{5/3}{4/3} = \frac{5}{4}$; $y_1 = \frac{4/3}{4/3} = 1$.

Para P_2 se verifica : $\frac{\overline{P_2A}}{\overline{P_2B}} = -1$; $x_2 = \frac{1}{2}$, $y_2 = \frac{4}{2} = 2$.

Para P_3 se verifica : $\frac{\overline{P_3A}}{\overline{P_3B}} = -3$, $x_3 = -\frac{1}{4}$, $y_3 = 1$.

En definitiva los puntos buscados son : $P_1\left(\frac{5}{4}, 1\right)$; $P_2\left(\frac{1}{2}, 2\right)$; $P_3\left(-\frac{1}{4}, 1\right)$.

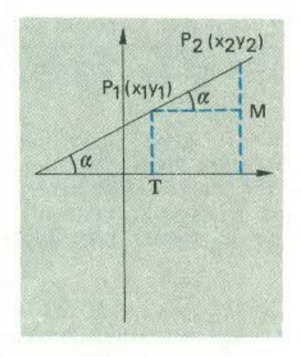


Fig. 8

DEFINICIONES. — Sea una recta r del plano (*fig.* 8) y dos puntos sobre ella P_1 y P_2. Llamaremos *pendiente* o *coeficiente angular* de dicha recta a la tangente del ángulo que forma r con el eje de abscisas.

Dicha tangente se puede hallar, teniendo en cuenta que en el triángulo rectángulo P_1P_2M se verifica :

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{P_2M}{P_1M} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Ecuaciones. — *De una recta.* — Es la relación algebraica que guardan entre sí todos los puntos de una recta. Dicha relación es posible hallarla por varios métodos. Uno de ellos, ya esbozado en un problema anterior,

consiste en lo que se denomina *método de los lugares geométricos*, es decir, hallar el lugar geométrico de los puntos del plano que cumplan una determinada relación.

De la recta que pasa por dos puntos. — Sabiendo que una recta queda determinada por dos puntos, es lógico suponer que dadas las coordenadas de dos puntos cualesquiera de una recta, podemos hallar la ecuación de dicha recta.

Para ello consideremos un punto $P(x\,y)$ genérico de la recta r de la que queremos hallar su ecuación.

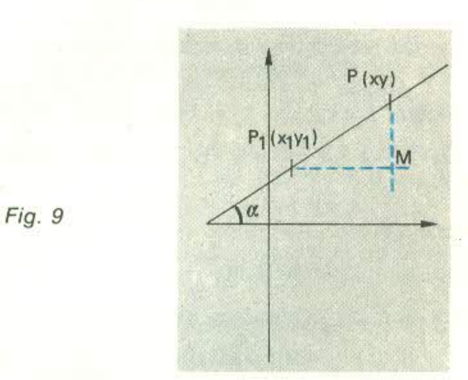


Fig. 9

En el triángulo rectángulo P P, M (*fig.* 9), se verifica : $\frac{y-y_1}{x-x_1} = \operatorname{tg}\alpha$. Por otra parte, sabemos que $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$, de lo que deducimos que $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{x-x_1}$. Relación en x e y que recibe el nombre de *ecuación de la recta que pasa por dos puntos*.

Punto pendiente. — Consideremos una recta r de la que conocemos su pendiente m, y un punto $P_1(x_1\,y_1)$ de ella. Se trata de conocer la ecuación de dicha recta.

En la *fig.* 10, $\operatorname{tg}\alpha = m = \frac{y-y_1}{x-x_1}$; $y - y_1 = m\,(x - x_1)$.

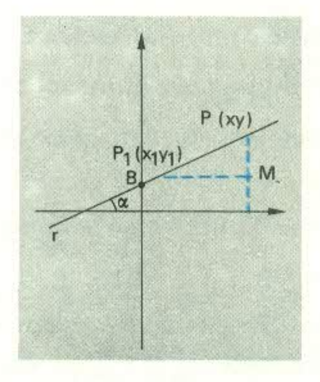


Fig. 10

Explícita de la recta. — Si en la ecuación punto pendiente $y - y_1 = m\,(x - x_1)$ despejamos y, nos queda : $y = y_1 + m\,(x - x_1)$; $y = mx - (mx_1 - y_1)$; llamando $m = a$; $mx_1 - y_1 = b$, queda $y = ax + b$, ecuación que recibe el nombre de *explícita*.

Haciendo en dicha ecuación $x = 0$, encontraremos las coordenadas del punto B intersección de la recta e con el eje OY. La ordenada b de dicho punto recibe el nombre de *ordenada en el origen*.

Las anteriores definiciones nos permiten hallar la ecuación de una recta, conocida su pendiente m, y su ordenada en el origen b. En efecto, dicha ecuación será : $y = mx + b$.

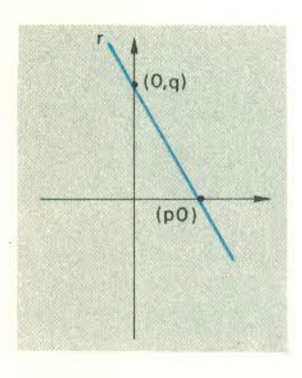


Fig. 11

Canónica de la recta. — Supongamos que la recta r corta al eje de abscisas en el punto $P(p\;0)$ y al eje de ordenadas en el punto $Q(0\,q)$ (*fig.* 11). Aplicando la fórmula de la ecuación de la recta que pasa por dos puntos P y Q, se tiene : $\frac{q-0}{0-p} = \frac{y-0}{x-p}$; $\frac{q}{-p} = \frac{y}{x-p} \iff$ $xq - qp + yp = 0$; $xq + yp = pq$. Dividiendo los dos miembros de la última ecuación por $p \cdot q$, se tiene : $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$, ecuación que recibe el nombre de *canónica de la recta*.

Esta forma de la ecuación de una recta es especialmente útil cuando conocemos los segmentos en que la recta corta a los ejes de coordenadas.

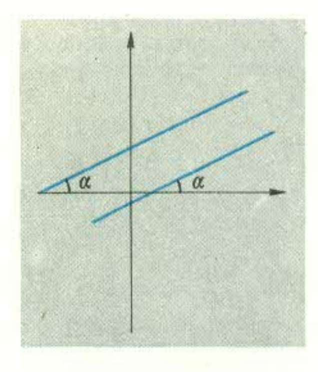


Fig. 12

Rectas paralelas y perpendiculares. — Sabemos que dos rectas paralelas, r y r', forman entre sí un ángulo de 0^0. Por lo tanto, el ángulo α que forman dichas rectas con el eje de abscisas es el mismo, con lo cual su tangente también será la misma. Ahora bien, dicha tangente es el coeficiente angular de dichas rectas, con lo que concluimos : *los coeficientes angulares de rectas paralelas son iguales* (*fig.* 12).

Si las dos rectas r y r' son perpendiculares (*fig.* 13), de coeficientes angulares $m_1 = \operatorname{tg}\alpha_1$ y $m_2 = \operatorname{tg}\alpha_2$ respectivamente, se tiene $\alpha_2 = \alpha_1 + \frac{\pi}{2} \implies \operatorname{tg}\alpha_2 = m_2 = \operatorname{tg}\left(\alpha_1 + \frac{\pi}{2}\right)$; pero $\operatorname{tg}\left(\alpha_1 + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{cotg}\alpha_1 = \frac{-1}{\operatorname{tg}}\alpha_1 = \frac{-1}{m_1}$,

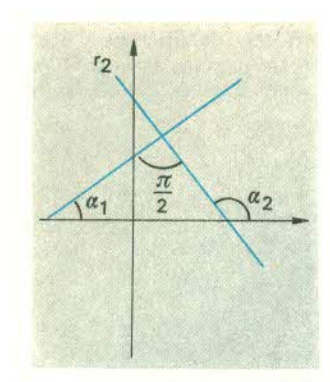


Fig. 13

o sea, $\operatorname{tg}\alpha_2 = m_2 = \frac{-1}{m_1}$, y concluimos : *dos rectas perpendiculares tienen los coeficientes angulares inversos y de signos contrarios.*

PROBLEMAS. — 1.° Hallar la ecuación de la recta que, pasando por (1 2), es perpendicular a la recta que pasa por (− 1 0), (− 1 − 3).

Solución : ecuación de la recta que pasa por (− 1 0), (− 2 − 3) : $\frac{-3}{-1} = \frac{y}{x+1}$; $y = 3x + 3$. Coeficiente angular $m_1 = 3$.

Ecuación de las rectas que pasan por (1 2) : $y - 2 = m(x - 1)$ haciendo $m = 3$, se tiene $y - 2 = 3(x - 1)$.

2.° Hallar las ecuaciones explícita y canónica así como la representación gráfica de la recta del problema anterior.

Solución : $y - 2 = 3(x - 1)$; $y = 3x - 3 + 2$;
$y = 3x - 1 \equiv$ Ecuación explícita $y - 3x = -1 \iff$

$$-y + 3x = 1 \iff \frac{y}{-1} + \frac{x}{1/3} = 1.$$

A partir de la ecuación canónica, deducimos (*fig.* 14) la forma general de la ecuación de la recta.

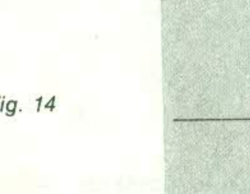


Fig. 14

Forma general de la ecuación de la recta. — Cualquiera de las ecuaciones ya encontradas para la recta, al efectuar operaciones y trasponer términos en ella, se transforma en otra de la forma $Ax + By + C = 0$, que recibe el nombre de *forma general*. Recíprocamente, cualquier ecuación de primer grado con dos incógnitas $Ax + By + C = 0$ representa siempre la ecuación de una recta.

Mediante fáciles transformaciones, la ecuación $Ax + By + c = 0$ la podemos convertir en explícita; en efecto,

$$y = \frac{-A}{B}x - \frac{C}{B} \implies m = a = \frac{-A}{B},\ b = \frac{-C}{B}.$$

Paralelismo de rectas en su forma general. — Sean dos rectas $Ax + By + C = 0$, y $A'x + B'y + C' = 0$. Como sabemos, $m = \frac{-A}{B}$, y $m' = \frac{-A'}{B'}$. Si dichas rectas son paralelas, se ha de verificar que $m = m'$;

$$\frac{-A}{B} = \frac{-A'}{B'} \iff \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'}.$$

Para que dos rectas sean paralelas, los coeficientes de las variables de sus ecuaciones generales han de ser proporcionales. Llamando k al cociente $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = k$, se deduce que $A = k \cdot A'$, $B = k \cdot B'$, y sustituyendo en la ecuación $Ax + By + C = 0$, se tiene :

$$A'kx + B'ky + C = 0.$$

Dividiendo los dos miembros por k, se tiene :

$$A'x + B'y + \frac{C}{k} = 0.$$

Y resulta que las ecuaciones de dos rectas paralelas son : $A'x + B'y + \frac{C}{k} = 0$, y $A'x + B'y + C' = 0$, con lo que deducimos que la ecuación general de todas las rectas paralelas a una dada $Ax + By + C = 0$ es de la forma $Ax + By + K = 0$, donde K es variable.

Ecuación de la recta paralela a una dada por un punto exterior a ésta. — Supongamos una recta $Ax + By + C = 0$, y un punto $P(x_1 y_1)$ exterior a dicha recta. Se trata de hallar la ecuación de la recta r, que siendo paralela a $Ax + By + C = 0$, pasa por $(x_1 y_1)$.

Si r es paralela a $Ax + By + C = 0$, tendrá de ecuación $Ax + By + K = 0$. Si pasa por $(x_1 y_1)$, se verificará que $Ax_1 + By_1 + K = 0 \implies K = -Ax_1 - By_1$, sustituyendo este valor de K, se tiene :

$$Ax + By - Ax_1 - By_1 = 0;\ A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0,$$

que es la ecuación general de una recta paralela a otra $Ax + By + C = 0$, y que pasa por $(x_1 y_1)$.

Perpendicularidad de rectas en forma general. — Sean dos rectas $Ax + By + C = 0$ y $A'x + B'y + C' = 0$. La condición para que dichas rectas sean perpendiculares, sabemos es : $m = \frac{-1}{m'} \iff \frac{-A}{B} = \frac{-1}{\frac{-A'}{B'}} \iff$

$$\frac{-A}{B} = \frac{B'}{A'} \iff AA' + BB' = 0.$$

Si $\frac{-A}{B} = \frac{B'}{A'} \implies \frac{-A}{B'} = \frac{B}{A'}$, llamando k a dicho cociente, se tiene : $\begin{cases} A = -B' \cdot k \\ B = \ \ A' \cdot k \end{cases}$. Valores que, sustituidos en la ecuación $Ax + By + C = 0$, producen :

$-B'kx + A'ky + C = 0$; dividiendo por k :

$-B'x + A'y + \frac{C}{k} = 0 \iff B'x - A'y - \frac{C}{k} = 0$; haciendo $\frac{-C}{k} = K$, se tiene finalmente $B'x - A'y + K = 0$; ecuación que es la general de todas las rectas perpendiculares a una dada $A'x + B'y + C' = 0$.

Recta perpendicular a una dada, pasando por un punto exterior a ella. — Sea la recta $Ax + By + C = 0$. Sabemos que las rectas perpendiculares a ella vienen dadas por la ecuación $Bx - Ay + K = 0$. Si hacemos que una de ellas pase por $P(x_1 y_1)$, se tiene : $Bx_1 - Ay_1 + K = 0$; sustituyendo este valor de K en la ecuación $Bx - Ay + K = 0$, se tiene : $Bx - Ay + Ay_1 - Bx_1 = 0$; $B(x - x_1) - A(y - y_1) = 0$, ó $\frac{x - x_1}{A} = \frac{y - y_1}{B}$.

Condición para que dos rectas se confundan. — Sean dos rectas $Ax + By + C = 0$, y $A'x + B'y + C = 0$. Si ambas ecuaciones representan la misma recta, habrán de tener la misma pendiente y la misma ordenada en el origen : $\frac{-A}{B} = \frac{-A'}{B'} \iff \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'}$ y además $\frac{C}{B} = \frac{C'}{B'} \iff \frac{C}{C'} = \frac{B}{B'}$; resumiendo los dos grupos de fórmulas, se tiene : $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$.

La condición para que dos rectas, en su forma general, se confundan es que sus coeficientes sean proporcionales.

Coordenadas del baricentro de un triángulo. — Dado un triángulo $A(x_1 y_1)$, $B(x_2 y_2)$, $C(x_3 y_3)$, se trata de hallar las coordenadas del baricentro de dicho triángulo (*fig.* 15).

Dicho baricentro se encuentra sobre una cualquiera de las medianas y a $\frac{2}{3}$ de distancia del vértice correspondiente

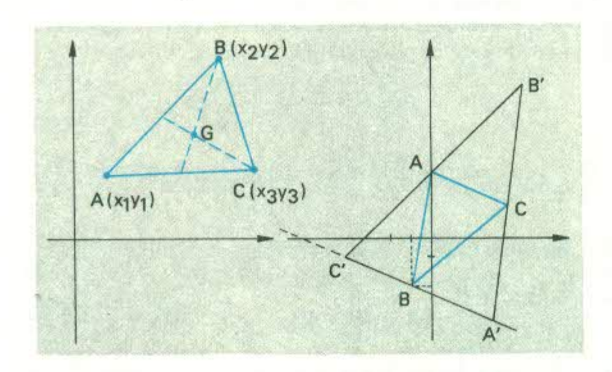


Fig. 15 *Fig. 16*

a dicha mediana. Sea $M(x_0 y_0)$ el punto medio de AC; sabemos que se verifica : $x_0 = \frac{x_1 + x_3}{2}$, $y_0 = \frac{y_1 + y_3}{2}$.

Llamando $G(xy)$ al centro de gravedad, sabemos que se verifica $\frac{\overline{GB}}{\overline{GM}} = -2$.

Aplicando las fórmulas ya conocidas para dividir un segmento, se tiene $x = \frac{x_2 + 2x_0}{1 + 2} = \frac{x_2 + 2\frac{x_1 + x_3}{2}}{3} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$ y para y se obtiene también $y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$.

Las coordenadas del baricentro de un triángulo son la media aritmética de las coordenadas de los tres vértices.

PROBLEMAS. — 1.° Hallar las ecuaciones de las rectas que son perpendiculares (y paralelas) a la $2x - y + 1 = 0$, y que pasan por el punto (1 1).

Sea $y = mx + n$ la ecuación de la recta paralela a $y = 2x + 1$. Se habrá de verificar que $m = 2$, y entonces $y = 2x + n$; como además ha de pasar por (1 1), se cumple que $1 = 2 \cdot 1 + n$, $n = -1$, y la ecuación será finalmente $y = 2x - 1$.

Sea $y = ax + b$ la ecuación de la recta perpendicular a $y = 2x + 1$, $\Longrightarrow a = \frac{-1}{2}$; como ha de pasar por (1 1), se cumple : $b = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, y la ecuación será

$$y = \frac{-1}{2}x + \frac{3}{2}.$$

2.° Hallar las ecuaciones y los vértices de un triángulo obtenido del triángulo cuyos vértices son A(0 4) B(− 1 − 3) C(5 2), trazando por cada vértice rectas paralelas a los lados opuestos de dichos vértices (*fig.* 16).

Solución : Ecuación recta

$$AB \cdot \frac{-3 - 4}{-1} = \frac{y - 4}{x} \iff 7x + 4 = y.$$

Ecuación recta

$$BC \cdot \frac{2 + 3}{5 + 1} = \frac{y + 3}{x + 1} \iff 5x - 6y - 13 = 0.$$

Ecuación recta

$$AC \cdot \frac{2 - 4}{5} = \frac{y - 4}{x} \iff 2x + 5y - 20 = 0.$$

Ecuación de la recta paralela a AB y que pasa por C(5 2) : $7(x - 5) + (y - 2) = 0$; $7x + y - 37 = 0$.
Ecuación de la recta paralela a AC y que pasa por (− 1 − 3) : $2(x + 1) + 5(y + 3) = 0$; $2x + 5y + 17 = 0$.

Ecuación de la recta paralela a BC y que pasa por (0 4) : $5x - 6(y - 4) = 0$; $5x - 6y + 24 = 0$.

Los lados del nuevo triángulo son por consiguiente :

$$A'C' = 2x + 5y + 17 = 0,$$
$$B'C' \equiv 5x - 6y + 24 = 0,$$
y
$$A'B' \equiv 7x + y - 37 = 0.$$

Los vértices serán : $B' \cdot \begin{matrix} 7x + y - 37 = 0 \\ 5x - 6y + 24 = 0 \end{matrix} \Big\} \begin{matrix} x = 198/47 \\ y = 353/47 \end{matrix}$;

$A' \cdot \begin{matrix} 2x + 5y + 17 = 0 \\ 7x + y - 37 = 0 \end{matrix} \Big\} \begin{matrix} x = 202/33 \\ y = -193/33 \end{matrix}$;

$C' \cdot \begin{matrix} 2x + 5y + 17 = 0 \\ 5x - 6y + 24 = 0 \end{matrix} \Big\} \begin{matrix} x = -869/124 \\ y = -37/62. \end{matrix}$

3.° Una recta determina en el origen coordenadas iguales, y pasa por (− 1 6). Hallar su ecuación.

Supongamos que el segmento común determinado entre los ejes sea p. Entonces la ecuación sería $\frac{x}{p} + \frac{y}{p} = 1$. Si hacemos que (− 1 6) pertenezca a dicha recta, se verificará : $\frac{-1}{p} + \frac{6}{p} = 1$; $-1 + 6 = p$, $p = 5$, y la ecuación de la recta será : $\frac{x}{5} + \frac{y}{5} = 1$.

4.° Hallar la ecuación de todas las rectas paralelas a $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$.

Solución : pasando la ecuación a forma general, se tiene :
$2x + 3y - 6 = 0$, y las rectas paralelas a la dada vienen dadas por la ecuación $2x + 3y + K = 0$, K variable.

Métrica del plano

Ecuación normal de una recta. — Supongamos una recta r, y su ecuación canónica $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$ (*fig.* 17). Trazando la perpendicular OH desde O a r, se obtiene un triángulo rectángulo OHB, del que deducimos : $p = \frac{d}{\cos\alpha}$, $q = \frac{d}{\operatorname{sen}\alpha}$, donde d es la distancia de la recta r al origen de coordenadas. Sustituyendo los valores de p y q en la ecuación canónica, encontramos :

$$\frac{x\cos\alpha}{d} + \frac{y\operatorname{sen}\alpha}{d} = 1 \iff x\cos\alpha + y\operatorname{sen}\alpha - d = 0. \quad \textbf{[1]}$$

Ecuación de la recta, esta última, que recibe el nombre de *normal*.

Fig. 17

Reducción de la ecuación de una recta a la forma normal. — Sea la recta r en la forma general

$$Ax + By + C = 0. \quad \textbf{[2]}$$

Si hacemos que [1] y [2] representen a la misma recta, se habrá de verificar $\frac{\cos\alpha}{A} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{B} = \frac{-d}{C}$. Llamando k al cociente común de estas razones, se tiene : $\cos\alpha = k \cdot A$, $\operatorname{sen}\alpha = k \cdot B$, $d = -k \cdot C$.

Elevando las dos primeras igualdades al cuadrado y sumando, tenemos :
$\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha = k^2(A^2 + B^2) \iff k^2(A^2 + B^2) = 1 \iff k = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$. Sustituyendo este valor de k en las igualdades anteriores, se verifica : $\cos\alpha = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$, $\operatorname{sen}\alpha = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$, $d = \frac{-C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$.

Dado que existe un doble signo para la raíz, escogeremos aquel que haga positiva la distancia d.

Sustituyendo los valores encontrados para $\cos\alpha$, $\operatorname{sen}\alpha$, y d en la ecuación normal, se tiene :

$$\frac{Ax}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} + \frac{By}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} + \frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = 0.$$

Ejercicios : reducir a forma normal la ecuación $-2x + 5y - 4 = 0$, $\sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{4 + 25} = \sqrt{29}$,

$$C = -4;\ d = \frac{-4}{\sqrt{29}} = \frac{4}{\sqrt{29}}.$$

Tomamos pues el signo más (+) de la raíz, y la ecuación normal de r será : $\frac{-2}{\sqrt{29}}x + \frac{5}{\sqrt{29}}y - \frac{4}{\sqrt{29}} = 0.$

Distancia de un punto a una recta. — Sea (*fig.* 18) una recta r de ecuación $Ax + By + C = 0$, y un punto $P(x_0\, y_0)$ exterior a ella; se trata de hallar la distancia PQ de P a r.

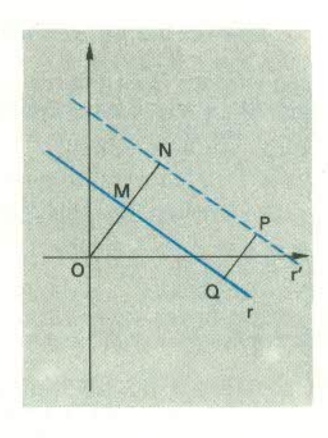


Fig. 18

Trazando desde O la perpendicular a las rectas r y r', donde r' es paralela a r pasando por P, se tiene que $\overline{PQ} = \overline{MN}$, pero $\overline{MN} = \overline{ON} - \overline{OM}$.

La ecuación de r' es, como sabemos, $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \iff Ax + By - (Ax_0 + By_0) = 0$, luego su distancia al origen O de coordenadas es

$$ON = \frac{Ax_0 + By_0}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Por otra parte, $\overline{OM} = \frac{-C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$; restando $\overline{OM}$ de $\overline{ON}$, se tiene : $\overline{ON} - \overline{OM} = \frac{Ax_0 + By_0}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} - \frac{-C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B_2}}$, y concluimos : *La distancia de un punto* $(x_0 y_0)$ *a una recta* $Ax + By + C = 0$ *es igual al primer miembro de la ecuación de la recta, sustituyendo las variables por las coordenadas* x_0, y_0, *dividido por la raíz cuadrada de la suma de los coeficientes de las variables de la ecuación de la recta.*

Ejercicio : hallar la distancia de $3x - 2y + 1 = 0$, al punto (1 3) :

$$d = \frac{3 \cdot 1 - 2 \cdot 3 + 1}{-\sqrt{13}} = \frac{-2}{-\sqrt{13}} = \frac{2}{\sqrt{13}}.$$

Ángulo de dos rectas. — Dadas dos rectas r_1 y r_2, se denomina ángulo de r_1 y r_2 al ángulo agudo que forman (*fig.* 19).

Llamando α_1 y α_2 a los ángulos que r_1 y r_2 forman con el eje de abscisas, se verifica que $\alpha_2 = \alpha_1 + \theta$, $\implies \theta = \alpha_2 - \alpha_1$. Tomando tangentes en ambos miembros de la igualdad, se tiene : $\operatorname{tg}\theta = \frac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1}{1 + \operatorname{tg}\alpha_2 \cdot \operatorname{tg}\alpha_1}$. Llamando, como ya es normal, a $\operatorname{tg}\alpha_1 = m_1$ y a $\operatorname{tg}\alpha_2 = m_2$, se tiene : $\operatorname{tg}\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 \cdot m_1}$.

La definición que hemos adoptado para θ es tal que $\operatorname{tg}\theta$ ha de ser siempre positivo; en el caso de que en los cálculos nos saliera negativo, con cambiarle de signo obtendríamos el resultado buscado.

Es inmediato comprobar, a partir de la relación $\operatorname{tg}\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 \cdot m_1}$, los resultados ya obtenidos para rectas paralelas y perpendiculares. En efecto, si r_1 y r_2 son paralelas, entonces $\theta = 0$ y $\operatorname{tg}\theta = 0$, verificándose que $\frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 \cdot m_1} = 0$, relación que implica la igualdad $m_2 = m_1$.

Si por el contrario r_1 y r_2 son perpendiculares, $\theta = \frac{\pi}{2}$, y $\operatorname{tg}\theta = \infty$, con lo que tenemos que $\frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 \cdot m_1} = \infty$, $\Longrightarrow 1 + m_2 \cdot m_1 = 0$, $\Longrightarrow m_2 = \frac{-1}{m_1}$. Resultados ya conocidos anteriormente.

PROBLEMAS: 1.° Hallar el ángulo formado por las rectas $x - y + 3 = 0$ y $5x + y - 1 = 0$:

$$m_1 = 1,\quad m_2 = -5,\quad \operatorname{tg}\theta = \frac{-5-(+1)}{1+(-5)\cdot 1} = \frac{-6}{-4} = \frac{3}{2}.$$

2.° Hallar la distancia entre las rectas $2x - y + 5 = 0$ y $2x - y + 3 = 0$.

La distancia entre ambas rectas podemos considerarla como diferencia entre las distancias de cada una de ellas al origen: $\overline{ON} - \overline{OM} = d$. Pero $\overline{ON} = \frac{-C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{-5}{-\sqrt{5}} = \sqrt{5}$; $\overline{OM} = \frac{-3}{-\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$;

$$\overline{ON} - \overline{OM} = \sqrt{5} - \frac{3\sqrt{5}}{5} = 2\sqrt{5} \text{ unidades de longitud.}$$

3.° Desde el punto (1 2) se traza una perpendicular a $3x - 4y + 6 = 0$. Hallar a qué distancia pasa dicha perpendicular de (3 4).

Los coeficientes angulares de las dos rectas, ya que son perpendiculares, verificarán: $m_2 = \frac{-1}{m\,1}$, $m_1 = \frac{-A}{B} = \frac{3}{4}$; $m_2 = \frac{-4}{3}$.

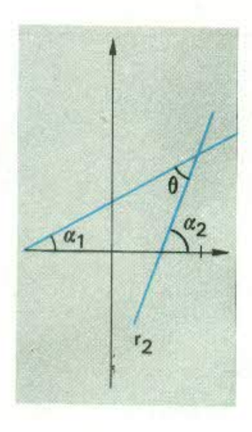


Fig. 19

Ecuación de la perpendicular: $y - 2 = -\frac{4}{3}(x-1) \Longleftrightarrow 4x + 3y - 10 = 0$. Distancia de (3 4) a $4x + 3y - 10 = 0$:

$$d = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{14}{5} \text{ unidades de longitud.}$$

4.° Hallar el lugar geométrico de los puntos del plano equidistantes del origen y de la recta $x - y = 1$.

Sea $P(x\,y)$ un punto genérico de dicho lugar geométrico.

Distancia $[(x\,y),(0\,0)] = \sqrt{x^2+y^2}$.

Distancia $[(x\,y),(x-y-1=0)] = \frac{x+y-2}{\sqrt{2}}$.

Se habrá de verificar que: $\sqrt{x^2y^2} = \frac{x+y-2}{\sqrt{2}}$.

$$\sqrt{x^2+y^2} = \frac{x+y-2}{\sqrt{2}} \Longleftrightarrow \sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2} = (x+y-2);$$

$$2(x^2+y^2) = x^2+y^2+2xy-4x-4y+4;$$
$$x^2+y^2-2xy+4x+4y-4=0.$$

El lugar geométrico pedido es la cónica

$$x^2+y^2-2xy+4x+4y-4=0.$$

5.° Hallar el área del triángulo de vértices A(1 0), B(−2 1), C(3 2) [*fig.* 20].

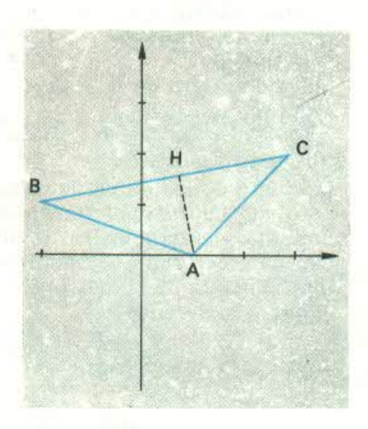


Fig. 20

$$S = \overline{BC}\cdot\overline{AH};\quad \overline{BC} = \sqrt{(3+2)^2+(2-1)^2} = \sqrt{26}.$$

Ecuación de BC:

$$\frac{2-1}{3-(-2)} = \frac{y-1}{x-(-2)};\ x - 5y + 7 = 0.$$

Ecuación de la perpendicular a BC, que pasa por A:

$$y - 0 = -5(x-1);\ y = -5x + 5.$$

Intersección de BC y AH:

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{x}{5}+\frac{7}{5} \\ y &= -5x+5 \end{aligned}\right\}\ \begin{aligned} x &= 9/13 \\ y &= 20/13 \end{aligned}\quad H\left(\frac{9}{13}\,\frac{20}{13}\right).$$

$$\text{Distancia } AH = \sqrt{\left(\frac{9}{13}-1\right)^2+\left(\frac{20}{13}\right)^2} = \sqrt{\frac{416}{13}}.$$

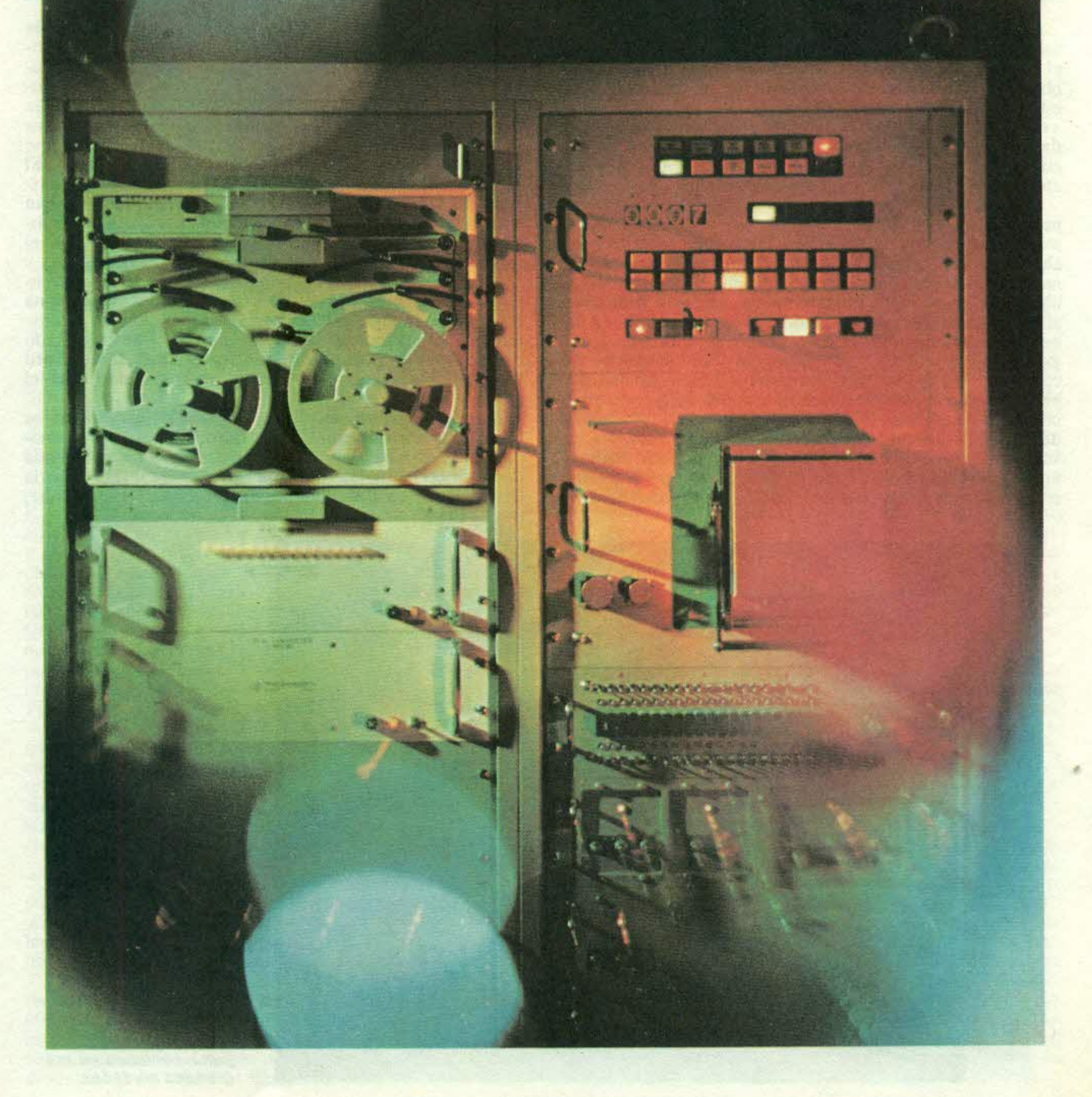
$$S = \frac{1}{2}\sqrt{26}\cdot\frac{\sqrt{416}}{13} = \sqrt{\frac{416}{26}} = 4 \text{ unidades de superficie.}$$

TABLA DE NOTACIONES Y SÍMBOLOS MATEMÁTICOS

$\{...\}$	conjunto	$+$	más
$\Longrightarrow$	implica	$-$	menos
$\Longleftrightarrow$	si y sólo si	$\times$ ó $\cdot$	multiplicado por
$\forall$	para todo	: ó /	dividido por
$\exists$	existe	$\sqrt[n]{\ }$	raíz enésima de
$\in$	pertenece a, es un elemento de	log.	logaritmo de
$\notin$	no pertenece a	ln	logaritmo neperiano de
$\subset$	contenido, incluido	$>$	mayor que
$\not\subset$	no contenido	$<$	menor que
$\cap$	intersección	$=$	igual
$\cup$	unión	$\neq$	desigual
$\complement A_B$	complementario de A respecto de B	$\leqslant$	menor o igual que
$\varnothing$	conjunto vacío	$\geqslant$	mayor o igual que
$A \times B$	producto cartesiano de A por B	∞	infinito
$f(A)$	imagen del conjunto A a través de la función f	V	variaciones
		P	permutaciones
$f^{-1}(B)$	imagen inversa de B originada por f	C	combinaciones
R	recta real	!	factorial de
R^n	producto cartesiano de $\overbrace{R \times R \times R \times \ldots \times R}^{n \text{ veces}}$	Σ	suma
		Δ	incremento
C	conjunto de los números complejos	π	3,1416, relación constante entre la circunferencia y su diámetro
Z	conjunto de los números enteros		
Q	conjunto de los números racionales	S	superficie o área
V^n	espacio vectorial de dimensión n	V	volumen
det. (A)	determinante de la matriz (a_{ij})	b	base
$\lim\limits_{x \to x_0^+}$	límite a la derecha	h	altura
		sen	seno
$\lim\limits_{x \to x_0^-}$	límite a la izquierda	cos	coseno
		tg	tangente
		sec	secante
$\int_a^b f(x)dx$	integral de la función $f(x)$ entre los intervalos a y b	cosec	cosecante
		cotg	cotangente

Informática

Fot. M.B.B.



Informática

Reseña histórica. Sistemas de numeración y ábacos. — **El ordenador :** Órganos de entrada y salida : Lector y perforadora de tarjetas. Cintas perforadas y magnéticas. Lectores ópticos. Terminales. Discos magnéticos. Impresoras. Consola. — Unidad central de tratamiento. — Memorias : Clases de memorias. Anillos de ferrita. Memorias de cinta, de disco y de tambor. — **Tratamiento de la información :** Toma de datos. Registro en el soporte. — **Divisiones de la Informática :** Informática analítica. Informática sistemática y lógica. Informática física y tecnológica. Informática metodológica. — Informática aplicada : Aplicaciones militares. Aeronáutica y espacio. Química, ingeniería e industria. Gestión de empresas. Otras aplicaciones. — **Consideraciones finales.**

Se entiende por *Informática,* palabra formada por la asociación de los términos INFORMación y autoMÁTICA, el conjunto de métodos y mecanismos que tienen como objetivo el tratamiento racional y automático de la información. Ésta, cuyo sentido no se limita sólo al de «noticias», sino que se extiende también a todos los datos referentes a la comunicación, se compone de un contenido y de una forma o *soporte,* siendo precisamente este último el que se va a estudiar.

La Informática nació cuando el hombre sintió la necesidad de almacenar y ordenar los múltiples conocimientos heredados de sus antepasados para tenerlos a su alcance y utilizarlos a su debido tiempo. El ordenador, máquina destinada a procesar los datos, ha llegado a liberar de los trabajos puramente mecánicos y rutinarios al ser humano que, de este modo, tiene la posibilidad de dedicarse a tareas más útiles y creativas. Las empresas, grandes y pequeñas, se esfuerzan por disponer de computadoras y, si sus recursos financieros no les permiten adquirirlas, recurren al alquiler de las mismas, con o sin derecho de compra, e incluso a la contratación de horas en un centro de cálculo especializado. En la actualidad, ningún Estado, aunque carezca de medios, puede prescindir de esta nueva técnica ya que la potencia económica de un país depende en gran parte de ella.

Reseña histórica. — El verdadero desarrollo de la Informática se inició después de la Segunda Guerra mundial. No obstante, se habían realizado en épocas anteriores investigaciones relacionadas con el tratamiento automático de la información y el inglés Charles BABBAGE (1792-1871) había inventado una *calculadora,* que nunca se fabricó, para ejecutar una serie de operaciones con datos previamente registrados en tarjetas perforadas. El norteamericano Hermann HOLLERITH (1860-1929) construyó en 1885 las primeras máquinas que funcionaban con esas tarjetas y el sistema empleado fue perfeccionado por su compatriota Legrand POWERS y por el ingeniero noruego Frederik BULL (1882-1925).

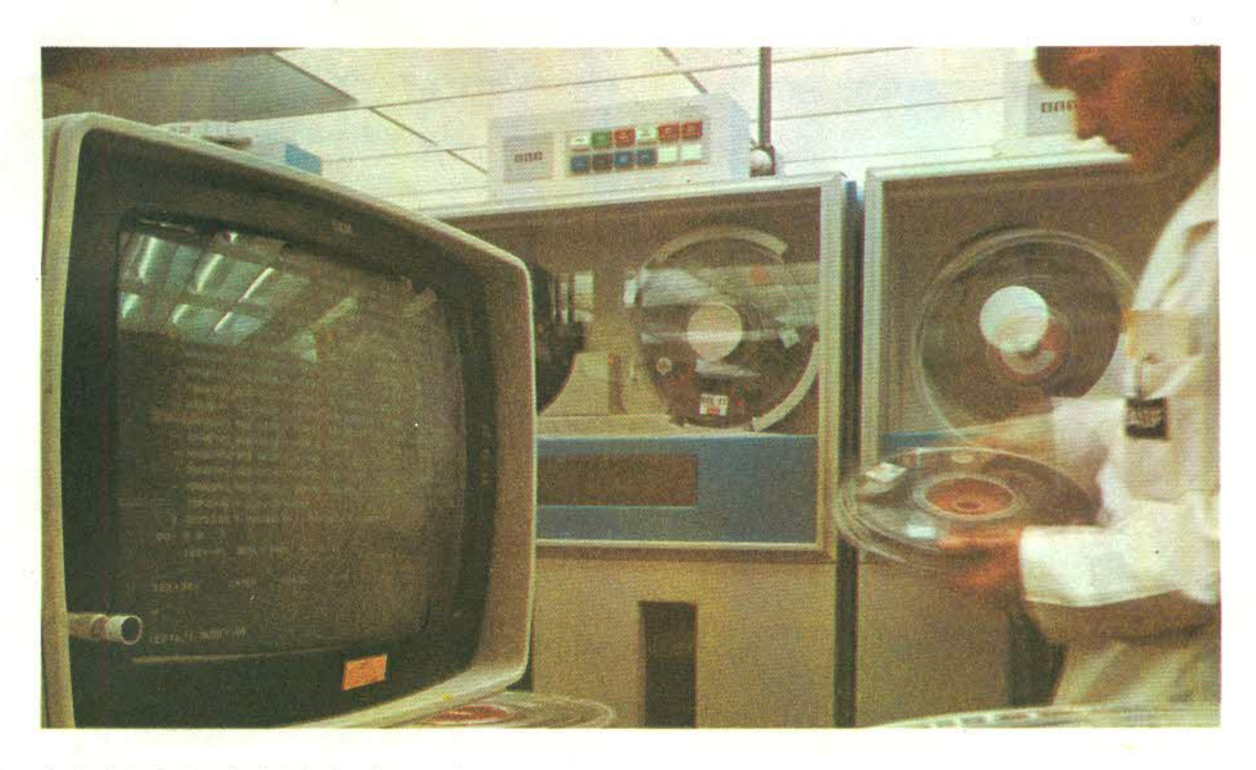
El primer ordenador destinado a efectuar largas y complicadas series de operaciones sin intervención humana estaba basado en la calculadora antes mencionada y constaba de componentes electromecánicos. Fue concebido en 1937 por el profesor de la Universidad de Harvard Howark AIKEN, n. en 1900, y fue bautizado con el nombre MARK I.

La tecnología electrónica aplicada a la Informática se inició con el ordenador ENIAC, fabricado en la Universidad de Pensilvania en 1946. La primera máquina dotada de memoria fue la llamada EDVAC, realizada en la Universidad de Princeton. Ésta era capaz de registrar,



Fot. Lauros

Los ordenadores y la televisión están al servicio de los funcionarios encargados de la regulación de la circulación automovilística en las grandes ciudades.


Fot. B.A.S.F.

La calculadora trata, siguiendo las instrucciones del programador, la información almacenada en soportes magnéticos.

conservar y restituir datos en un momento determinado, gracias a un descubrimiento del matemático norteamericano John VON NEUMANN (1903-1957). A la misma época corresponde el ordenador denominado EDASC, que empezó a funcionar en el año 1947 en la Universidad de Cambridge (Massachusetts).

Los países europeos también contribuyeron de modo notable al desarrollo de la Informática. El alemán Konrad ZUSE, n. en 1910, consiguió poner en funcionamiento las máquinas Z3 y Z4 antes de concluir la guerra, y el francés François RAYMOND, n. en 1914, diseñó una calculadora automática en 1949. A partir de entonces empezó la comercialización de este tipo de máquinas con las calculadoras de tarjetas perforadas IBM 604 y BULL Gamma 3, con los grandes ordenadores que reciben los nombres de UNIVAC 1 e IBM 701 y con otros más de tamaño medio, como el IBM 650 y el BULL Gamma de tambor. Todos ellos contenían tubos de vacío, pero, en 1960, éstos se sustituyeron por transistores.

En 1965, el modelo IBM 360, sumamente perfeccionado y capaz de resolver los problemas más complicados, señala el principio de lo que recibe el nombre de tercera generación de ordenadores. Éstos son a la vez numéricos y alfanuméricos, es decir, procesan lo mismo letras que cifras y se prestan tanto al cálculo científico como al tratamiento de la gestión.

Sistemas de numeración y ábacos. — El primer sistema conocido de numeración era de base 5, por analogía con los cinco dedos de la mano, pero surgieron luego otros de base 6, 8 e, incluso, 16, y al final se impuso el de base 10, adoptado casi universalmente.

La mano, primera calculadora digital a la que todavía recurren los escolares más jóvenes para calcular o efectuar operaciones aritméticas sencillas, se revela insuficiente cuando se trata de contar colecciones que sobrepasan varias decenas de objetos. Para resolver esta dificultad se inventó en China, hace unos cinco mil años, el *ábaco*, verdadera calculadora que consiste en un cuadro rígido con cierto número de alambres transversales divididos en dos partes por una barra vertical. En estos alambres se hallan ensartadas bolitas agujereadas. Las cinco que están a un lado de la barra representan las unidades y una o dos, en la otra parte, tienen el valor de cinco unidades. Las bolas de cada fila equivalen a unidades diez veces mayores que las de la fila inmediatamente inferior. Este instrumento, con el que es posible realizar operaciones sencillas e incluso extraer raíces, no permite, sin embargo, comprobar los cálculos. La *máquina de Pascal*, construida en 1642 por el filósofo y matemático francés del mismo nombre, constituye un progreso evidente al sustituir el alambre por unas ruedas dentadas en las que los dientes desempeñan un papel semejante al que tenían las bolas. El cambio de fila al pasar, por ejemplo, de las unidades a las decenas es automático, ya que, cuando una rueda completa una vuelta, la siguiente es arrastrada por medio de una uña. Este invento supuso en aquella época una ayuda notable para efectuar el cálculo aritmético.

El ordenador

El *ordenador*, principal instrumento de la Informática, llamado también *computadora* (del inglés *computer*), es un conjunto de máquinas conectadas eléctricamente entre sí que efectúan, de manera automática y a partir de datos suministrados por el hombre, una serie de operaciones aritméticas y lógicas según unos esquemas reunidos en los *programas*. Su funcionamiento se rige siempre por el mismo principio, aunque existe un gran número de modelos que se distinguen unos de otros por la forma, el tamaño o la velocidad de ejecución. Los componentes fundamentales de estos aparatos son los *órganos de entrada y salida*, la *unidad central de tratamiento* y las *memorias*.



Fot. N.C.F.

La unidad de cálculo electrónico constituye un equipo imprescindible en cualquier empresa de concepción moderna.

Órganos de entrada y salida

La información entra y sale de la máquina en forma de letras, cifras o signos grabados en tarjeta o cinta perforada o también en cinta o disco magnético.

Lector y perforadora de tarjetas. — El *lector de tarjetas*, que alimenta el ordenador con los datos contenidos en tarjetas perforadas, puede ser mecánico o fotoeléctrico. En el primer tipo, las tarjetas pasan por delante de unas escobillas que detectan en cada columna de la cartulina la ausencia o presencia de perforaciones. Éstas, que son informaciones codificadas, deben transformarse, por medio de la unidad de lectura, en elementos binarios, los cuales, mediante impulsos eléctricos, llegan a la memoria. La tarjeta, terminada dicha labor de prospección, se dirige al almacén receptor. El segundo tipo de lector es similar al anterior, pero, en lugar de escobillas, está dotado de células fotoeléctricas, que, según haya o no perforación, permiten o impiden el paso de una corriente de excitación.

La *perforadora* de tarjetas se encuentra casi siempre situada en la misma unidad que el lector y el conjunto así formado suele llamarse «lector-perforador». La información procedente del ordenador se traduce en una serie de agujeros en las diferentes columnas de la tarjeta y ésta, una vez acabada la operación, se dirige al almacén receptor.

Cintas perforadas y magnéticas. — Por un procedimiento similar al de las tarjetas, cuya capacidad es limitada, la información puede registrarse también en cintas de papel perforadas, que se leen con una célula fotoeléctrica.

Existen asimismo bobinas de cinta magnética, de aspecto muy parecido a las de los magnetófonos, pero de mejor calidad al ser más sensibles los dispositivos de lectura y escritura y tener una velocidad superior de funcionamiento. Este sistema de grabación se basa simplemente en la imantación de la capa de óxido de hierro que recubre las cintas.

Lectores ópticos. — Los *lectores ópticos*, que se valen del principio de la célula fotoeléctrica y se utilizan sobre todo en los bancos, correos, servicios estadísticos, etc., llevan a cabo, sin ninguna transcripción ni soporte intermedio, una exploración directa de documentos como cheques, tarjetas o cuestionarios. La presencia de marcas o señales (caracteres alfanuméricos, trazos magnéticos o con lápiz negro) origina una variación en la intensidad del flujo luminoso de la célula.

Terminales. — Los *terminales*, aparatos situados en general lejos del ordenador y conectados con él por radio o teléfono, desempeñan la función de introducir o tomar datos mediante máquinas de escribir eléctricas, teclados con pantallas de visualización, lectores de tarjetas e impresoras o incluso pequeñas computadoras con ciertos dispositivos específicos para efectuar cálculos aritméticos y lógicos.

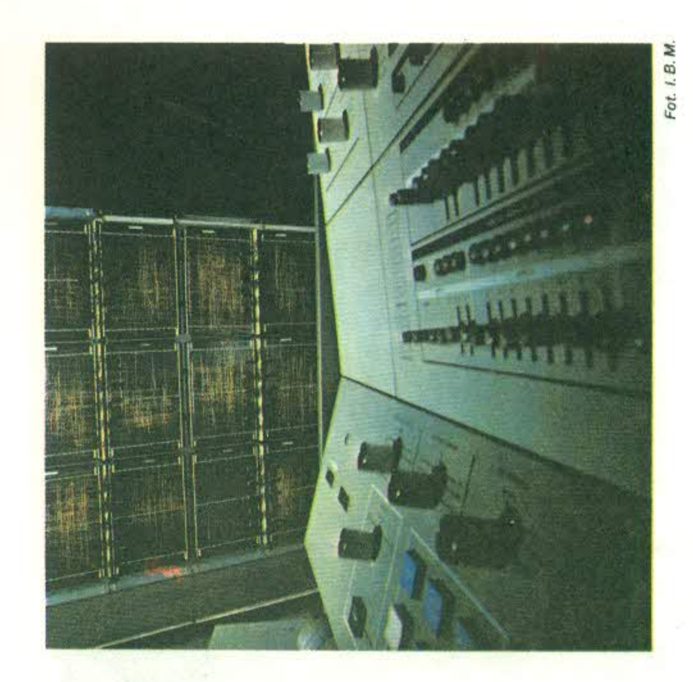
Discos magnéticos. — Los *discos magnéticos* constituyen al mismo tiempo un órgano de entrada y salida y una memoria magnética auxiliar donde se encuentran rápidamente y en el momento que se desee las informaciones grabadas. Se reúnen para formar pilas *(disk-pack)*, animadas de un movimiento rotatorio, en las que cada uno de los componentes tiene las dos caras magnetizadas, con la excepción de la parte exterior del primero y del último. Los datos procedentes de la memoria central, mediante dos cabezas de lectura y escritura, se graban en ambas caras. Éstas se dividen en varias *pistas* concéntricas y la agrupación de aquéllas que tienen el mismo índice constituye un *cilindro*. El acceso a las zonas de información es inmediato y permite prescindir de los datos que carecen de interés en un momento determinado. Una unidad de discos se puede comparar con un diccionario, ya que para hallar en éste una palabra basta abrirlo por la página en cuya parte superior se encuentra el grupo de letras con el que empieza el vocablo buscado, sin tener que consultar el libro entero.

Impresoras. — Las *impresoras* son órganos de salida que escriben las informaciones procedentes de la memoria central del ordenador o los resultados de un tratamiento. Hay que distinguir, entre los diferentes modelos existentes, los que están provistos de *ruedas, barras* o *cadenas*.

Los primeros, considerados lentos, son capaces de imprimir 120 caracteres o signos, correspondientes a las 120 ruedas que tienen. Cada una de éstas tiene 48 tipos (letras del alfabeto, cifras, signos de puntuación, blancos, etc.) y todas adoptan en un momento dado la disposición idónea para escribir de una sola vez la línea completa.

Los segundos, algo más rápidos, poseen un máximo de 144 caracteres o signos sujetos a una varilla metálica que se mueve horizontalmente de modo rectilíneo y

Consola o pupitre de una máquina de proceso de datos.


Fot. I.B.M.

alterno. Un martillo, accionado por un electroimán, presiona la barra contra el papel cuando el tipo seleccionado pasa delante de la zona de impresión.

Los terceros tienen un sistema análogo al anterior, aunque son más rápidos, y están provistos de una banda metálica circular que gira a velocidad constante.

Algunos ordenadores pequeños sustituyen la impresora por un teclado de máquina de escribir, cuyo funcionamiento (cambio de línea y de hoja, retorno del carro) se halla previamente programado para efectuar la impresión.

Consola. — La *consola* o *pupitre*, órgano indispensable de control que permite la observación de ciertos resultados en el transcurso de la realización de un programa y la transmisión de instrucciones al ordenador, es un tablero de mandos con una serie de botones, conmutadores, señales acústicas e indicadores luminosos. El operador, sirviéndose de estos dispositivos, puede poner en funcionamiento o parar la computadora, introducir nuevos datos, alterar el plan de trabajo o modificar las selecciones de entrada y salida.

Unidad central de tratamiento

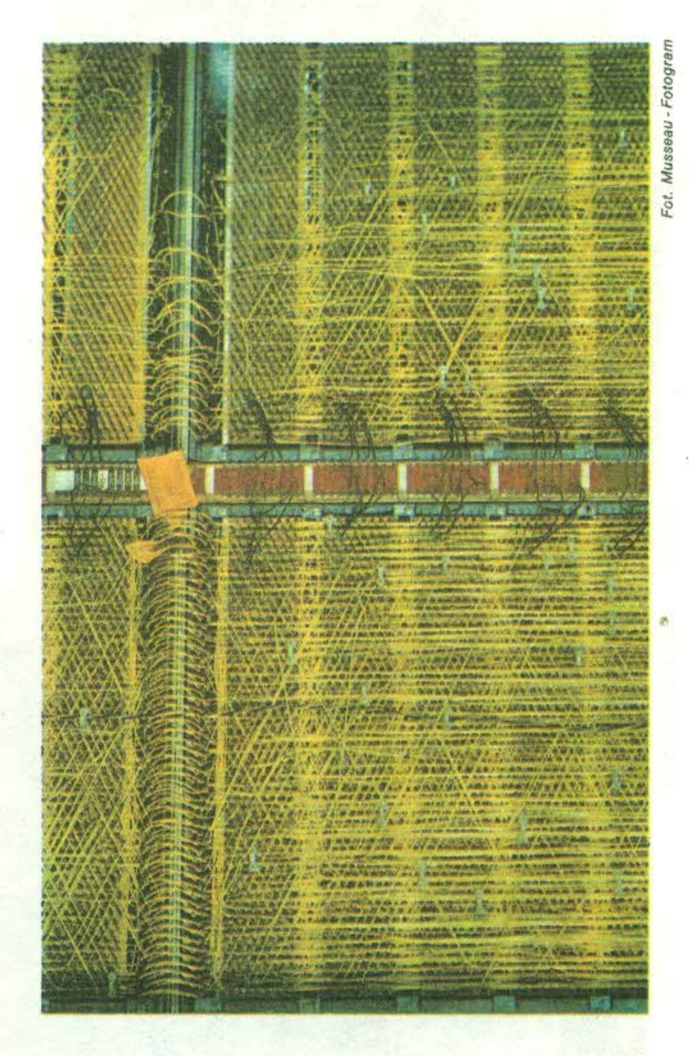
La *unidad central de tratamiento* se compone de circuitos aritméticos o lógicos, una memoria central, que contiene los programas y recibe los datos necesarios para llevarlos a cabo, y conexiones con las unidades especializadas.

Los *órganos* o *circuitos de cálculo*, que efectúan las operaciones aritméticas y lógicas propias del tratamiento de la información, se encuentran situados en la memoria central y reciben el nombre de *sumadoras*. Un ordenador lleva a cabo una sucesión de sumas o de restas para obtener un producto o un cociente. Los circuitos suelen ir montados en serie o en paralelo. En el primer caso se repiten las operaciones varias veces, tantas como cifras tiene el mayor de los sumandos, mientras que en el segundo, con una simple operación, se consigue el resultado. Este último método proporciona, por tanto, mayor rapidez en los cálculos y un rendimiento muy superior al citado anteriormente.

Los *órganos de conmutación* sirven para abrir o cerrar los circuitos lógicos de las operaciones. En Informática sólo existen dos posibilidades, claramente determinadas por la disyuntiva «o» o por la copulativa «y» (A o B, A y B). Cada opción o caso puede, a su vez, ser la combinación de otros varios. Hay tres tipos de órganos de conmutación : uno que invierte los datos de entrada, otro que ejecuta una acción únicamente en presencia de un fenómeno F_1, de otro F_2 o de los dos, y un tercero que actúa si éstos se verifican de modo simultáneo.

Los *órganos de mando*, verdadero cerebro de la máquina, son circuitos electrónicos que distribuyen las instrucciones a las diferentes partes de un ordenador y controlan su buen funcionamiento (aceptación de los datos, apertura de fichero, orden de lectura, etc.). Los equipos y dispositivos de la computadora, que constituyen el llamado *hardware* o *maquinaria*, se coordinan entre sí mediante el conjunto de los programas, denominado *software* o *logicial*.

La memoria central se estudiará a continuación.


Fot. Musseau - Fotogram

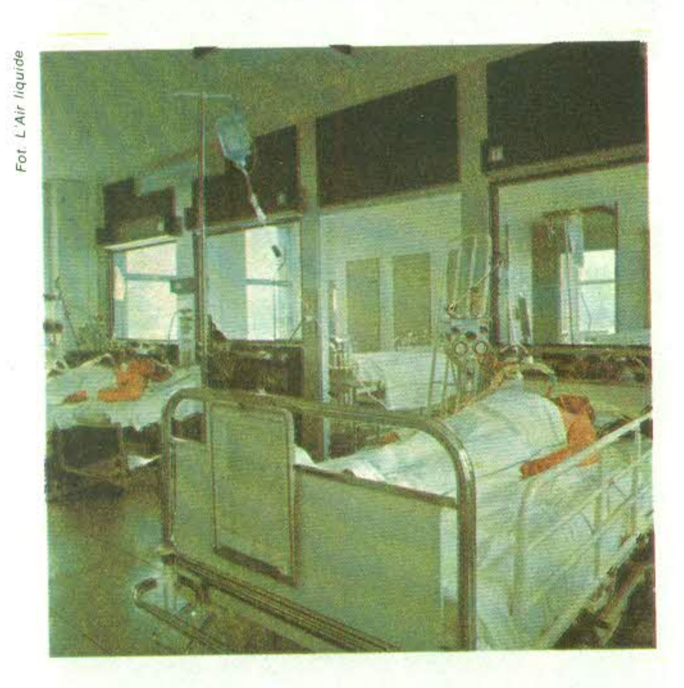
Serie de cables eléctricos de un ordenador electrónico.

Fot. I. B. M.



Almacenamiento de la información en la memoria magnética.

Fot. L'Air liquide



La Informática sirve para vigilar a los enfermos graves.

Memorias

La *memoria* es un elemento destinado a almacenar de manera automática las informaciones o los resultados parciales para utilizarlos luego en el momento oportuno.

Clases de memorias. — El ordenador dispone de dos clases de memorias : *central* y *auxiliares*.

La primera, que contiene los programas en curso de ejecución y algunos datos, interviene en todas las transferencias de información y es accesible desde la unidad central de tratamiento.

Las segundas, al permitir el almacenamiento de ficheros, aumentan la capacidad del ordenador y suelen ser de disco o de tambor magnético.

Anillos de ferrita. — El 95 % de las memorias centrales se construyen con *anillos de ferrita*, dispuestos en cada una de las intersecciones de una red metálica. Al tener este material propiedades electromagnéticas, el paso de la corriente por los conductores magnetiza y desmagnetiza los anillos en millonésimas de segundo.

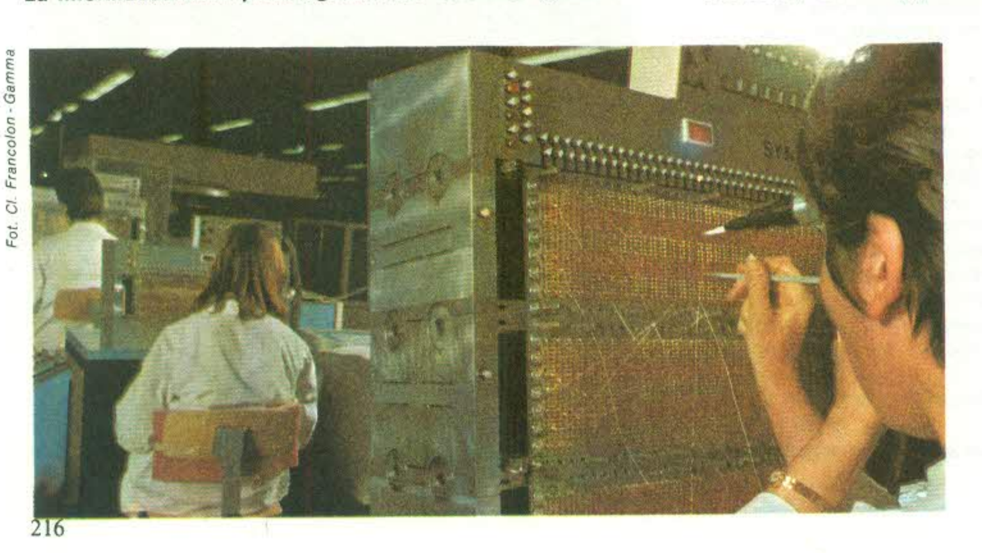
Memorias de cinta, de disco y de tambor. — La *cinta magnética* permite almacenar numerosas informaciones, pero el tiempo de restitución de éstas se considera demasiado largo en muchos casos.

Este inconveniente no existe, en cambio, en las *memorias de disco* o *de tambor*. Las primeras, con una capacidad de decenas de millones de caracteres, consisten en una pila de discos que contienen datos por ambas caras, cuya restitución se obtiene muy rápidamente por medio de una cabeza de lectura. Las segundas constan de un cilindro cubierto con una capa magnética en la cual se graban las informaciones en pistas circulares. La localización del dato requerido se efectúa con una cabeza de lectura en unos diez milisegundos.

Tratamiento de la información

El *tratamiento de la información* o *proceso de datos* por medios automáticos responde a la necesidad de transformar, de modo rápido, económico y seguro, ciertos datos que se conocen para intentar obtener resultados que puedan emplearse de forma directa o indirecta. Se aplica así a todas las actividades humanas, científicas, administrativas, industriales, comerciales, médicas, sociales, profesionales, deportivas y artísticas.

Fot. Cl. Francolon - Gamma



Reparación de un órgano de memoria, elemento del ordenador en el que se almacenan los datos.

Tratamiento de la información en un centro espacial.


Fot. E. Hartmann - Magnum

Toma de datos. — La información consta esencialmente de símbolos de carácter visual *(grafismos)* o auditivo *(fonemas)* que representan los objetos o los hechos o bien las relaciones existentes entre ambos. Actualmente la Informática se basa sobre todo en los primeros, aunque algunos procedimientos muy recientes utilizan también los segundos. Los símbolos gráficos empleados en Europa son las 26 letras del alfabeto, diez guarismos decimales, algunos signos de puntuación y una serie de símbolos matemáticos. Las palabras están formadas por agrupaciones de letras, y las oraciones por conjuntos de palabras organizadas según las reglas gramaticales. La yuxtaposición de cifras constituye los números, que se rigen por leyes aritméticas.

La información no puede procesarse en un ordenador en forma de símbolos gráficos y debe, por tanto, sufrir una transformación mediante un código adaptado a las operaciones de transmisión, almacenamiento y tratamiento. Éste es generalmente el *código binario,* sistema de numeración de base 2 fundado en el *bit* o unidad de información que sólo adopta dos valores (0 ó 1, sí o no, verdadero o falso).

La *toma de datos* suele realizarla un especialista que lee e interpreta los documentos escritos y los codifica sirviéndose de una máquina con teclado, aunque también se emplean dispositivos automáticos, como los lectores ópticos y magnéticos.

Registro en el soporte. — La información, una vez codificada, ha de grabarse en un soporte físico (tarjetas y cintas perforadas, cintas y discos magnéticos) para que puedan utilizarla los órganos de lectura del sistema.

Los ordenadores son capaces de leer la información codificada que aparece en estos soportes, almacenarla en una memoria y someterla finalmente al tratamiento requerido por el usuario siguiendo un programa de instrucciones concebido de modo específico para cada utilización. Los resultados obtenidos han de transformarse en símbolos gráficos usuales, impresos en papel o presentados en pantalla de tubos catódicos, aunque algunas veces pueden aparecer asimismo en forma de curvas o de señal acústica.

Divisiones de la Informática

Informática analítica. — La *Informática analítica* o *formal,* la más próxima a las ciencias exactas, trata de la búsqueda de los algoritmos que mejor se adapten a la resolución por los ordenadores de problemas de análisis matemático. Entre éstos se encuentran el cálculo de errores, la interpolación, la extrapolación, las ecuaciones algébricas, diferenciales y con derivadas parciales, la integración, las estadísticas, la programación matemática y las simulaciones. La teoría de los autómatas pertenece también a esta parte de la ciencia que analizamos.

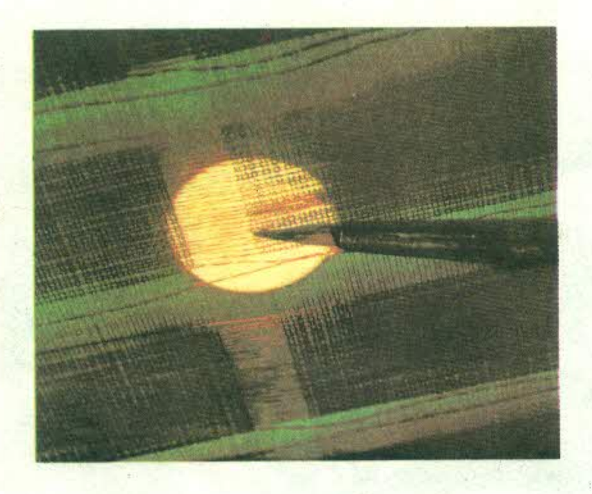
Informática sistemática y lógica. — La *Informática sistemática y lógica* estudia la estructura de los sistemas que requieren la utilización de los ordenadores (unidades centrales de tratamiento, memorias y órganos de entrada y salida) y de las redes de comunicación entre las computadoras, así como la intervención de los usuarios u operadores encargados de modo directo del funcionamiento del conjunto. Esta rama abarca también, desde el punto de vista de las relaciones lógicas existentes entre los diversos componentes del ordenador, la concepción interna de éste y las funciones que debe desempeñar sin tener a su cargo la realización tecnológica.

Informática física y tecnológica. — La *Informática física y tecnológica* se dedica al estudio y a la fabricación de las piezas y subconjuntos electrónicos, eléctricos o mecánicos empleados en los ordenadores y en los sistemas de tratamiento de datos. Engloba, por consiguiente, la determinación de los componentes electrónicos y el montaje de éstos en elementos de conmutación


Fot. Van der Veen-Rapho

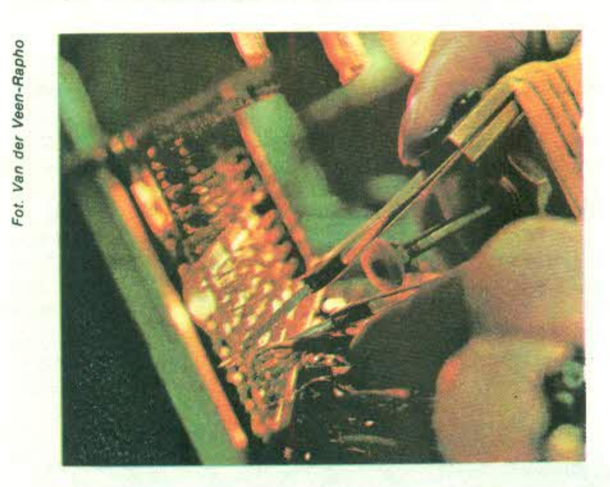
Microsoldadura de los circuitos impresos de un ordenador.

Fot Van der Veen-Rapho



Matriz de una memoria central de anillos de ferrita.

Fot. Van der Veen-Rapho



Minuciosa colocación de los componentes que integran la memoria de un ordenador.

La automatización de la gestión de las empresas es una de las muchas y variadas aplicaciones de la Informática.

lógica, por medio de circuitos integrados o de transistores, la tecnología utilizada en las memorias para la realización de los circuitos integrados de masa, anillos de ferrita, películas, cintas magnéticas, tambores y discos, así como la empleada para los dispositivos mecánicos (cabeza de lectura y electromecánica), órganos de entrada (lectores de tarjetas y de cintas magnéticas, teclados) o de salida (perforadoras, impresoras, pantallas de visualización) y materiales de concentración y de transmisión.

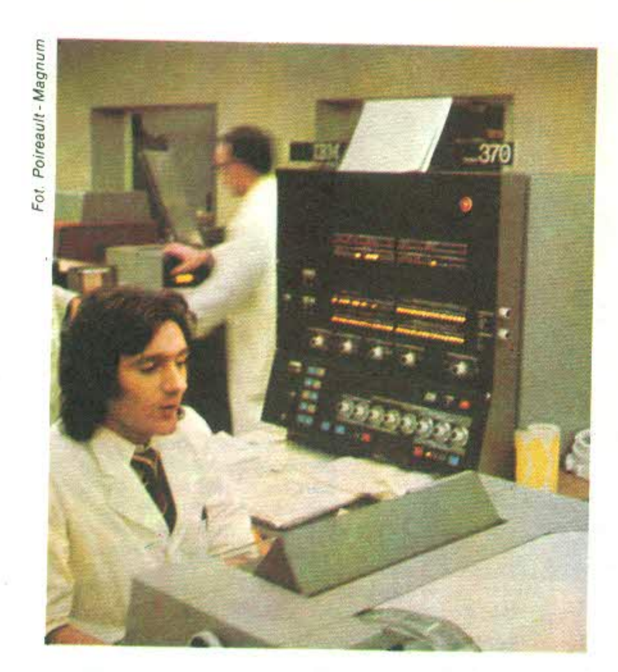
Informática metodológica. — La *Informática metodológica* corresponde a la investigación llevada a cabo en materia de métodos de programación y de explotación de los ordenadores y de los sistemas empleados para procesar los datos.

Un ordenador no puede utilizarse si no se dispone previamente del llamado *software básico*, que consiste en programas relativos al sistema de explotación, a la traducción en lenguaje máquina de las instrucciones introducidas en forma de símbolos (programas ensambladores y compiladores) y a distintos elementos de interés general.

Esta rama de la Informática estudia también la teoría de los lenguajes formales, las estructuras de listas y los lenguajes propios de la programación (ALGOL, COBOL, FORTRAN, etc.), así como los distintos modos de explotación del ordenador. La forma de utilización más antigua y todavía muy empleada, dada su gran sencillez, consiste en introducir directamente en los órganos de entrada de la máquina los datos de los problemas que se quieren tratar esperando la solución del primero que se ha planteado antes de someter los siguientes al mismo proceso. La computadora puede también hacerse funcionar a distancia mediante una *unidad periférica* conectada con ella por una línea de comunicación. Este procedimiento recibe el nombre de *teleinformática.* El utilizador tiene asimismo, gracias a la *multiprogramación,* la posibilidad de ejecutar varios trabajos simultáneamente estableciendo un orden de prioridad entre ellos y aprovechando los tiempos muertos que deja la realización de un programa en ciertas partes del ordenador para efectuar las operaciones correspondientes a otro. Cuando se necesita una contestación rápida de la máquina, se dice que ésta trabaja *en tiempo real,* como ocurre, por ejemplo, en el caso de las reservas de billetes en las agencias de viajes. Todos los métodos mencionados requieren la existencia de un programa de gestión, especial para cada uno de ellos, que se llama *sistema de explotación* y exige una tecnología muy avanzada.

Fot. Calaud Fotogram





Fot. Poireault - Magnum

La computadora constituye un auxiliar inapreciable en numerosos campos relativos a la administración pública.

Informática aplicada

La Informática, a semejanza de la Revolución Industrial que sustituyó la fuerza física del hombre por la de la máquina, ha producido un cambio profundo en la sociedad al permitir que los sistemas de tratamiento de la información desempeñen las funciones intelectuales más elementales del ser humano (suma, comparación, memorización). Estas últimas, indispensables en cualquier actividad, han traído consigo que los ordenadores estén presentes actualmente en todos los sectores de la vida moderna.

Aplicaciones militares. — La Informática empezó a emplearse en el campo militar para el estudio de las trayectorias balísticas y para la confección de tablas destinadas a resolver rápidamente ecuaciones necesarias para la fabricación y utilización de las armas nucleares.

Dentro de la organización defensiva de un país, los ordenadores representan la parte fundamental de los sistemas de detección de ataques aéreos, de dirección de tiro y del guiado de los cohetes. Son de gran interés asimismo en la elaboración de planes estratégicos y tácticos y en la realización de los programas de protección civil.

Aeronáutica y espacio. — En el sector de la aeronáutica y del espacio, el ordenador lleva a cabo todos los cálculos técnicos precisos y sirve para interpretar los datos y resultados obtenidos en las pruebas, en el análisis de las vibraciones y en el estudio del rendimiento óptimo de las aeronaves. La ejecución de los programas espaciales, sin el apoyo prestado por ellos, hubiera sido imposible, lo mismo que la modificación de la trayectoria de los cohetes y naves espaciales, que se efectúa desde los modernos centros de seguimiento de satélites gracias a la resolución, en fracciones de segundos, de numerosas y difíciles ecuaciones lineales con varias incógnitas.

Química, ingeniería e industria. — En una refinería de petróleo, la explotación más adecuada se establece por procedimientos informáticos.

El ordenador se emplea también para el trazado y el cálculo de obras públicas, así como para determinar el mejor aprovechamiento de los materiales. Los laboratorios de investigación se sirven de pantallas de visualización con un lápiz fotosensible para elaborar y transformar los proyectos en curso de estudio. Esta técnica es de uso frecuente en aeronáutica, en la industria del automóvil y en electrónica para la fabricación de circuitos impresos e integrados.

En la automatización de la producción intervienen cada día más las computadoras, principalmente en la conducción de laminadores y de máquinas, en la distribución de la producción eléctrica, en el control de las centrales nucleares, en las centrales telefónicas y en la explotación de los satélites de telecomunicación.

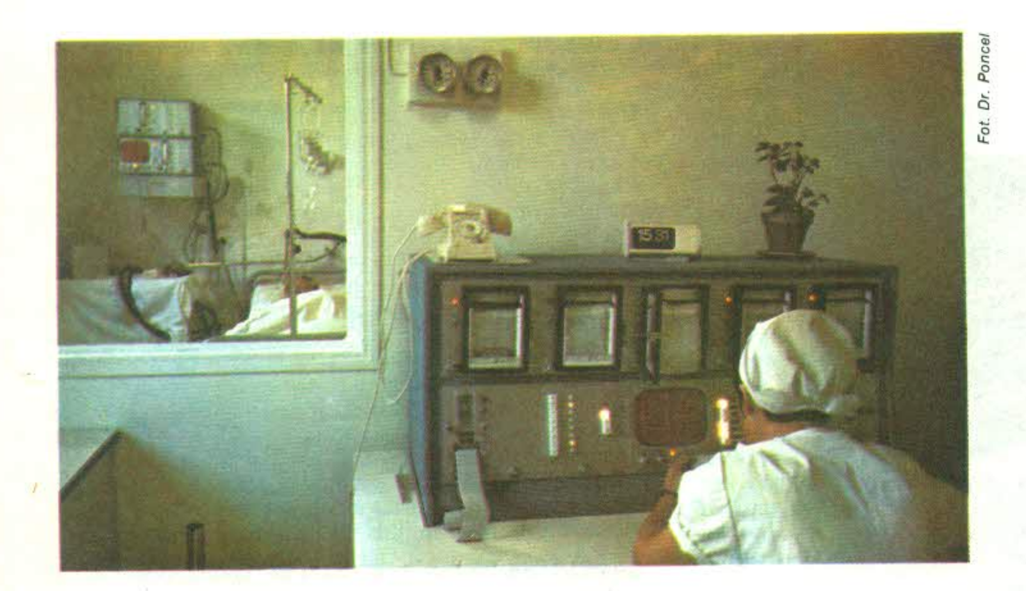
Gestión de empresas. — Las aplicaciones de la Informática son muy numerosas en la gestión administrativa y comercial. Entre ellas cabe mencionar en las empresas la elaboración automática de las nóminas, el cálculo del precio de costo, la contabilidad general, el control presupuestario, la facturación, el diario de ventas, las cuentas de los clientes y la situación de las existencias; en las entidades bancarias, la gestión de las cuentas de depósito y de las carteras de valores; en las compañías de seguros, la determinación de las primas, los reembolsos en caso de siniestro y los cálculos actuariales de reservas matemáticas; en los transportes, el sistema de reserva de títulos de viaje para trenes, barcos o aviones, el control de los billetes, las necesidades de repuestos, los abastecimientos de todo tipo y la distribución del trabajo entre los empleados; en los servicios públicos, los recibos de agua, gas, electricidad y teléfono, las existencias, los impuestos, la paga y la situación de los funcionarios, etc.

En el control de existencias, el ordenador no sólo ofrece la posibilidad de conservar en memoria un inventario permanente de los artículos disponibles y hacer los pedidos de reposición, sino que, por la aplicación de métodos de gestión en función del precio de los productos, volumen, frecuencia de utilización, etc., permite determinar muy exactamente el almacenamiento óptimo con la consiguiente reducción del capital inmovilizado.



Fot. Algar

Funcionamiento de un ordenador en una entidad bancaria.



Fot. Dr. Poncel

Observación, por medio del monitor cardiaco, del ritmo de las pulsaciones de un paciente que padece una grave enfermedad del corazón.

La Informática resulta también muy útil desde el punto de vista comercial, ya que gracias a ella los pedidos recibidos se registran en la memoria del ordenador. Éste da las órdenes oportunas de fabricación, de aprovisionamiento o de salida de almacén, para establecer luego los albaranes o notas de entrega y las facturas correspondientes, según las condiciones particulares del producto o del cliente, controlar el pago en función de los plazos concedidos al comprador y llevar a cabo todas las estadísticas relativas a las operaciones comerciales solicitadas por la dirección de la empresa.

Las computadoras prestan del mismo modo una ayuda muy valiosa en la toma de decisiones, función esencial de las personas encargadas de la dirección de una empresa, mediante operaciones de simulación que determinan, a partir de diversas hipótesis, la mejor solución desde el punto de vista científico para alcanzar un objetivo. Constituyen, por tanto, un poderoso elemento de centralización.

Otras aplicaciones. — La Informática se emplea ya en todos los sectores de la actividad humana. En *medicina* facilita la gestión de los hospitales, el estudio de historiales clínicos, el establecimiento de diagnósticos (análisis de electrocardiogramas y encefalogramas) y la vigilancia continua de los enfermos de suma gravedad. En la administración de la *justicia* se empieza a usar para la investigación documental a través de la información jurídica y de la jurisprudencia. En *artes gráficas* es indispensable en los procedimientos de fotocomposición, y en el *campo artístico* se utiliza para la composición musical y visual. Se están llevando a cabo estudios que harán posible la comunicación entre el hombre y el ordenador por medio de un lenguaje natural y permitirán el uso de las computadoras en la demostración de teoremas o, como adversarios de seres humanos, en algunos juegos, como el ajedrez, que tienen reglas muy precisas. El ingeniero español Leonardo TORRES QUEVEDO (1852-1936) fue un verdadero precursor con la construcción de un ajedrez mecánico capaz de contrarrestar los ataques de su oponente.

Se han reseñado sólo las principales aplicaciones actuales de la Informática y puede preverse que, en un futuro no muy lejano, su empleo llegará hasta los hogares mediante *terminales* análogos a los receptores telefónicos. El hombre dispondrá entonces de recursos adecuados para resolver problemas complicados, insolubles hasta la fecha debido a la capacidad de memoria y a la velocidad de cálculo de los ordenadores que se consideran todavía demasiado reducidas.

Consideraciones finales

La aparición y desarrollo de la Informática en la segunda mitad del siglo XX han producido una transformación bastante profunda en la vida del hombre y han provocado en varios casos una reacción adversa. No se acepta fácilmente la intrusión del ordenador en numerosos sectores de la actividad humana, en especial los considerados como privados, porque esto atenta en cierto modo contra las libertades individuales. La opinión pública piensa en general que el uso de la computadora por los organismos oficiales constituye un instrumento coactivo para el pago de las multas o de las deudas fiscales y no ve con agrado la posibilidad que existe de confeccionar, en un momento determinado, un inmenso fichero nacional en el que aparezcan registrados los datos personales y toda clase de antecedentes de cada uno de los ciudadanos.

Resulta necesaria, por consiguiente, una legislación destinada a poner coto a los abusos que podrían cometer el Estado o las empresas en detrimento de las personas. Dichas leyes deberían prever una serie de medidas encaminadas a controlar y a limitar el contenido de los ficheros, así como a reglamentar el acceso a los mismos.

La Informática, al conducir a una mayor automatización, suscita cierta animadversión por creerse que puede traer consigo la supresión de determinados puestos de trabajo. Este inconveniente, originado por el principio económico de buscar siempre la mayor rentabilidad, desaparece, sin embargo, cuando los gobiernos tienen programas de reconversión para los empleados perjudicados. Cabe recordar además que, si bien esta tecnología suprime las tareas subalternas, por otra parte requiere la participación de un personal de muy alto nivel.

Muchas de las críticas formuladas se deben al desconocimiento de la capacidad y de los límites de los ordenadores, así como de los mecanismos socioeconómicos que impulsan el desarrollo de la Informática. Una información adecuada desde la edad escolar sería, por consiguiente, sumamente deseable, porque contribuiría a transformar la actitud un tanto negativa que el público tiene en general respecto a esta nueva especialidad.

Indice alfabético

Esta obra se terminó de imprimir en agosto de 1988
en los talleres de Litografía Senefelder,
Calle Bernal Díaz 33, México, D.F.

La encuadernación fue elaborada en Ediciones
Intercontinentales, S.A. Calle Nardo 48
San Bernardino, Xochimilco.

La edición consta de 5 000 ejemplares